Die Präcession.

59. Um die Lage der Ekliptik und des Aequators zu jeder Zeit angeben zu können, bezieht man dieselben auf eine feste Ebene, wofür man die Ebene der Ekliptik zu einer bestimmten Epoche, z. B. zu Anfang des Jahres 1750, annimmt; man nennt diese die feste Ekliptik.

Die physische Astronomie lehrt nun, dass durch die Wirkung der Anziehung der Sonne und des Mondes auf die sphäroidische Erde, in Verbindung mit der Rotation derselben um ihre Axe, eine Bewegung der Ebene des Aequators erzeugt wird, in der Art, dass, während hiedurch die Neigung desselben gegen die feste Ekliptik nicht geändert wird, die Durchschnittslinie beider Ebenen, oder die Aequinoctiallinie sich langsam in der Ebene der festen Ekliptik dreht, und zwar in einer Richtung, entgegengesetzt derjenigen, in welcher die Längen gezählt werden, oder mit anderen Worten, dass die Aequinoctialpuncte sich auf der festen Ekliptik rückwärts bewegen. Die Folge dieser Bewegung ist offenbar eine allen Sternen gemeinschaftliche jährliche Zunahme der Länge derselben, auf der festen Ekliptik gezählt, welche die Lunisolar-Präcession genannt wird. Durch die Lunisolar-Präcission werden also die Breiten der Sterne nicht geändert, sondern nur ihre Längen; in Folge dessen ändern sich aber sowohl die Rectascensionen als Declinationen.

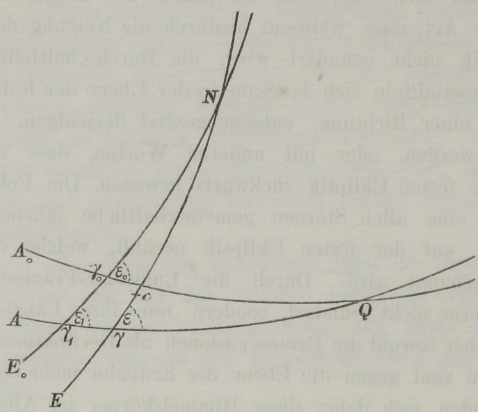
Die Bahnen der Planeten sind gegen die Ebene der Erdbahn mehr oder weniger geneigt und es befinden sich daher diese Himmelskörper im Allgemeinen ausserhalb der Ebene der Erdbahn. Die zwischen denselben und der Erde bestehende gegenseitige Anziehung strebt nun beständig die Erde aus der Ebene zu ziehen, in welcher sie sich um die Sonne bewegt, wodurch eben diese Ebene der Erdbahn oder der Ekliptik ihre Lage gegen die feste Ekliptik allmälig ändert. Die Lage des Aequators wird hiedurch nicht afficirt und die Wirkung der in Rede stehenden Bewegung der Ebene der Ekliptik ist eine kleine Drehung der Aequinoctiallinie in der Ebene des Aequators in jener Richtung, in welcher die Rectascensionen gezählt werden. Hiedurch entsteht eine allen Sternen gemeinschaftliche jährliche Abnahme der Rectascension, welche die Präcession durch die Planeten genannt wird. Sie lässt offenbar die Declinationen der Sterne unverändert, ändert aber mit den Rectascensionen ihre Längen und Breiten.

In Folge der eben erwähnten durch die Planeten bewirkten Bewegung der Ebene der Ekliptik entsteht nun auch eine Aenderung der Neigung derselben gegen den Aequator, d. i. der Schiefe der Ekliptik, welche die Säcularänderung der Schiefe genannt wird.

Wie schon oben bemerkt wurde, hat die Anziehung der Sonne und des Mondes auf die sphäroidische Erde, welche in Verbindung mit der Axendrehung derselben die Lunisolar-Präcession erzeugt, eine Aenderung der Schiefe der Ekliptik nicht zur unmittelbaren Folge; durch die erwähnte Einwirkung der Planeten ändern aber die Ebenen der Erdbahn sowohl als der Mondbahn ihre Lage gegen den Aequator, und hieraus entsteht eine Aenderung der anziehenden Kraft der Sonne und des Mondes auf die Erde, deren Folge eine sehr kleine Aenderung in der Neigung des Aequators gegen die feste Ekliptik ist.

60. Es sei nun (Fig. 17) E_0N die feste Ekliptik, A_0Q der Aequator, γ_0 der Frühlingspunct für den Anfang des Jahres 1750; EN die Ekliptik, AQ der Aequator, γ der Frühlingspunct zur Zeit $1750+t$; γ_1 der Durchschnittspunct des Aequators zur Zeit $1750+t$ mit der festen Ekliptik. Die Längen werden in der Richtung γN, die Rectascensionen in der Richtung γQ gezählt.

Fig. 17.



Ohne die Einwirkung der Planeten würde die Ekliptik ihre Lage nicht geändert haben und somit blos der Frühlingspunct auf der festen Ekliptik von γ_0 nach γ_1 zurückgewichen sein; es ist daher $\gamma_0\gamma_1 = l_1$ der Betrag der Lunisolar-Präcession in t Jahren, von 1750 an gezählt.

Allein da in Folge der Wirkung der Planeten auch die Ekliptik ihre Lage geändert und nach EN gekommen ist, so hat sich auch der Frühlingspunct auf dem Aequator von γ_1 nach γ bewegt, und es ist $\gamma_1\gamma = a$ die Präcession durch die Planeten in t Jahren, von 1750 an gezählt.

Hiebei hat sich nun auch die Neigung beider Ebenen, d. i. die Schiefe der Ekliptik geändert. Zur Zeit der Epoche 1750 war dieselbe $\varepsilon_0 = \angle N\gamma_0 Q$; nach t Jahren wird diese Schiefe in Beziehung auf die feste Ekliptik $= \varepsilon_1 = \angle N\gamma_1 Q$, und in Beziehung auf die wahre Ekliptik $= \varepsilon = \angle N\gamma Q$ sein.

Nach Bessel ist nun für die Epoche 1750:

$$\begin{aligned} l_1 &= 50''.37572\, t - 0''.0001217945\, t^2, \\ a &= 0''.17926\, t - 0''.0002660393\, t^2, \\ \varepsilon_0 &= 23^\circ\, 28'\, 18''.0, \\ \varepsilon_1 &= \varepsilon_0 + 0''.0000098423\, t^2, \\ \varepsilon &= \varepsilon_0 - 0''.48368\, t - 0''.00000272295\, t^2, \end{aligned} \tag{93}$$

wo t die nach 1750 verflossene Anzahl von Jahren bedeutet.

Ist c der Punct der beweglichen Ekliptik, in welchem dieselbe im Jahre 1750, wo sie mit der festen Ekliptik zusammenfiel, vom Aequator geschnitten wurde (d. i. der Punct γ_0), so ist offenbar γc der Bogen, um welchen die Längen aller Sterne in t Jahren seit 1750 zugenommen haben; dieser Bogen $\gamma c = \gamma N - \gamma_0 N = l$ wird die allgemeine Präcession genannt.

61. Die in (93) angegebenen Werthe genügen, um sowohl die allgemeine Präcession, als auch die Lage der beweglichen oder wahren Ekliptik gegen die feste für irgend eine gegebene Zeit zu finden. Letztere ist offenbar bestimmt, wenn man die Entfernung $\gamma_0 N$ (Fig. 17) des Durchschnittspunctes der beweglichen und festen Ekliptik vom festen Aequinoctium γ_0, so wie den Neigungswinkel beider Ebenen $= \gamma_0 N \gamma$ kennt. Sei $\gamma_0 N = \Pi$, $\angle \gamma_0 N \gamma = \pi$, so hat man in dem Dreiecke $N\gamma\gamma_1$:

$$N\gamma_1 = \Pi + l_1, \qquad N\gamma = Nc + c\gamma = N\gamma_0 + c\gamma = \Pi + l, \quad \gamma\gamma_1 = a,$$
$$\angle N\gamma\gamma_1 = 180^0 - \varepsilon, \quad \angle N\gamma_1\gamma = \varepsilon_1, \quad \angle \gamma_1 N \gamma = \pi,$$

und folglich zufolge der Gauss'schen Analogien:

$$\begin{aligned} \cos\tfrac{1}{2}\pi \sin\tfrac{1}{2}(l_1 - l) &= \sin\tfrac{1}{2}a \cos\tfrac{1}{2}(\varepsilon + \varepsilon_1), \\ \cos\tfrac{1}{2}\pi \cos\tfrac{1}{2}(l_1 - l) &= \cos\tfrac{1}{2}a \cos\tfrac{1}{2}(\varepsilon - \varepsilon_1), \\ \sin\tfrac{1}{2}\pi \sin[\Pi + \tfrac{1}{2}(l_1 + l)] &= \sin\tfrac{1}{2}a \sin\tfrac{1}{2}(\varepsilon + \varepsilon_1), \\ \sin\tfrac{1}{2}\pi \cos[\Pi + \tfrac{1}{2}(l_1 + l)] &= \cos\tfrac{1}{2}a \sin\tfrac{1}{2}(\varepsilon - \varepsilon_1). \end{aligned} \qquad (a)$$

1. Durch Division der beiden ersten Gleichungen erhält man:

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(l_1 - l) = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}a \frac{\cos\tfrac{1}{2}(\varepsilon + \varepsilon_1)}{\cos\tfrac{1}{2}(\varepsilon - \varepsilon_1)}.$$

Nun ist $\tfrac{1}{2}(\varepsilon - \varepsilon_1)$ ein sehr kleiner Bogen, dessen Cosinus $= 1$ gesetzt werden kann, und, wie aus der Form der Gleichung erhellt, $l_1 - l$ eine Grösse von der Ordnung der sehr kleinen Grösse a, so dass die Tangenten mit den Bögen vertauscht werden können; man hat daher:

$$l_1 - l = a \cos\tfrac{1}{2}(\varepsilon + \varepsilon_1).$$

Es ist aber:

$$\tfrac{1}{2}(\varepsilon + \varepsilon_1) = \varepsilon_0 - 0''.24184\, t + 0''.000003559675\, t^2 = \varepsilon_0 - \xi,$$

wenn wir der Kürze wegen:

$$\xi = 0''.24184\, t - 0''.000003559675\, t^2$$

setzen. Hiemit wird:

$$l_1 - l = a \cos(\varepsilon_0 - \xi),$$

oder mit Vernachlässigung der höheren Potenzen der kleinen Grösse ξ:

$$l_1 - l = a \cos\varepsilon_0 + a\xi \sin\varepsilon_0 \sin 1''.$$

Substituirt man in diesen Ausdruck die Werthe von l_1, ε_0, a und ξ, so erhält man ohne Schwierigkeit für die allgemeine Präcession von 1750 bis $1750 + t$:

$$l = 50''.21129\, t + 0''.0001221483\, t^2. \qquad (94)$$

Differenzirt man diesen Ausdruck nach t, so erhält man, da der Zeit t das

Jahr als Einheit zu Grunde liegt, für die jährliche allgemeine Präcession zur Zeit $1750+t$:

$$\frac{dl}{dt}=50''.21129+0''.0002442966\,t. \tag{94*}$$

So ist für das Jahr 1870, $t=120$, somit $\frac{dl}{dt}=50''.2406$.

2. Die zwei letzten der Gleichungen (a) kann man, die Sinus der sehr kleinen Grössen a, π und $\frac{1}{2}(\varepsilon-\varepsilon_1)$ mit den Bögen vertauschend, folgendermassen schreiben:

$$\pi\sin[\Pi+\tfrac{1}{2}(l_1+l)]=a\sin\tfrac{1}{2}(\varepsilon+\varepsilon_1)$$
$$\pi\cos[\Pi+\tfrac{1}{2}(l_1+l)]=\varepsilon-\varepsilon_1\,;$$

erhebt man diese Gleichungen zum Quadrate, addirt sie und setzt wieder, wie oben, $\frac{1}{2}(\varepsilon+\varepsilon_1)=\varepsilon_0-\xi$, so kommt:

$$\pi^2=a^2\sin(\varepsilon_0-\xi)^2+(\varepsilon-\varepsilon_1)^2,$$

oder mit Vernachlässigung der höheren Potenzen von ξ:

$$\pi^2=a^2\sin\varepsilon_0^2+(\varepsilon-\varepsilon_1)^2-a^2\xi\sin 2\varepsilon_0\sin 1''.$$

Nun hat man:

$$\varepsilon-\varepsilon_1=-0''.48368\,t-0''.00001256525\,t^2,$$

daher:

$$(\varepsilon-\varepsilon_1)^2=0.233946\,t^2+0.0000121551\,t^3,$$

ferner:

$$a^2=0.032134\,t^2-0.0000953805\,t^3,$$
$$a^2\xi=0.0077713\,t^3\,;$$

multiplicirt man nun die zwei letzten Grössen noch mit $\sin\varepsilon_0^2$ und beziehungsweise $\sin 2\varepsilon_0\sin 1''$, so erhält man:

$$\pi^2=0.239044\,t^2-0.0000030034\,t^3,$$

und hieraus:

$$\pi=0''.48892\,t-0''.0000030715\,t^2. \tag{95}$$

3. Durch Division der zwei letzten der Glgn. (a) ergibt sich endlich:

$$\operatorname{tg}[\Pi+\tfrac{1}{2}(l_1+l)]=\frac{a}{\varepsilon-\varepsilon_1}\sin(\varepsilon_0-\xi).$$

Man erhält nun leicht:

$$\frac{a}{\varepsilon-\varepsilon_1}=-\frac{0.17926\,t-0.0002660393\,t^2}{0.48368\,t+0.00001256525\,t^2}$$
$$=-0.370617+0.000559660\,t=p+q\,t\,;$$

ferner ist $\sin(\varepsilon_0-\xi)=\sin\varepsilon_0-\xi\sin 1''\cos\varepsilon_0$; bleibt man nun in der Entwickelung bei der 1ten Potenz von t stehen, so hat man $\xi=0.24184\,t=mt$, somit $\sin(\varepsilon_0-\xi)=\sin\varepsilon_0-mt\sin 1''\cos\varepsilon_0$; multiplicirt man diesen Ausdruck mit dem vorhergehenden Ausdrucke von $\frac{a}{\varepsilon-\varepsilon_1}$, so erhält man:

$$\operatorname{tg}[\Pi + \tfrac{1}{2}(l_1 + l)] = p \sin \varepsilon_0 + (q \sin \varepsilon_0 - mp \sin 1'' \cos \varepsilon_0)\, t,$$

und durch Substitution der Zahlenwerthe von ε_0, m, p und q:

$$\operatorname{tg}[\Pi + \tfrac{1}{2}(l_1 + l)] = -0.147615 + 0.0002233081\, t.$$

Setzen wir nun:

$$-0.147615 = \operatorname{tg} \Pi_0, \text{ und } \Pi = \Pi_0 + \varDelta\Pi,$$

so wird

$$\Pi_0 = 171^\circ\, 36'\, 10'',$$

und

$$\operatorname{tg}[\Pi_0 + \varDelta\Pi + \tfrac{1}{2}(l_1 + l)] = \operatorname{tg} \Pi_0 + s\, t,$$

wenn wir den Coefficienten von t der Kürze wegen mit s bezeichnen. Nun ist der in der Klammer auf Π_0 folgende Bogen $\varDelta\Pi + \frac{1}{2}(l_1 + l)$ sehr klein; man kann daher $\operatorname{tg}[\Pi_0 + \varDelta\Pi + \frac{1}{2}(l_1 + l)]$ nach dem Taylor'schen Satze entwickeln und erhält, bei dem 2ten Gliede stehen bleibend:

$$\operatorname{tg} \Pi_0 + \frac{\varDelta\Pi + \frac{1}{2}(l_1 + l)}{\cos \Pi_0^2} = \operatorname{tg} \Pi_0 + s\, t,$$

und hieraus in Bogensecunden:

$$\varDelta\Pi = \frac{s \cos \Pi_0^2 \,.\, t}{\sin 1''} - \tfrac{1}{2}(l_1 + l).$$

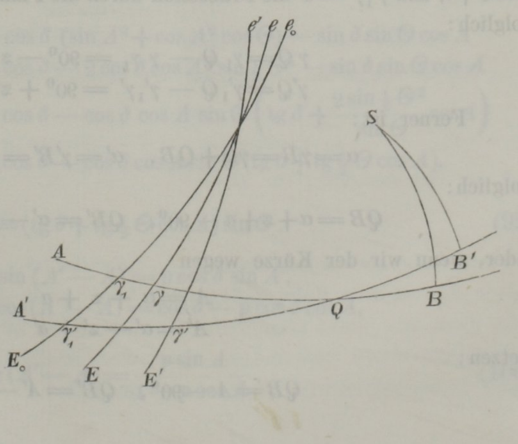
Setzt man hier für s, Π_0 und $\frac{1}{2}(l_1 + l)$ die numerischen Werthe ein, so kommt $\varDelta\Pi = -5''.215$, und hiemit:

$$\Pi = 171^\circ\, 36'\, 10'' - 5''.215\, t. \tag{96}$$

62. Das Vorhergehende setzt uns nun in den Stand, die Veränderungen zu berechnen, welche die Längen und Breiten, so wie die Rectascensionen und Declinationen der Sterne in Folge der Präcession erleiden. Wir beschränken uns hier auf die Auflösung der folgenden Aufgabe:

Es ist die Rectascension und Declination (α, δ) eines Sternes für die Zeit $1750 + t$ gegeben; man soll die Rectascension und Declination (α', δ') des Sternes für die Zeit $1750 + t'$ finden.

Fig. 18.



Es sei (Fig. 18) $E_0 e_0$ die feste Ekliptik für 1750; Ee und AQ beziehungsweise Ekliptik und Aequator für $1750 + t$; $E'e'$ und $A'Q$ Ekliptik und Aequator für $1750 + t'$. S der Stern, SB und SB' die entsprechenden Declinationskreise für die beiden Lagen des Aequators. Bestimmen wir zunächst die Lage des Durchschnittspunctes Q.

Da $\gamma_1\gamma'_1$ die Lunisolar-Präcession in der Zeit $t'-t$ ist, so ist, wenn wir die auf die Epoche $1750+t'$ sich beziehenden Grössen ε_1 und l_1 mit ε'_1 und l'_1 bezeichnen, im Dreiecke $\gamma_1 Q\gamma'_1$:

$$\gamma_1\gamma'_1 = l'_1 - l_1\,,\quad \angle\gamma'_1\gamma_1 Q = 180^0 - \varepsilon_1\,,\quad \angle\gamma_1\gamma'_1 Q = \varepsilon'_1\,;$$

setzt man nun:

$$\gamma_1 Q = 90^0 - z\,,\quad \gamma'_1 Q = 90^0 + z'\,,\quad \angle\gamma_1 Q\gamma'_1 = \Theta\,,$$

so hat man aus diesem Dreiecke zufolge der Gauss'schen Analogien:

$$\begin{aligned}
\cos\tfrac{1}{2}\Theta\sin\tfrac{1}{2}(z'+z) &= \sin\tfrac{1}{2}(l'_1-l_1)\cos\tfrac{1}{2}(\varepsilon'_1+\varepsilon_1),\\
\cos\tfrac{1}{2}\Theta\cos\tfrac{1}{2}(z'+z) &= \cos\tfrac{1}{2}(l'_1-l_1)\cos\tfrac{1}{2}(\varepsilon'_1-\varepsilon_1),\\
\sin\tfrac{1}{2}\Theta\sin\tfrac{1}{2}(z'-z) &= \cos\tfrac{1}{2}(l'_1-l_1)\sin\tfrac{1}{2}(\varepsilon'_1-\varepsilon_1),\\
\sin\tfrac{1}{2}\Theta\cos\tfrac{1}{2}(z'-z) &= \sin\tfrac{1}{2}(l'_1-l_1)\sin\tfrac{1}{2}(\varepsilon'_1+\varepsilon_1).
\end{aligned}$$

Nun ist $\frac{1}{2}(\varepsilon'_1-\varepsilon_1)$ so klein, dass der Cosinus immer $=1$, und der Bogen statt des Sinus gesetzt werden kann; dasselbe gilt auch von dem Bogen $\frac{1}{2}(z'-z)$; man erhält daher aus diesen Gleichungen die folgenden:

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(z'+z) &= \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(l'_1-l_1)\cos\tfrac{1}{2}(\varepsilon'_1+\varepsilon_1)\,,\\
\tfrac{1}{2}(z'-z) &= \frac{\tfrac{1}{2}(\varepsilon'_1-\varepsilon_1)}{\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(l'_1-l_1)\sin\tfrac{1}{2}(\varepsilon'_1+\varepsilon_1)}\,,\\
\sin\tfrac{1}{2}\Theta &= \sin\tfrac{1}{2}(l'_1-l_1)\sin\tfrac{1}{2}(\varepsilon'_1+\varepsilon_1)\,,
\end{aligned} \tag{97}$$

von welchen die 1te aus der Division der zwei ersten, die 2te aus der Division der zwei letzten, und die 3te aus der letzten der obigen Gleichungen hervorgeht. Mittelst der Glgn. (97) findet man z, z' und Θ, womit die Lage des Punctes Q bestimmt ist.

Nun ist in Fig. 18 γ das Aequinoctium für $1750+t$, γ' jenes für $1750+t'$, folglich $\gamma_1\gamma = a$ die Präcession durch die Planeten von 1750 bis $1750+t$, und $\gamma'_1\gamma' = a'$ die Präcession durch die Planeten von 1750 bis $1750+t'$; folglich:

$$\begin{aligned}
\gamma Q &= \gamma_1 Q - \gamma\gamma_1 = 90^0 - z - a\,,\\
\gamma' Q &= \gamma'_1 Q - \gamma'_1\gamma' = 90^0 + z' - a'.
\end{aligned}$$

Ferner ist:

$$\alpha = \gamma B = \gamma Q + QB\,,\quad \alpha' = \gamma' B' = \gamma' Q + QB'\,,$$

folglich:

$$QB = \alpha + z + a - 90^0,\quad QB' = \alpha' - z' + a' - 90^0,$$

oder, wenn wir der Kürze wegen

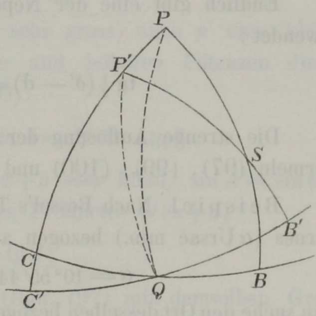
$$\begin{aligned}
A &= \alpha + z + a\\
A' &= \alpha' - z' + a'
\end{aligned}$$

setzen:

$$QB = A - 90^0,\quad QB' = A' - 90^0.$$

Es seien nun in Fig. 19 P und P' die Pole des Aequators zur Zeit $1750+t$ und $1750+t'$; legen wir durch dieselben den grössten Kreis $PP'CC'$, so ist Q dessen Pol, somit arc. $PP' =$ arc. $CC' = \angle CQC' = \Theta$, ferner $\angle CPQ = \angle PP'Q = 90^0$. Man hat daher im Dreiecke SPP':

Fig. 19.



$$PS = 90^0 - \delta,\quad P'S = 90^0 - \delta',\quad PP' = \Theta,$$
$$\angle P'PS = 90^0 + QB = A,$$
$$\angle PP'S = 90^0 - QB' = 180^0 - A',$$

und somit nach den Grundformeln der sphärischen Trigonometrie:

$$\begin{aligned} \cos\delta' \sin A' &= \cos\delta \sin A, \\ \cos\delta' \cos A' &= \cos\delta \cos A \cos\Theta - \sin\delta \sin\Theta, \\ \sin\delta' &= \cos\delta \cos A \sin\Theta + \sin\delta \cos\Theta. \end{aligned} \tag{98}$$

Mittelst dieser Formeln findet man nun, da A, δ und Θ bekannt sind, A' und δ', und endlich $\alpha' = A' + z' - a'$.

Man kann diese Formeln auf bekannte Weise logarithmisch machen, oder daraus andere ableiten, welche die Differenzen $A' - A$ und $\delta' - \delta$ geben und eine bequemere und zugleich schärfere Rechnung gestatten.

Multiplicirt man die 1[te] der Glgn. (98) mit $\cos A$, die 2[te] mit $\sin A$, und subtrahirt die Producte, so kommt:

$$\begin{aligned} \cos\delta' \sin(A' - A) &= \cos\delta \sin A \cos A\,(1 - \cos\Theta) + \sin\delta \sin\Theta \sin A \\ &= \cos\delta \sin A \sin\Theta \left(\frac{1 - \cos\Theta}{\sin\Theta} \cos A + \operatorname{tg}\delta\right) \\ &= \cos\delta \sin A \sin\Theta\,(\operatorname{tg}\delta + \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\Theta \cos A). \end{aligned}$$

Multiplicirt man aber die 1[te] mit $\sin A$, die 2[te] mit $\cos A$ und addirt die Producte, so kommt:

$$\begin{aligned} \cos\delta' \cos(A' - A) &= \cos\delta\,(\sin A^2 + \cos A^2 \cos\Theta) - \sin\delta \sin\Theta \cos A \\ &= \cos\delta - 2\cos\delta \cos A^2 \sin\tfrac{1}{2}\Theta^2 - \sin\delta \sin\Theta \cos A \\ &= \cos\delta - \cos\delta \cos A \sin\Theta \left(\operatorname{tg}\delta + \frac{2\sin\frac{1}{2}\Theta^2}{\sin\Theta} \cos A\right) \\ &= \cos\delta - \cos\delta \cos A \sin\Theta\,(\operatorname{tg}\delta + \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\Theta \cos A). \end{aligned}$$

Setzt man also:

$$p = (\operatorname{tg}\delta + \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\Theta \cos A) \sin\Theta, \tag{99}$$

so wird:

$$\begin{aligned} \cos\delta' \sin(A' - A) &= p \cos\delta \sin A, \\ \cos\delta' \cos(A' - A) &= \cos\delta - p \cos\delta \cos A, \end{aligned}$$

also:

$$\operatorname{tg}(A' - A) = \frac{p \sin A}{1 - p \cos A}, \tag{100}$$

und:

$$\alpha' - \alpha = A' - A + (z' + z) - (a' - a).$$

Endlich gibt eine der Neper'schen Formeln, auf dasselbe Dreieck angewendet:

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(\delta' - \delta) = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\Theta \frac{\cos \frac{1}{2}(A' + A)}{\cos \frac{1}{2}(A' - A)}. \tag{101}$$

Die strenge Auflösung der Aufgabe ist also auf die Berechnung der Formeln (97), (99), (100) und (101) zurückgeführt.

Beispiel. Nach Bessel's Tabulae Regiomontanae ist der Ort des Polarsternes (α Ursae min.) bezogen auf das Aequinoctium vom J. 1755:

$$\alpha = 10^0\, 55'\, 44''.955\,, \quad \delta = 87^0 59' 41''.12\,;$$

man suche den Ort desselben bezogen auf den Aequator und das Aequinoctium 1870.

Man hat nun nach den Ausdrücken (93):

$$\begin{array}{ll} \text{für } 1755\ (t=5) & \text{für } 1870\ (t'=120) \\ l_1 = 4'\, 11''.876 & l'_1 = 1^0\, 40'\, 43''.333 \\ a = 0''.890 & a' = 17''.680 \\ \varepsilon_1 = 23^0\, 28'\, 18''.00025, & \varepsilon'_1 = 23^0\, 28'\, 18''.14173. \end{array}$$

Hieraus folgt:

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}(l'_1 - l_1) &= 0^0\, 48'\, 15''.7285, \\ \tfrac{1}{2}(\varepsilon'_1 + \varepsilon_1) &= 23^0\, 28'\, 18''.07, \\ \tfrac{1}{2}(\varepsilon'_1 - \varepsilon_1) &= 0''.07074. \end{aligned}$$

Hiemit geben die Glgn. (97):

$$\begin{array}{ll} \tfrac{1}{2}(z' + z) = 0^0\, 44'\, 16''.153, & \tfrac{1}{2}\Theta = 0^0\, 19'\, 13''.325 \\ \tfrac{1}{2}(z' - z) = 0\ \ 0\ \ 12\ .650, & \Theta = 0\ \ 38\ \ 26\ .650 \\ z = 0\ \ 44\ \ 3\ .503 & A = \alpha + z + a \\ z' = 0\ \ 44\ \ 28\ .803 & = 11^0\, 39'\, 49''.348. \end{array}$$

Endlich erhält man aus den Glgn. (99), (100), (101):

$$\log p = 9.5044086$$

$$A' - A = 5^0\, 22'\, 9''.624 \qquad \tfrac{1}{2}(\delta' - \delta) = 0^0\, 18'\, 38''.577$$

Es ist somit die Präcession des Sternes von 1755 bis 1870:

$$\begin{array}{ll} \text{in Rectascension:} & \alpha' - \alpha = 6^0\, 50'\, 25''.140 \\ \text{in Declination:} & \delta' - \delta = 0^0\, 37'\, 17''.15, \end{array}$$

und der Ort desselben für 1870:

$$\alpha' = 17^0\, 46'\, 10''.09\,, \quad \delta' = 88^0\, 36'\, 58''.27$$

63. Die im vorhergehenden §. entwickelten strengen Formeln werden jedoch nur in dem Falle anzuwenden sein, wenn die Declination des Sternes sehr gross ist. Steht aber der Stern dem Pole nicht sehr nahe, so sind die Differenzen $\alpha' - \alpha$ und $\delta' - \delta$ immer nur kleine Grössen, zu deren Bestimmung Näherungsformeln vollkommen ausreichen.

Man hat für die Präcession in der Zeit $t'-t$ den Ausdruck:

$$\alpha'-\alpha=A'-A+(z'+z)-(a'-a).$$

Nun ist Θ immer, und (wenn δ nicht sehr gross) auch p eine kleine Grösse. Mit Vernachlässigung der Quadrate und höheren Potenzen dieser Grössen erhält man daher aus (99) und (100):

$$p=\Theta\operatorname{tg}\delta\,,\qquad A'-A=p\sin A=\Theta\sin A\operatorname{tg}\delta.$$

Es ist aber $A=\alpha+z+a$, somit, da $z+a$ sehr klein, $\sin A=\sin\alpha+(z+a)\cos\alpha$, folglich mit Vernachlässigung des Productes $\Theta(z+a)$:

$$A'-A=\Theta\sin\alpha\operatorname{tg}\delta;$$

endlich hat man aus der 1ten und 3ten der Glgn. (97) mit demselben Grade der Annäherung:

$$z'+z=(l'_1-l_1)\cos\varepsilon_1\,,\qquad \Theta=(l'_1-l_1)\sin\varepsilon_1$$

Mit diesen Werthen wird nun:

$$\alpha'-\alpha=(l'_1-l_1)\cos\varepsilon_1-(a'-a)+(l'_1-l_1)\sin\varepsilon_1\sin\alpha\operatorname{tg}\delta,$$

wo $\alpha'-\alpha$ die Präcession von $1750+t$ bis $1750+t'$ bedeutet; dividirt man diese Gleichung durch die Zwischenzeit $t'-t$, in Jahren ausgedrückt, so hat man:

$$\frac{\alpha'-\alpha}{t'-t}=\frac{l'_1-l_1}{t'-t}\cos\varepsilon_1-\frac{a'-a}{t'-t}+\frac{l'_1-l_1}{t'-t}\sin\varepsilon_1\sin\alpha\operatorname{tg}\delta\,,$$

welcher Ausdruck die jährliche Präcession zwischen den Zeiten $1750+t$ und $1750+t'$ ausdrückt. Lassen wir nun das Intervall $t'-t$ unendlich klein werden, so gibt die Gleichung:

$$\frac{d\alpha}{dt}=\frac{dl_1}{dt}\cos\varepsilon_1-\frac{da}{dt}+\frac{dl_1}{dt}\sin\varepsilon_1\sin\alpha\operatorname{tg}\delta$$

die jährliche Präcession in Rectascension für die Zeit $1750+t$.

Auf dieselbe Weise folgt aus Gl. (101):

$$\delta'-\delta=\Theta\cos A=(l'_1-l_1)\sin\varepsilon_1\cos\alpha\,,$$

$$\frac{\delta'-\delta}{t'-t}=\frac{l'_1-l_1}{t'-t}\sin\varepsilon_1\cos\alpha\,,$$

somit

$$\frac{d\delta}{dt}=\frac{dl_1}{dt}\sin\varepsilon_1\cos\alpha$$

als jährliche Präcession in Declination.

Setzen wir also:

$$m=\frac{dl_1}{dt}\cos\varepsilon_1-\frac{da}{dt}\,,\qquad n=\frac{dl_1}{dt}\sin\varepsilon_1\,,$$

so erhalten wir für die jährliche Präcession in Rectascension und Declination:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\alpha}{dt} &= m + n \sin\alpha \operatorname{tg}\delta,\\ \frac{d\delta}{dt} &= n\cos\alpha.\end{aligned}\right\} \tag{102}$$

Aus den Ausdrücken (93) folgt:

$$\frac{dl_1}{dt} = 50''.37572 - 0''.0002435890\ t,$$

$$\frac{da}{dt} = 0''.17926 - 0''.0005320786\ t,$$

$$\frac{dl_1}{dt}\cos\varepsilon_1 = 46''.20749 - 0''.0002234338\ t,$$

womit sich die folgenden für $1750 + t$ giltigen Werthe von m und n ergeben:

$$\left.\begin{aligned} m &= 46''.02823 + 0''.0003086448\ t\\ n &= 20''.06442 - 0''.0000970204\ t.\end{aligned}\right\} \tag{103}$$

Aus der Anwesenheit des zweiten von t abhängigen Gliedes ersieht man, dass die Werthe der Grössen m und n, somit auch die jährliche Präcession der Sterne einer übrigens sehr langsamen Veränderung unterliegen. Eben so erkennt man aus (102), dass die Präcession in Rectascension für die meisten Sterne positiv ist und nur für solche negativ wird, für welche $20''.\sin\alpha\operatorname{tg}\delta$ negativ und grösser als $46''$ sich ergibt. Die Präcession in Declination ist positiv im 1^{ten} und 4^{ten} Quadranten der Rectascension, negativ im 2^{ten} und 3^{ten}.

Ist nun für irgend einen Stern die Rectascension und Declination (α, δ) für die Zeit $1750 + T$ gegeben und man sucht den Ort (α', δ') für die Zeit $1750 + T'$, so berechne man die jährliche Präcession für die Mitte der beiden Zeiten: $1750 + \frac{1}{2}(T + T') = 1750 + t$, multiplicire dieselbe mit der Zwischenzeit $T' - T$, und lege die Producte zu α und δ hinzu. Da man jedoch, um nach (102) die Präcession für die Mitte der Zeiten berechnen zu können, die für diese Zeit geltenden Werthe von α und δ benöthigt, so wird man zunächst die Werthe von m und n für $t = \frac{1}{2}(T + T')$ berechnen, und indem man in (102) für α und δ zunächst die gegebenen Werthe setzt, genäherte Werthe von $\frac{d\alpha}{dt}$ und $\frac{d\delta}{dt}$ erhalten; dann sind

$$\alpha + \frac{d\alpha}{dt}\,\frac{T' - T}{2} \quad \text{und} \quad \delta + \frac{d\delta}{dt}\,\frac{T' - T}{2}$$

hinreichend genaue Werthe der Rectascension und Declination für die Mitte der beiden Zeiten, mit welchen die Berechnung von $\frac{d\alpha}{dt}$ und $\frac{d\delta}{dt}$ wiederholt wird. Endlich ist:

$$\alpha' = \alpha + \frac{d\alpha}{dt}(T' - T), \quad \delta' = \delta + \frac{d\delta}{dt}(T' - T).$$

Beispiel. Die Rectascension und Declination des Sternes α Virginis war zu Anfang des Jahres 1800:

$$\alpha = 198^0\ 40'\ 7''.58\,, \quad \delta = -10^0\ 6'\ 46''.84\,;$$

man suche den Ort für 1870.

Das Mittel beider Zeiten ist 1835; also $t = 85$, womit man aus (103) erhält:

$$m = 46''.0545\,, \quad n = 20''.0562.$$

Hiemit und den gegebenen Werthen von α und δ findet man aus (102) als genäherte Werthe der jährlichen Präcession:

$$\frac{d\alpha}{dt} = +\,47''.20\,, \quad \frac{d\delta}{dt} = -\,19''.00.$$

Diese Werthe, mit der halben Zwischenzeit $= 35$ multiplicirt, geben die Präcession von 1800 bis 1835:

$$\text{in R. A.} + 27'\ 32''\,, \qquad \text{in Decl.} - 11'\ 5''\,,$$

womit als genäherter Ort für 1835 folgt:

$$\alpha = 199^0\ 7'\ 40''\,, \quad \delta = -\,10^0\ 17'\ 52''.$$

Hiemit erhält man aus (102) die genauen Werthe der jährlichen Präcession für 1835:

$$\frac{d\alpha}{dt} = +\,47''.2485, \quad \frac{d\delta}{dt} = -\,18''.9489\,,$$

welche, mit der Zwischenzeit $= 70$ multiplicirt, die Präcession von 1800 bis 1870 geben:

$$\text{in R. A.} + 55'\ 7''.39\,, \qquad \text{in Decl.} - 22'\ 6''.42.$$

Diese Werthe, zu α und δ hinzugefügt, geben den Ort des Sternes für 1870:

$$\alpha' = 199^0\ 35'\ 14''.97, \quad \delta' = -\,10^0\ 28'\ 53''.26.$$

64. In Folge der Präcession dreht sich die Durchschnittslinie des Aequators und der Ekliptik jährlich um ungefähr $50''.2$ in letzterer Ebene und es beschreibt daher der Pol des Aequators um jenen der Ekliptik einen Kreis, dessen Halbmesser der Schiefe der Ekliptik gleich ist. Die Periode, innerhalb welcher ein voller Umlauf vollbracht wird, ist durch die Gleichung

$$50.21129\, t + 0.000122148\, t^2 = 360^0 \times 60 \times 60 = 1296000''$$

gegeben, woraus in runder Zahl $t = 24400$ Jahre folgt. Der Pol des Aequators wird daher im Laufe der Jahrhunderte die scheinbare Himmelskugel in verschiedenen Puncten treffen, und in die Nähe anderer Sterne zu liegen kommen. Gegenwärtig ist der letzte Stern im Schwanze des kleinen Bären Polarstern und vom Pole etwa $1\frac{1}{2}$ Grade entfernt, welchem er sich fortan noch nähert, bis die Rectascension (gegenwärtig $= 18^0$) $= 90^0$ geworden ist, von welchem Zeitpuncte er sich wieder vom Pole entfernt. Um das Jahr 14000 wird der helle Stern Vega in der Leyer etwa 5^0 vom Pole abstehen und die Rolle des Polarsternes spielen.

Eine andere Wirkung der Präcession ist der Unterschied zwischen dem siderischen und tropischen Jahr und die Veränderlichkeit des letzteren.

Man nennt die Zeit, welche die Sonne braucht, um an der scheinbaren Himmelskugel volle 360^0 zu durchlaufen (oder eigentlich die Zeit, welche die Erde braucht, um in ihrer Bahn um die Sonne einen Umlauf von 360^0 zu vollbringen), das siderische Jahr. Die Länge desselben ist constant und

$$= 365.2563582 \text{ mittleren Tagen}$$
$$\text{oder} = 365 \text{ Tagen } 6 \text{ Stunden } 9 \text{ Minuten und } 9.348 \text{ Secunden.}$$

Unter tropischem Jahr versteht man die Zeit, welche die Sonne braucht, um vom Frühlingspunct ausgehend, wieder zu demselben zurückzukehren. Da nun der Frühlingspunct jährlich um den Betrag der allgemeinen Präcession $=\frac{dl}{dt}$ [Gl. (94*)], welche der Kürze wegen mit p bezeichnet werden mag, auf der Ekliptik zurück-, also der Sonne entgegengeht, so muss das tropische Jahr kürzer sein als das siderische, und zwar um die Zeit, welche die Sonne braucht, um den kleinen Bogen p von etwa $50''.2$ zurückzulegen. Sei also diese Zeit $=\tau$, T das tropische, S das siderische Jahr, alles in mittleren Tagen, so ist

$$S = T + \tau;$$

da die Sonne die Zeit T braucht, um den Bogen $360^0 - p$ zu durchlaufen, so ist $360^0 - p : T = p : \tau$; setzt man den hieraus folgenden Werth von τ in obige Gleichung, so kommt:

$$T = S\left(1 - \frac{p}{360^0}\right).$$

Es ist aber für das Jahr $\mathfrak{T} = 1750 + t$, nach Gl. (94*):

$$p = 50''.21129 + 0''.0002442966\,(\mathfrak{T} - 1750),$$

oder, auf die Epoche 1800 reducirt:

$$p = 50''.22350 + 0''.0002442966\,(\mathfrak{T} - 1800).$$

Substituirt man diesen Werth, nachdem die Coefficienten in Graden ausgedrückt sind, nebst jenem von S in obige Gleichung, so kommt für die Länge des der Jahreszahl $\mathfrak{T}$ entsprechenden tropischen Jahres:

$$T = 365 \text{ Tage } 5^h\, 48^m\, 46^s.38 - 0^s.00595\,(\mathfrak{T} - 1800).$$

Die Länge des tropischen Jahres nimmt also in 100 Jahren um nahe 0.6 Secunden ab.

Die Nutation.

65. Die Lunisolar-Präcession enthält nur die der Zeit proportionalen Glieder in der Bewegung des Aequators auf der festen Ekliptik. Die Theorie lehrt aber, dass der vollständige Ausdruck dieser durch die Anziehung der Sonne und des Mondes bewirkten Bewegung ausser jenen Gliedern noch andere