

die genäherten Werthe genügen. Auch kann man in solchem Falle die Berechnung des vergrösserten Halbmessers umgehen, indem man die Parallaxe nach Gl. (77) unmittelbar für den beobachteten Mondrand sucht; durch Anbringung derselben an die beobachtete von der Refraction befreite Zenithdistanz ergibt sich die geocentrische Zenithdistanz des beobachteten Mondrandes, zu welcher nur noch der geocentrische Halbmesser mit seinem Zeichen hinzuzulegen kommt. Nach diesem Verfahren ist die Rechnung folgende:

Beobachtete Zenithdistanz	$Z = 63^{\circ} 8' 15'' .71$
Refraction	$r = + 1 57 .22$
Scheinbare, von der Refraction befreite Zenithdistanz des untern Mondrandes	$63^{\circ} 10' 12'' .93$
Parallaxe [nach Gl. (77)]	$- 54 38 .07$
Geocentrischer Halbmesser	$- 16 46 .1$
Geocentrische Zenithdistanz	$61^{\circ} 58' 48'' .76$

Der Unterschied gegen den oben erhaltenen Werth beträgt $0'' .17$ und rührt davon her, dass bei letzterem Verfahren die offenbar nicht ganz richtige Annahme gemacht wird, als wäre die Horizontalparallaxe für den Mondrand dieselbe als für den Mittelpunkt; der hieraus hervorgehende Fehler kann jedoch $0'' .2$ nicht überschreiten.

3) Im Falle die Zenithdistanz der Sonne oder eines Planeten beobachtet wurde, bleibt das Verfahren dasselbe wie beim Monde, nur vereinfacht durch den Umstand, dass für diese Gestirne die Vergrößerung des Halbmessers als verschwindend klein hinwegfällt. Die Berechnung der Parallaxe geschieht immer genügend genau nach Gl. (80).

FÜNFTES CAPITEL.

VON DEN ÄNDERUNGEN DER ÖRTER DER GESTIRNE AN DER SCHEINBAREN HIMMELSKUGEL, WELCHE AUS DEN ÄNDERUNGEN DER LAGE DER COORDINATEN-EBENEN, UND AUS DER JÄHRLICHEN BEWEGUNG DER ERDE ENTSPRINGEN.

58. Die Oerter der Gestirne an der scheinbaren Himmelskugel werden bekanntlich durch sphärische Coordinaten bestimmt, welche sich auf eine der beiden Grundebenen des Aequators oder der Ekliptik beziehen, und es bildet der eine der beiden Durchschnittspuncte dieser zwei grössten Kreise (der Frühlingspunct) in beiden Systemen den gemeinschaftlichen Ursprung je einer Coordinate, nämlich der Rectascension in dem einen, der Länge in dem andern Systeme. Die Lage dieser beiden Grundebenen im Raume ist aber keine unveränderliche; sowohl die Ebene des Aequators als der Ekliptik sind vielmehr in zwar sehr langsamen doch fortwährenden Bewegungen begriffen, in Folge welcher sich sowohl die gegenseitige Neigung beider Ebenen als auch die Richtung ihrer Durchschnittslinie, also der Ort des Frühlingspunctes am Himmel, beständig verändern. Die Längen und Breiten der Sterne, so wie

ihre Rectascensionen und Declinationen, sind daher fortwährenden Veränderungen unterworfen, welche nicht von einer den Himmelskörpern eigenthümlichen Aenderung ihres Ortes im Raume, sondern von den Aenderungen in der Lage der Fundamentebenen herrühren, auf welche wir ihre Oerter beziehen, und es ist von grösster Wichtigkeit, diese Veränderungen kennen zu lernen.

Der leichteren Uebersicht wegen unterscheidet man diese Veränderungen (so wie überhaupt Aenderungen astronomischer Grössen und Elemente) in säculäre und periodische.

Unter säculären Aenderungen versteht man jene sehr langsamen Aenderungen, welche durch längere Zeiträume, oft selbst durch Jahrhunderte in demselben Sinne und nahe der Zeit proportional vor sich gehen; periodische hingegen heissen solche verhältnissmässig raschere Aenderungen, welche in kürzeren Zeiträumen (Perioden), zwischen gewissen Grenzen um einen mittleren Werth gleichsam oscillirend, sich vollziehen, und daher nicht der Zeit proportional betrachtet werden können, ausgenommen für sehr kurze Zeitintervalle.

Man fasst nun denjenigen Theil der Bewegungen des Aequators und der Ekliptik, so wie der dadurch bewirkten Aenderungen der Coordinaten der Gestirne, welcher säcularer Natur ist, unter der Bezeichnung Präcession zusammen, während der periodische Theil derselben den Namen Nutation führt.

Ausser diesen durch eine Bewegung der Fundamentebenen bewirkten Veränderungen der Oerter der Gestirne an der scheinbaren Himmelskugel, kommen noch jene in Betracht, welche aus der Bewegung der Erde um die Sonne entspringen. Da nämlich die Geschwindigkeit der Erde in ihrer jährlichen Bahn um die Sonne zur Geschwindigkeit des Lichtes ein angebbares Verhältniss hat, so erscheinen die Sterne von der sich bewegenden Erde aus nicht in jener Richtung, in welcher sie sich wirklich befinden, sondern um einen kleinen Winkel nach derjenigen Richtung vorgerückt, nach welcher sich die Erde bewegt. Die hiedurch bewirkte Ortsveränderung der Gestirne heisst die Aberration.

In Folge der jährlichen Bewegung der Erde um die Sonne in einer Bahn, deren mittlerer Halbmesser etwa 20 Mill. geographischer Meilen beträgt, ändert endlich die Erde, also der Standpunct, von welchem aus wir die Sterne betrachten, im Laufe eines Jahres sehr beträchtlich seinen Ort im Raume; ist nun diese Ortsveränderung nicht verschwindend klein gegen die Entfernung der Fixsterne, so wird hieraus eine Aenderung der Richtungen entstehen, in welchen wir die Fixsterne zu verschiedenen Zeiten des Jahres erblicken, welche man die jährliche Parallaxe der Fixsterne nennt. Bei der ungeheuren Entfernung der Fixsterne ist es aber bis jetzt nur bei einigen derselben gelungen, eine jährliche Parallaxe von merklicher Grösse nachzuweisen; im Allgemeinen ist dieselbe verschwindend.

Die Präcession.

59. Um die Lage der Ekliptik und des Aequators zu jeder Zeit angeben zu können, bezieht man dieselben auf eine feste Ebene, wofür man die Ebene der Ekliptik zu einer bestimmten Epoche, z. B. zu Anfang des Jahres 1750, annimmt; man nennt diese die feste Ekliptik.

Die physische Astronomie lehrt nun, dass durch die Wirkung der Anziehung der Sonne und des Mondes auf die sphäroidische Erde, in Verbindung mit der Rotation derselben um ihre Axe, eine Bewegung der Ebene des Aequators erzeugt wird, in der Art, dass, während hiedurch die Neigung desselben gegen die feste Ekliptik nicht geändert wird, die Durchschnittslinie beider Ebenen, oder die Aequinoctiallinie sich langsam in der Ebene der festen Ekliptik dreht, und zwar in einer Richtung, entgegengesetzt derjenigen, in welcher die Längen gezählt werden, oder mit anderen Worten, dass die Aequinoctialpunkte sich auf der festen Ekliptik rückwärts bewegen. Die Folge dieser Bewegung ist offenbar eine allen Sternen gemeinschaftliche jährliche Zunahme der Länge derselben, auf der festen Ekliptik gezählt, welche die Lunisolar-Präcession genannt wird. Durch die Lunisolar-Präcession werden also die Breiten der Sterne nicht geändert, sondern nur ihre Längen; in Folge dessen ändern sich aber sowohl die Rectascensionen als Declinationen.

Die Bahnen der Planeten sind gegen die Ebene der Erdbahn mehr oder weniger geneigt und es befinden sich daher diese Himmelskörper im Allgemeinen ausserhalb der Ebene der Erdbahn. Die zwischen denselben und der Erde bestehende gegenseitige Anziehung strebt nun beständig die Erde aus der Ebene zu ziehen, in welcher sie sich um die Sonne bewegt, wodurch eben diese Ebene der Erdbahn oder der Ekliptik ihre Lage gegen die feste Ekliptik allmählig ändert. Die Lage des Aequators wird hiedurch nicht afficirt und die Wirkung der in Rede stehenden Bewegung der Ebene der Ekliptik ist eine kleine Drehung der Aequinoctiallinie in der Ebene des Aequators in jener Richtung, in welcher die Rectascensionen gezählt werden. Hiedurch entsteht eine allen Sternen gemeinschaftliche jährliche Abnahme der Rectascension, welche die Präcession durch die Planeten genannt wird. Sie lässt offenbar die Declinationen der Sterne unverändert, ändert aber mit den Rectascensionen ihre Längen und Breiten.

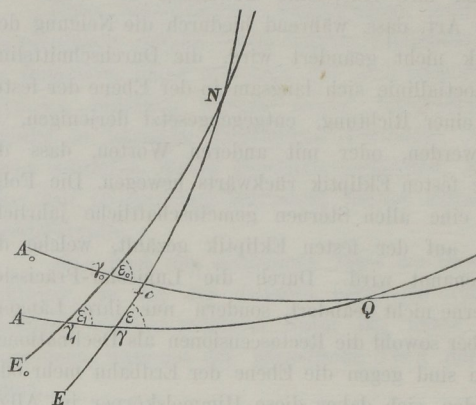
In Folge der eben erwähnten durch die Planeten bewirkten Bewegung der Ebene der Ekliptik entsteht nun auch eine Aenderung der Neigung derselben gegen den Aequator, d. i. der Schiefe der Ekliptik, welche die Sæcularänderung der Schiefe genannt wird.

Wie schon oben bemerkt wurde, hat die Anziehung der Sonne und des Mondes auf die sphäroidische Erde, welche in Verbindung mit der Axendrehung derselben die Lunisolar-Präcession erzeugt, eine Aenderung der Schiefe der Ekliptik nicht zur unmittelbaren Folge; durch die erwähnte Einwirkung

der Planeten ändern aber die Ebenen der Erdbahn sowohl als der Mondbahn ihre Lage gegen den Aequator, und hieraus entsteht eine Aenderung der anziehenden Kraft der Sonne und des Mondes auf die Erde, deren Folge eine sehr kleine Aenderung in der Neigung des Aequators gegen die feste Ekliptik ist.

60. Es sei nun (Fig. 17) E_0N die feste Ekliptik, A_0Q der Aequator, γ_0 der Frühlingspunkt für den Anfang des Jahres 1750; EN die Ekliptik,

Fig. 17.



AQ der Aequator, γ der Frühlingspunkt zur Zeit $1750+t$; γ_1 der Durchschnittspunkt des Aequators zur Zeit $1750+t$ mit der festen Ekliptik. Die Längen werden in der Richtung γN , die Rectascensionen in der Richtung γQ gezählt.

Ohne die Einwirkung der Planeten würde die Ekliptik ihre Lage nicht geändert haben und somit bloß der Frühlingspunkt auf der festen Ekliptik von γ_0

nach γ_1 zurückgewichen sein; es ist daher $\gamma_0\gamma_1 = l_1$ der Betrag der Lunisolar-Präzession in t Jahren, von 1750 an gezählt.

Allein da in Folge der Wirkung der Planeten auch die Ekliptik ihre Lage geändert und nach EN gekommen ist, so hat sich auch der Frühlingspunkt auf dem Aequator von γ_1 nach γ bewegt, und es ist $\gamma_1\gamma = a$ die Präzession durch die Planeten in t Jahren, von 1750 an gezählt.

Hiebei hat sich nun auch die Neigung beider Ebenen, d. i. die Schiefe der Ekliptik geändert. Zur Zeit der Epoche 1750 war dieselbe $\epsilon_0 = \angle N\gamma_0Q$; nach t Jahren wird diese Schiefe in Beziehung auf die feste Ekliptik $= \epsilon_1 = \angle N\gamma_1Q$, und in Beziehung auf die wahre Ekliptik $= \epsilon = \angle N\gamma Q$ sein.

Nach Bessel ist nun für die Epoche 1750:

$$\begin{aligned} l_1 &= 50''.37572 t - 0''.0001217945 t^2, \\ a &= 0''.17926 t - 0''.0002660393 t^2, \\ \epsilon_0 &= 23^\circ 28' 18''.0, \\ \epsilon_1 &= \epsilon_0 + 0''.0000098423 t^2, \\ \epsilon &= \epsilon_0 - 0''.48368 t - 0''.00000272295 t^2, \end{aligned} \tag{93}$$

wo t die nach 1750 verflossene Anzahl von Jahren bedeutet.

Ist c der Punkt der beweglichen Ekliptik, in welchem dieselbe im Jahre 1750, wo sie mit der festen Ekliptik zusammenfiel, vom Aequator geschnitten

wurde (d. i. der Punct γ_0), so ist offenbar γc der Bogen, um welchen die Längen aller Sterne in t Jahren seit 1750 zugenommen haben; dieser Bogen $\gamma c = \gamma N - \gamma_0 N = l$ wird die allgemeine Präcession genannt.

61. Die in (93) angegebenen Werthe genügen, um sowohl die allgemeine Präcession, als auch die Lage der beweglichen oder wahren Ekliptik gegen die feste für irgend eine gegebene Zeit zu finden. Letztere ist offenbar bestimmt, wenn man die Entfernung $\gamma_0 N$ (Fig. 17) des Durchschnittspunctes der beweglichen und festen Ekliptik vom festen Aequinoctium γ_0 , so wie den Neigungswinkel beider Ebenen $= \gamma_0 N \gamma$ kennt. Sei $\gamma_0 N = \Pi$, $\angle \gamma_0 N \gamma = \pi$, so hat man in dem Dreiecke $N \gamma \gamma_1$:

$$N \gamma_1 = \Pi + l_1, \quad N \gamma = N c + c \gamma = N \gamma_0 + c \gamma = \Pi + l, \quad \gamma \gamma_1 = a, \\ \angle N \gamma \gamma_1 = 180^\circ - \varepsilon, \quad \angle N \gamma_1 \gamma = \varepsilon_1, \quad \angle \gamma_1 N \gamma = \pi,$$

und folglich zufolge der Gauss'schen Analogien:

$$\begin{aligned} \cos \frac{1}{2} \pi \sin \frac{1}{2} (l_1 - l) &= \sin \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} (\varepsilon + \varepsilon_1), \\ \cos \frac{1}{2} \pi \cos \frac{1}{2} (l_1 - l) &= \cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} (\varepsilon - \varepsilon_1), \\ \sin \frac{1}{2} \pi \sin [\Pi + \frac{1}{2} (l_1 + l)] &= \sin \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2} (\varepsilon + \varepsilon_1), \\ \sin \frac{1}{2} \pi \cos [\Pi + \frac{1}{2} (l_1 + l)] &= \cos \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2} (\varepsilon - \varepsilon_1). \end{aligned} \quad (a)$$

1. Durch Division der beiden ersten Gleichungen erhält man:

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} (l_1 - l) = \operatorname{tg} \frac{1}{2} a \frac{\cos \frac{1}{2} (\varepsilon + \varepsilon_1)}{\cos \frac{1}{2} (\varepsilon - \varepsilon_1)}.$$

Nun ist $\frac{1}{2} (\varepsilon - \varepsilon_1)$ ein sehr kleiner Bogen, dessen Cosinus $= 1$ gesetzt werden kann, und, wie aus der Form der Gleichung erhellt, $l_1 - l$ eine Grösse von der Ordnung der sehr kleinen Grösse a , so dass die Tangenten mit den Bögen vertauscht werden können; man hat daher:

$$l_1 - l = a \cos \frac{1}{2} (\varepsilon + \varepsilon_1).$$

Es ist aber:

$$\frac{1}{2} (\varepsilon + \varepsilon_1) = \varepsilon_0 - 0''.24184 t + 0''.000003559675 t^2 = \varepsilon_0 - \xi,$$

wenn wir der Kürze wegen:

$$\xi = 0''.24184 t - 0''.000003559675 t^2$$

setzen. Hiemit wird:

$$l_1 - l = a \cos (\varepsilon_0 - \xi),$$

oder mit Vernachlässigung der höheren Potenzen der kleinen Grösse ξ :

$$l_1 - l = a \cos \varepsilon_0 + a \xi \sin \varepsilon_0 \sin 1''.$$

Substituirt man in diesen Ausdruck die Werthe von l_1 , ε_0 , a und ξ , so erhält man ohne Schwierigkeit für die allgemeine Präcession von 1750 bis $1750 + t$:

$$l = 50''.21129 t + 0''.0001221483 t^2. \quad (94)$$

Differenzirt man diesen Ausdruck nach t , so erhält man, da der Zeit t das

Jahr als Einheit zu Grunde liegt, für die jährliche allgemeine Präcession zur Zeit $1750+t$:

$$\frac{dl}{dt} = 50''.21129 + 0''.0002442966 t. \quad (94^*)$$

So ist für das Jahr 1870, $t=120$, somit $\frac{dl}{dt} = 50''.2406$.

2. Die zwei letzten der Gleichungen (a) kann man, die Sinus der sehr kleinen Grössen a , π und $\frac{1}{2}(\varepsilon - \varepsilon_1)$ mit den Bögen vertauschend, folgendermassen schreiben:

$$\pi \sin \left[\Pi + \frac{1}{2}(l_1 + l) \right] = a \sin \frac{1}{2}(\varepsilon + \varepsilon_1)$$

$$\pi \cos \left[\Pi + \frac{1}{2}(l_1 + l) \right] = \varepsilon - \varepsilon_1;$$

erhebt man diese Gleichungen zum Quadrate, addirt sie und setzt wieder, wie oben, $\frac{1}{2}(\varepsilon + \varepsilon_1) = \varepsilon_0 - \xi$, so kommt:

$$\pi^2 = a^2 \sin^2(\varepsilon_0 - \xi) + (\varepsilon - \varepsilon_1)^2,$$

oder mit Vernachlässigung der höheren Potenzen von ξ :

$$\pi^2 = a^2 \sin^2 \varepsilon_0 + (\varepsilon - \varepsilon_1)^2 - a^2 \xi \sin 2 \varepsilon_0 \sin 1''.$$

Nun hat man:

$$\varepsilon - \varepsilon_1 = -0''.48368 t - 0''.00001256525 t^2,$$

daher:

$$(\varepsilon - \varepsilon_1)^2 = 0.233946 t^2 + 0.0000121551 t^3,$$

ferner:

$$a^2 = 0.032134 t^2 - 0.0000953805 t^3,$$

$$a^2 \xi = 0.0077713 t^3;$$

multiplicirt man nun die zwei letzten Grössen noch mit $\sin^2 \varepsilon_0$ und beziehungsweise $\sin 2 \varepsilon_0 \sin 1''$, so erhält man:

$$\pi^2 = 0.239044 t^2 - 0.0000030034 t^3,$$

und hieraus:

$$\pi = 0''.48892 t - 0''.0000030715 t^2. \quad (95)$$

3. Durch Division der zwei letzten der Gln. (a) ergibt sich endlich:

$$\operatorname{tg} \left[\Pi + \frac{1}{2}(l_1 + l) \right] = \frac{a}{\varepsilon - \varepsilon_1} \sin(\varepsilon_0 - \xi).$$

Man erhält nun leicht:

$$\begin{aligned} \frac{a}{\varepsilon - \varepsilon_1} &= \frac{0.17926 t - 0.0002660393 t^2}{0.48368 t + 0.00001256525 t^2} \\ &= -0.370617 + 0.000559660 t = p + q t; \end{aligned}$$

ferner ist $\sin(\varepsilon_0 - \xi) = \sin \varepsilon_0 - \xi \sin 1'' \cos \varepsilon_0$; bleibt man nun in der Entwicklung bei der 1^{ten} Potenz von t stehen, so hat man $\xi = 0.24184 t = mt$, somit $\sin(\varepsilon_0 - \xi) = \sin \varepsilon_0 - mt \sin 1'' \cos \varepsilon_0$; multiplicirt man diesen Ausdruck

mit dem vorhergehenden Ausdrücke von $\frac{a}{\varepsilon - \varepsilon_1}$, so erhält man:

$$\operatorname{tg} [\Pi + \frac{1}{2}(l_1 + l)] = p \sin \varepsilon_0 + (q \sin \varepsilon_0 - mp \sin 1'' \cos \varepsilon_0) t,$$

und durch Substitution der Zahlenwerthe von ε_0 , m , p und q :

$$\operatorname{tg} [\Pi + \frac{1}{2}(l_1 + l)] = -0.147615 + 0.0002233081 t.$$

Setzen wir nun:

$$-0.147615 = \operatorname{tg} \Pi_0, \text{ und } \Pi = \Pi_0 + \Delta\Pi,$$

so wird

$$\Pi_0 = 171^\circ 36' 10'',$$

und

$$\operatorname{tg} [\Pi_0 + \Delta\Pi + \frac{1}{2}(l_1 + l)] = \operatorname{tg} \Pi_0 + s t,$$

wenn wir den Coefficienten von t der Kürze wegen mit s bezeichnen. Nun ist der in der Klammer auf Π_0 folgende Bogen $\Delta\Pi + \frac{1}{2}(l_1 + l)$ sehr klein; man kann daher $\operatorname{tg} [\Pi_0 + \Delta\Pi + \frac{1}{2}(l_1 + l)]$ nach dem Taylor'schen Satze entwickeln und erhält, bei dem 2^{ten} Gliede stehen bleibend:

$$\operatorname{tg} \Pi_0 + \frac{\Delta\Pi + \frac{1}{2}(l_1 + l)}{\cos \Pi_0^2} = \operatorname{tg} \Pi_0 + s t,$$

und hieraus in Bogensekunden:

$$\Delta\Pi = \frac{s \cos \Pi_0^2 \cdot t}{\sin 1''} - \frac{1}{2}(l_1 + l).$$

Setzt man hier für s , Π_0 und $\frac{1}{2}(l_1 + l)$ die numerischen Werthe ein, so kommt $\Delta\Pi = -5''.215$, und hiemit:

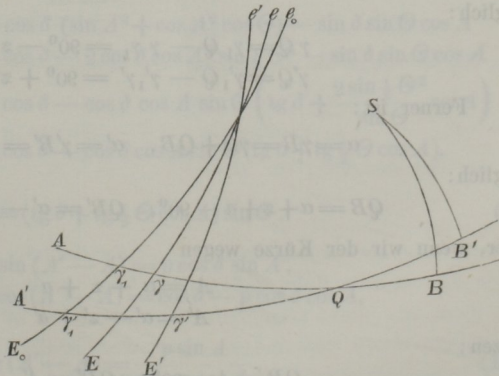
$$\Pi = 171^\circ 36' 10'' - 5''.215 t. \quad (96)$$

62. Das Vorhergehende setzt uns nun in den Stand, die Veränderungen zu berechnen, welche die Längen und Breiten, so wie die Rectascensionen und Declinationen der Sterne in Folge der Präcession erleiden. Wir beschränken uns hier auf die Auflösung der folgenden Aufgabe:

Es ist die Rectascension und Declination (α, δ) eines Sternes für die Zeit $1750 + t$ gegeben; man soll die Rectascension und Declination (α', δ') des Sternes für die Zeit $1750 + t'$ finden.

Fig. 18.

Es sei (Fig. 18) $E_0 e_0$ die feste Ekliptik für 1750; Ee und AQ beziehungsweise Ekliptik und Aequator für $1750 + t$; $E'e'$ und $A'Q$ Ekliptik und Aequator für $1750 + t'$. S der Stern, SB und SB' die entsprechenden Declinationen



nationskreise für die beiden Lagen des Aequators. Bestimmen wir zunächst die Lage des Durchschnittspunctes Q .

Da $\gamma_1\gamma'_1$ die Lunisolar-Präcession in der Zeit $t' - t$ ist, so ist, wenn wir die auf die Epoche 1750 + t' sich beziehenden Grössen ε_1 und l_1 mit ε'_1 und l'_1 bezeichnen, im Dreiecke $\gamma_1 Q \gamma'_1$:

$$\gamma_1\gamma'_1 = l'_1 - l_1, \quad \angle \gamma'_1\gamma_1 Q = 180^\circ - \varepsilon_1, \quad \angle \gamma_1\gamma'_1 Q = \varepsilon'_1;$$

setzt man nun:

$$\gamma_1 Q = 90^\circ - z, \quad \gamma'_1 Q = 90^\circ + z', \quad \angle \gamma_1 Q \gamma'_1 = \Theta,$$

so hat man aus diesem Dreiecke zufolge der Gauss'schen Analogien:

$$\begin{aligned} \cos \frac{1}{2} \Theta \sin \frac{1}{2} (z' + z) &= \sin \frac{1}{2} (l'_1 - l_1) \cos \frac{1}{2} (\varepsilon'_1 + \varepsilon_1), \\ \cos \frac{1}{2} \Theta \cos \frac{1}{2} (z' + z) &= \cos \frac{1}{2} (l'_1 - l_1) \cos \frac{1}{2} (\varepsilon'_1 - \varepsilon_1), \\ \sin \frac{1}{2} \Theta \sin \frac{1}{2} (z' - z) &= \cos \frac{1}{2} (l'_1 - l_1) \sin \frac{1}{2} (\varepsilon'_1 - \varepsilon_1), \\ \sin \frac{1}{2} \Theta \cos \frac{1}{2} (z' - z) &= \sin \frac{1}{2} (l'_1 - l_1) \sin \frac{1}{2} (\varepsilon'_1 + \varepsilon_1). \end{aligned}$$

Nun ist $\frac{1}{2} (\varepsilon'_1 - \varepsilon_1)$ so klein, dass der Cosinus immer $= 1$, und der Bogen statt des Sinus gesetzt werden kann; dasselbe gilt auch von dem Bogen $\frac{1}{2} (z' - z)$; man erhält daher aus diesen Gleichungen die folgenden:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{1}{2} (z' + z) &= \operatorname{tg} \frac{1}{2} (l'_1 - l_1) \cos \frac{1}{2} (\varepsilon'_1 + \varepsilon_1), \\ \frac{1}{2} (z' - z) &= \frac{\frac{1}{2} (\varepsilon'_1 - \varepsilon_1)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} (l'_1 - l_1) \sin \frac{1}{2} (\varepsilon'_1 + \varepsilon_1)}, \\ \sin \frac{1}{2} \Theta &= \sin \frac{1}{2} (l'_1 - l_1) \sin \frac{1}{2} (\varepsilon'_1 + \varepsilon_1), \end{aligned} \quad (97)$$

von welchen die 1^{te} aus der Division der zwei ersten, die 2^{te} aus der Division der zwei letzten, und die 3^{te} aus der letzten der obigen Gleichungen hervorgeht. Mittelst der Gln. (97) findet man z, z' und Θ , womit die Lage des Punctes Q bestimmt ist.

Nun ist in Fig. 18 γ das Aequinoctium für 1750 + t , γ' jenes für 1750 + t' , folglich $\gamma_1\gamma = a$ die Präcession durch die Planeten von 1750 bis 1750 + t , und $\gamma'_1\gamma' = a'$ die Präcession durch die Planeten von 1750 bis 1750 + t' ; folglich:

$$\begin{aligned} \gamma Q &= \gamma_1 Q - \gamma \gamma_1 = 90^\circ - z - a, \\ \gamma' Q &= \gamma'_1 Q - \gamma'_1 \gamma' = 90^\circ + z' - a'. \end{aligned}$$

Ferner ist:

$$\alpha = \gamma B = \gamma Q + QB, \quad \alpha' = \gamma' B' = \gamma' Q + QB',$$

folglich:

$$QB = \alpha + z + a - 90^\circ, \quad QB' = \alpha' - z' + a' - 90^\circ,$$

oder, wenn wir der Kürze wegen

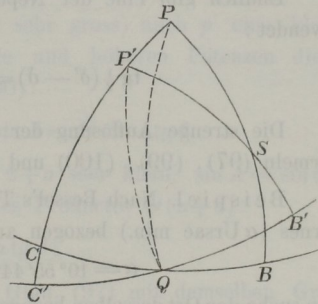
$$\begin{aligned} A &= \alpha + z + a \\ A' &= \alpha' - z' + a' \end{aligned}$$

setzen:

$$QB = A - 90^\circ, \quad QB' = A' - 90^\circ.$$

Es seien nun in Fig. 19 P und P' die Pole des Aequators zur Zeit $1750+t$ und $1750+t'$; legen wir durch dieselben den grössten Kreis $PP'CC'$, so ist Q dessen Pol, somit $\text{arc. } PP' = \text{arc. } CC' = \angle CQC' = \Theta$, ferner $\angle CPQ = \angle PP'Q = 90^\circ$. Man hat daher im Dreiecke SPP' :

Fig. 19.



$$\begin{aligned} PS &= 90^\circ - \delta, \quad P'S = 90^\circ - \delta', \quad PP' = \Theta, \\ \angle PPS &= 90^\circ + QB = A, \\ \angle P'PS &= 90^\circ - QB' = 180^\circ - A', \end{aligned}$$

und somit nach den Grundformeln der sphärischen Trigonometrie:

$$\begin{aligned} \cos \delta' \sin A' &= \cos \delta \sin A, \\ \cos \delta' \cos A' &= \cos \delta \cos A \cos \Theta - \sin \delta \sin \Theta, \\ \sin \delta' &= \cos \delta \cos A \sin \Theta + \sin \delta \cos \Theta. \end{aligned} \quad (98)$$

Mittelst dieser Formeln findet man nun, da A , δ und Θ bekannt sind, A' und δ' , und endlich $\alpha' = A' + z' - \alpha$.

Man kann diese Formeln auf bekannte Weise logarithmisch machen, oder daraus andere ableiten, welche die Differenzen $A' - A$ und $\delta' - \delta$ geben und eine bequemere und zugleich schärfere Rechnung gestatten.

Multiplicirt man die 1^{te} der Glgn. (98) mit $\cos A$, die 2^{te} mit $\sin A$, und subtrahirt die Producte, so kommt:

$$\begin{aligned} \cos \delta' \sin (A' - A) &= \cos \delta \sin A \cos A (1 - \cos \Theta) + \sin \delta \sin \Theta \sin A \\ &= \cos \delta \sin A \sin \Theta \left(\frac{1 - \cos \Theta}{\sin \Theta} \cos A + \text{tg } \delta \right) \\ &= \cos \delta \sin A \sin \Theta (\text{tg } \delta + \text{tg } \frac{1}{2} \Theta \cos A). \end{aligned}$$

Multiplicirt man aber die 1^{te} mit $\sin A$, die 2^{te} mit $\cos A$ und addirt die Producte, so kommt:

$$\begin{aligned} \cos \delta' \cos (A' - A) &= \cos \delta (\sin A^2 + \cos A^2 \cos \Theta) - \sin \delta \sin \Theta \cos A \\ &= \cos \delta - 2 \cos \delta \cos A^2 \sin \frac{1}{2} \Theta^2 - \sin \delta \sin \Theta \cos A \\ &= \cos \delta - \cos \delta \cos A \sin \Theta \left(\text{tg } \delta + \frac{2 \sin \frac{1}{2} \Theta^2}{\sin \Theta} \cos A \right) \\ &= \cos \delta - \cos \delta \cos A \sin \Theta (\text{tg } \delta + \text{tg } \frac{1}{2} \Theta \cos A). \end{aligned}$$

Setzt man also:

$$p = (\text{tg } \delta + \text{tg } \frac{1}{2} \Theta \cos A) \sin \Theta, \quad (99)$$

so wird:

$$\begin{aligned} \cos \delta' \sin (A' - A) &= p \cos \delta \sin A, \\ \cos \delta' \cos (A' - A) &= \cos \delta - p \cos \delta \cos A, \end{aligned}$$

also:

$$\text{tg } (A' - A) = \frac{p \sin A}{1 - p \cos A}, \quad (100)$$

und:

$$\alpha' - \alpha = A' - A + (z' + z) - (a' - a).$$

Endlich gibt eine der Neper'schen Formeln, auf dasselbe Dreieck angewendet:

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} (\delta' - \delta) = \operatorname{tg} \frac{1}{2} \Theta \frac{\cos \frac{1}{2} (A' + A)}{\cos \frac{1}{2} (A' - A)}. \quad (101)$$

Die strenge Auflösung der Aufgabe ist also auf die Berechnung der Formeln (97), (99), (100) und (101) zurückgeführt.

Beispiel. Nach Bessel's Tabulae Regiomontanae ist der Ort des Polarsternes (α Ursae min.) bezogen auf das Aequinoctium vom J. 1755:

$$\alpha = 10^\circ 55' 44''.955, \quad \delta = 87^\circ 59' 41''.12;$$

man suche den Ort desselben bezogen auf den Aequator und das Aequinoctium 1870.

Man hat nun nach den Ausdrücken (93):

für 1755 ($t=5$)	für 1870 ($t'=120$)
$l_1 = 4^\circ 11''.876$	$l'_1 = 1^\circ 40' 43''.333$
$a = 0''.890$	$a' = 17''.680$
$\varepsilon_1 = 23^\circ 28' 18''.00025,$	$\varepsilon'_1 = 23^\circ 28' 18''.14173.$

Hieraus folgt:

$$\frac{1}{2} (l'_1 - l_1) = 0^\circ 48' 15''.7285,$$

$$\frac{1}{2} (\varepsilon'_1 + \varepsilon_1) = 23^\circ 28' 18''.07,$$

$$\frac{1}{2} (\varepsilon'_1 - \varepsilon_1) = 0''.07074.$$

Hiemit geben die Gln. (97):

$\frac{1}{2} (z' + z) = 0^\circ 44' 16''.153,$	$\frac{1}{2} \Theta = 0^\circ 19' 13''.325$
$\frac{1}{2} (z' - z) = 0 \quad 0 \quad 12 \quad .650,$	$\Theta = 0 \quad 38 \quad 26 \quad .650$
$z = 0 \quad 44 \quad 3 \quad .503$	$A = \alpha + z + a$
$z' = 0 \quad 44 \quad 28 \quad .803$	$= 11^\circ 39' 49''.348.$

Endlich erhält man aus den Gln. (99), (100), (101):

$$\log p = 9.5044086$$

$$A' - A = 5^\circ 22' 9''.624 \quad \frac{1}{2} (\delta' - \delta) = 0^\circ 18' 38''.577$$

Es ist somit die Präcession des Sternes von 1755 bis 1870:

$$\text{in Rectascension: } \alpha' - \alpha = 6^\circ 50' 25''.140$$

$$\text{in Declination: } \delta' - \delta = 0^\circ 37' 17''.15,$$

und der Ort desselben für 1870:

$$\alpha' = 17^\circ 46' 10''.09, \quad \delta' = 88^\circ 36' 58''.27$$

63. Die im vorhergehenden §. entwickelten strengen Formeln werden jedoch nur in dem Falle anzuwenden sein, wenn die Declination des Sternes sehr gross ist. Steht aber der Stern dem Pole nicht sehr nahe, so sind die Differenzen $\alpha' - \alpha$ und $\delta' - \delta$ immer nur kleine Grössen, zu deren Bestimmung Näherungsformeln vollkommen ausreichen.

Man hat für die Präcession in der Zeit $t' - t$ den Ausdruck:

$$\alpha' - \alpha = A' - A + (z' + z) - (a' - a).$$

Nun ist Θ immer, und (wenn δ nicht sehr gross) auch p eine kleine Grösse. Mit Vernachlässigung der Quadrate und höheren Potenzen dieser Grössen erhält man daher aus (99) und (100):

$$p = \Theta \operatorname{tg} \delta, \quad A' - A = p \sin A = \Theta \sin A \operatorname{tg} \delta.$$

Es ist aber $A = \alpha + z + a$, somit, da $z + a$ sehr klein, $\sin A = \sin \alpha + (z + a) \cos \alpha$, folglich mit Vernachlässigung des Productes $\Theta(z + a)$:

$$A' - A = \Theta \sin \alpha \operatorname{tg} \delta;$$

endlich hat man aus der 1^{ten} und 3^{ten} der Glgn. (97) mit demselben Grade der Annäherung:

$$z' + z = (l'_1 - l_1) \cos \varepsilon_1, \quad \Theta = (l'_1 - l_1) \sin \varepsilon_1$$

Mit diesen Werthen wird nun:

$$\alpha' - \alpha = (l'_1 - l_1) \cos \varepsilon_1 - (a' - a) + (l'_1 - l_1) \sin \varepsilon_1 \sin \alpha \operatorname{tg} \delta,$$

wo $\alpha' - \alpha$ die Präcession von $1750 + t$ bis $1750 + t'$ bedeutet; dividirt man diese Gleichung durch die Zwischenzeit $t' - t$, in Jahren ausgedrückt, so hat man:

$$\frac{\alpha' - \alpha}{t' - t} = \frac{l'_1 - l_1}{t' - t} \cos \varepsilon_1 - \frac{a' - a}{t' - t} + \frac{l'_1 - l_1}{t' - t} \sin \varepsilon_1 \sin \alpha \operatorname{tg} \delta,$$

welcher Ausdruck die jährliche Präcession zwischen den Zeiten $1750 + t$ und $1750 + t'$ ausdrückt. Lassen wir nun das Intervall $t' - t$ unendlich klein werden, so gibt die Gleichung:

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{dl_1}{dt} \cos \varepsilon_1 - \frac{da}{dt} + \frac{dl_1}{dt} \sin \varepsilon_1 \sin \alpha \operatorname{tg} \delta$$

die jährliche Präcession in Rectascension für die Zeit $1750 + t$.

Auf dieselbe Weise folgt aus Gl. (101):

$$\delta' - \delta = \Theta \cos A = (l'_1 - l_1) \sin \varepsilon_1 \cos \alpha, \\ \frac{\delta' - \delta}{t' - t} = \frac{l'_1 - l_1}{t' - t} \sin \varepsilon_1 \cos \alpha,$$

somit

$$\frac{d\delta}{dt} = \frac{dl_1}{dt} \sin \varepsilon_1 \cos \alpha$$

als jährliche Präcession in Declination.

Setzen wir also:

$$m = \frac{dl_1}{dt} \cos \varepsilon_1 - \frac{da}{dt}, \quad n = \frac{dl_1}{dt} \sin \varepsilon_1,$$

so erhalten wir für die jährliche Präcession in Rectascension und Declination:

$$\begin{aligned}\frac{d\alpha}{dt} &= m + n \sin \alpha \operatorname{tg} \delta, \\ \frac{d\delta}{dt} &= n \cos \alpha.\end{aligned}\tag{102}$$

Aus den Ausdrücken (93) folgt:

$$\begin{aligned}\frac{dl_1}{dt} &= 50''.37572 - 0''.0002435890 t, \\ \frac{da}{dt} &= 0''.17926 - 0''.0005320786 t, \\ \frac{dl_1}{dt} \cos \varepsilon_1 &= 46''.20749 - 0''.0002234338 t,\end{aligned}$$

womit sich die folgenden für $1750+t$ giltigen Werthe von m und n ergeben:

$$\begin{aligned}m &= 46''.02823 + 0''.0003086448 t \\ n &= 20''.06442 - 0''.0000970204 t.\end{aligned}\tag{103}$$

Aus der Anwesenheit des zweiten von t abhängigen Gliedes ersieht man, dass die Werthe der Grössen m und n , somit auch die jährliche Präcession der Sterne einer übrigens sehr langsamen Veränderung unterliegen. Eben so erkennt man aus (102), dass die Präcession in Rectascension für die meisten Sterne positiv ist und nur für solche negativ wird, für welche $20'' \cdot \sin \alpha \operatorname{tg} \delta$ negativ und grösser als $46''$ sich ergibt. Die Präcession in Declination ist positiv im 1^{ten} und 4^{ten} Quadranten der Rectascension, negativ im 2^{ten} und 3^{ten}.

Ist nun für irgend einen Stern die Rectascension und Declination (α , δ) für die Zeit $1750+T$ gegeben und man sucht den Ort (α' , δ') für die Zeit $1750+T'$, so berechne man die jährliche Präcession für die Mitte der beiden Zeiten: $1750+\frac{1}{2}(T+T')=1750+t$, multiplicire dieselbe mit der Zwischenzeit $T'-T$, und lege die Producte zu α und δ hinzu. Da man jedoch, um nach (102) die Präcession für die Mitte der Zeiten berechnen zu können, die für diese Zeit geltenden Werthe von α und δ benöthigt, so wird man zunächst die Werthe von m und n für $t=\frac{1}{2}(T+T')$ berechnen, und indem man in (102) für α und δ zunächst die gegebenen Werthe setzt, genäherte Werthe von $\frac{d\alpha}{dt}$ und $\frac{d\delta}{dt}$ erhalten; dann sind

$$\alpha + \frac{d\alpha}{dt} \frac{T'-T}{2} \quad \text{und} \quad \delta + \frac{d\delta}{dt} \frac{T'-T}{2}$$

hinreichend genaue Werthe der Rectascension und Declination für die Mitte der beiden Zeiten, mit welchen die Berechnung von $\frac{d\alpha}{dt}$ und $\frac{d\delta}{dt}$ wiederholt wird. Endlich ist:

$$\alpha' = \alpha + \frac{d\alpha}{dt} (T'-T), \quad \delta' = \delta + \frac{d\delta}{dt} (T'-T).$$

Beispiel. Die Rectascension und Declination des Sternes α Virginis war zu Anfang des Jahres 1800:

$$\alpha = 198^{\circ} 40' 7''.58, \quad \delta = -10^{\circ} 6' 46''.84;$$

man suche den Ort für 1870.

Das Mittel beider Zeiten ist 1835; also $t = 85$, womit man aus (103) erhält:

$$m = 46''.0545, \quad n = 20''.0562.$$

Hiemit und den gegebenen Werthen von α und δ findet man aus (102) als genäherte Werthe der jährlichen Präcession:

$$\frac{d\alpha}{dt} = +47''.20, \quad \frac{d\delta}{dt} = -19''.00.$$

Diese Werthe, mit der halben Zwischenzeit $= 35$ multiplicirt, geben die Präcession von 1800 bis 1835:

$$\text{in R. A. } +27' 32'', \quad \text{in Decl. } -11' 5'',$$

womit als genäherter Ort für 1835 folgt:

$$\alpha = 199^{\circ} 7' 40'', \quad \delta = -10^{\circ} 17' 52''.$$

Hiemit erhält man aus (102) die genauen Werthe der jährlichen Präcession für 1835:

$$\frac{d\alpha}{dt} = +47''.2485, \quad \frac{d\delta}{dt} = -18''.9489,$$

welche, mit der Zwischenzeit $= 70$ multiplicirt, die Präcession von 1800 bis 1870 geben:

$$\text{in R. A. } +55' 7''.39, \quad \text{in Decl. } -22' 6''.42.$$

Diese Werthe, zu α und δ hinzugefügt, geben den Ort des Sternes für 1870:

$$\alpha' = 199^{\circ} 35' 14''.97, \quad \delta' = -10^{\circ} 28' 53''.26.$$

64. In Folge der Präcession dreht sich die Durchschnittsline des Aequators und der Ekliptik jährlich um ungefähr $50''.2$ in letzterer Ebene und es beschreibt daher der Pol des Aequators um jenen der Ekliptik einen Kreis, dessen Halbmesser der Schiefe der Ekliptik gleich ist. Die Periode, innerhalb welcher ein voller Umlauf vollbracht wird, ist durch die Gleichung

$$50.21129 t + 0.000122148 t^2 = 360^{\circ} \times 60 \times 60 = 1296000''$$

gegeben, woraus in runder Zahl $t = 24400$ Jahre folgt. Der Pol des Aequators wird daher im Laufe der Jahrhunderte die scheinbare Himmelskugel in verschiedenen Punkten treffen, und in die Nähe anderer Sterne zu liegen kommen. Gegenwärtig ist der letzte Stern im Schwanze des kleinen Bären Polarstern und vom Pole etwa $1\frac{1}{2}$ Grade entfernt, welchem er sich fortan noch nähert, bis die Rectascension (gegenwärtig $= 18^{\circ}$) $= 90^{\circ}$ geworden ist, von welchem Zeitpunkte er sich wieder vom Pole entfernt. Um das Jahr 14000 wird der helle Stern Vega in der Leyer etwa 5° vom Pole abstehen und die Rolle des Polarsternes spielen.

Eine andere Wirkung der Präcession ist der Unterschied zwischen dem siderischen und tropischen Jahr und die Veränderlichkeit des letzteren.

Man nennt die Zeit, welche die Sonne braucht, um an der scheinbaren Himmelskugel volle 360° zu durchlaufen (oder eigentlich die Zeit, welche die Erde braucht, um in ihrer Bahn um die Sonne einen Umlauf von 360° zu vollbringen), das siderische Jahr. Die Länge desselben ist constant und

$$= 365.2563582 \text{ mittleren Tagen}$$

$$\text{oder} = 365 \text{ Tagen } 6 \text{ Stunden } 9 \text{ Minuten und } 9.348 \text{ Sekunden.}$$

Unter tropischem Jahr versteht man die Zeit, welche die Sonne braucht, um vom Frühlingspunct ausgehend, wieder zu demselben zurückzukehren. Da nun der Frühlingspunct jährlich um den Betrag der allgemeinen Präcession $= \frac{dl}{dt}$ [Gl. (94*)], welche der Kürze wegen mit p bezeichnet werden mag, auf der Ekliptik zurück-, also der Sonne entgegengeht, so muss das tropische Jahr kürzer sein als das siderische, und zwar um die Zeit, welche die Sonne braucht, um den kleinen Bogen p von etwa $50''.2$ zurückzulegen. Sei also diese Zeit $= \tau$, T das tropische, S das siderische Jahr, alles in mittleren Tagen, so ist

$$S = T + \tau;$$

da die Sonne die Zeit T braucht, um den Bogen $360^\circ - p$ zu durchlaufen, so ist $360^\circ - p : T = p : \tau$; setzt man den hieraus folgenden Werth von τ in obige Gleichung, so kommt:

$$T = S \left(1 - \frac{p}{360^\circ} \right).$$

Es ist aber für das Jahr $\mathfrak{Z} = 1750 + t$, nach Gl. (94*):

$$p = 50''.21129 + 0''.0002442966 (\mathfrak{Z} - 1750),$$

oder, auf die Epoche 1800 reducirt:

$$p = 50''.22350 + 0''.0002442966 (\mathfrak{Z} - 1800).$$

Substituirt man diesen Werth, nachdem die Coefficienten in Graden ausgedrückt sind, nebst jenem von S in obige Gleichung, so kommt für die Länge des der Jahreszahl \mathfrak{Z} entsprechenden tropischen Jahres:

$$T = 365 \text{ Tage } 5^h 48^m 46^s.38 - 0^s.00595 (\mathfrak{Z} - 1800).$$

Die Länge des tropischen Jahres nimmt also in 100 Jahren um nahe 0.6 Sekunden ab.

Die Nutation.

65. Die Lunisolar-Präcession enthält nur die der Zeit proportionalen Glieder in der Bewegung des Aequators auf der festen Ekliptik. Die Theorie lehrt aber, dass der vollständige Ausdruck dieser durch die Anziehung der Sonne und des Mondes bewirkten Bewegung ausser jenen Gliedern noch andere

periodische enthält, welche von dem Orte der Sonne und des Mondes, vorzüglich aber von der Lage der Knoten der Mondbahn*), d. i. ihrer Länge, abhängen, und dass überdies aus derselben Ursache noch eine von denselben Elementen abhängige periodische Aenderung der Schiefe der Ekliptik entspringt. Diese periodische Aenderung der Lage der Aequinoctialpuncte und der Schiefe bezeichnet man mit dem Namen *Nutation*, weil dieselbe gleichsam in einem Schwanken der Erdaxe um ihre mittlere Richtung besteht, und zwar nennt man die periodische Bewegung der Aequinoctien die *Nutation in Länge* (auch *Gleichung der Aequinoctialpuncte in Länge*), die periodische Aenderung der Schiefe die *Nutation der Schiefe der Ekliptik*. Da, wie schon bemerkt, die *Nutation* vorzüglich von der Länge der Mondknoten abhängt, diese aber in ungefähr 19 Jahren einen vollen Umlauf von 360° machen, so ist auch die Dauer der Periode der *Nutation* nahe 19 Jahre.

Der Frühlings-Tag- und Nachtgleichenpunct, in welchem der Aequator und die Ekliptik zu irgend einer Zeit sich wirklich schneiden, heisst das wahre (auch scheinbare) Frühlings-Aequinoctium zu dieser Zeit; dagegen der von der *Nutation* befreite Durchschnittspunct — in welchem sich also Aequator und Ekliptik bloß in Folge der im vorhergehenden Abschnitte betrachteten Präcession schneiden würden — das mittlere Aequinoctium. Eben so nennt man wahre (oder scheinbare) Schiefe der Ekliptik die in Folge der *Nutation* wirklich stattfindende Neigung des Aequators gegen die Ekliptik, hingegen mittlere Schiefe die von der *Nutation* befreite Neigung.

Bezeichnen wir die *Nutation in Länge* mit $\mathcal{A}\lambda$, die *Nutation der Schiefe* mit $\mathcal{A}\varepsilon$, so ist nach den Untersuchungen von Prof. Peters:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}\lambda &= -17''.2405 \sin \delta \delta + 0''.2073 \sin 2 \delta \delta - 1''.2694 \sin 2 \odot - 0''.2041 \sin 2 \mathbb{C} \\ &\quad + 0''.1279 \sin (\odot - P) - 0''.0213 \sin (\odot + P) + 0''.0677 \sin (\mathbb{C} - P') \\ \mathcal{A}\varepsilon &= +9''.2231 \cos \delta \delta - 0''.0897 \cos 2 \delta \delta + 0''.5510 \cos 2 \odot \\ &\quad + 0''.0886 \cos 2 \mathbb{C} + 0''.0093 \cos (\odot + P), \end{aligned} \quad (104)$$

wo $\delta \delta$ die Länge des aufsteigenden Knotens der Mondbahn,

\odot die wahre Länge der Sonne,

\mathbb{C} die mittlere Länge des Mondes,

P die wahre Länge des Perigeums der Sonne,

P' die wahre Länge des Perigeums des Mondes

*) Die Ebene der Mondbahn ist gegen die Ebene der Ekliptik unter einem Winkel von etwa 5° geneigt; die Puncte, in welchen die Mondbahn die Ebene der Ekliptik schneidet, heissen die Knoten der Mondbahn, und zwar jener der aufsteigende ($\delta \delta$), durch welchen der Mond geht, wenn er von der südlichen Seite der Ekliptik auf die nördliche übergeht, der andere der niedersteigende ($\delta \delta$). Der Winkel, welchen die Knotenlinie in der Richtung des aufsteigenden Knotens mit der Richtung nach dem Frühlingsnachtgleichenpuncte einschliesst, in der Richtung der Längen gezählt, ist die Länge des aufsteigenden Mondknotens.

bezeichnen. Nennt man λ die auf das mittlere Aequinoctium bezogene Länge eines Gestirnes, ε die mittlere Schiefe der Ekliptik, so ist $\lambda + \Delta\lambda$ die von dem wahren Aequinoctium gezählte wahre oder scheinbare Länge, $\varepsilon + \Delta\varepsilon$ die scheinbare Schiefe der Ekliptik.

Die Coefficienten in den Ausdrücken von $\Delta\lambda$ und $\Delta\varepsilon$ ändern sich ein wenig mit der Zeit und es gelten die obigen Zahlenwerthe für 1800; doch ist die Aenderung nur bei den Coefficienten des ersten Gliedes in jedem Ausdrucke von Bedeutung, deren Zahlenwerthe für das Jahr 1900 beziehungsweise $17''.2577$ und $9''.2240$ sind. Häufig werden, wenn es nicht auf die äusserste Schärfe ankommt, in beiden Ausdrücken nur die drei ersten von den Argumenten: \odot , $2\odot$ und $2\ominus$ abhängigen Glieder mitgenommen und die übrigen vernachlässigt, weil sie theils sehr klein, theils (wie jene von \odot abhängigen) von sehr kurzer Periode sind. Der vom Monde abhängige Theil der Nutation wird die Lunar-Nutation, der von der Sonne abhängige die Solar-Nutation genannt.

66. Da die Anziehung der Sonne und des Mondes auf die Erde die Lage der Ekliptik nicht ändert, sondern nur jene des Aequators und seines Durchschnittspunctes mit der Ekliptik, so hat die Nutation auf die Breiten der Sterne keinen Einfluss, sondern ändert nur die Längen um die Grösse $\Delta\lambda$, und in Folge dessen, so wie der Aenderung der Schiefe, auch die Rectascensionen und Declinationen. Diese Aenderungen sind immer klein, daher Differenzial-Formeln zur Bestimmung derselben hinreichen.

Bezeichnet man mit α , δ die mittlere Rectascension und Declination des Sternes zur gegebenen Zeit, mit α' , δ' die scheinbare oder wahre Rectascension und Declination, und betrachtet diese Coordinaten als Functionen von Länge, Breite und Schiefe der Ekliptik, so ist:

$$\alpha = f(\lambda, \beta, \varepsilon), \quad \alpha' = f(\lambda + \Delta\lambda, \beta, \varepsilon + \Delta\varepsilon),$$

oder, wenn man α' nach dem Taylor'schen Lehrsatz entwickelt und mit Rücksicht auf die Kleinheit von $\Delta\lambda$ und $\Delta\varepsilon$ bei der ersten Potenz dieser Grössen stehen bleibt:

$$\alpha' = f(\lambda, \beta, \varepsilon) + \frac{d\alpha}{d\lambda} \Delta\lambda + \frac{d\alpha}{d\varepsilon} \Delta\varepsilon, \text{ d. i.}$$

$$\alpha' - \alpha = \frac{d\alpha}{d\lambda} \Delta\lambda + \frac{d\alpha}{d\varepsilon} \Delta\varepsilon,$$

ebenso:
$$\delta' - \delta = \frac{d\delta}{d\lambda} \Delta\lambda + \frac{d\delta}{d\varepsilon} \Delta\varepsilon.$$

Durch Differenziation der Gln. (36), §. 19, findet man aber*):

*) Zur Verwandlung von Länge und Breite in Rectascension und Declination hatten wir [§. 19] die Gleichungen (36):

$$\sin \delta = \cos \beta \sin \lambda \sin \varepsilon + \sin \beta \cos \varepsilon \quad (a)$$

$$\cos \delta \cos \alpha = \cos \beta \cos \lambda \quad (b)$$

$$\cos \delta \sin \alpha = \cos \beta \sin \lambda \cos \varepsilon - \sin \beta \sin \varepsilon. \quad (c)$$

$$\frac{d\alpha}{d\lambda} = \cos \varepsilon + \sin \varepsilon \sin \alpha \operatorname{tg} \delta, \quad \frac{d\alpha}{d\varepsilon} = -\cos \alpha \operatorname{tg} \delta,$$

$$\frac{d\delta}{d\lambda} = \sin \varepsilon \cos \alpha, \quad \frac{d\delta}{d\varepsilon} = \sin \alpha;$$

somit ist die Nutation in Rectascension und Declination:

$$\begin{aligned} \alpha' - \alpha &= (\cos \varepsilon + \sin \varepsilon \sin \alpha \operatorname{tg} \delta) \mathcal{A}\lambda - \cos \alpha \operatorname{tg} \delta \mathcal{A}\varepsilon, \\ \delta' - \delta &= \sin \varepsilon \cos \alpha \mathcal{A}\lambda + \sin \alpha \mathcal{A}\varepsilon. \end{aligned} \quad (105)$$

Setzt man in diesen Ausdrücken $\varepsilon = 23^{\circ} 27' 54''$ (die mittlere Schiefe für 1800) und substituirt für $\mathcal{A}\lambda$ und $\mathcal{A}\varepsilon$ die Werthe aus (104), wobei der Kürze halber die von der Mondlänge \mathcal{C} abhängigen Glieder mit Rücksicht auf ihre sehr kurze Periode weggelassen werden mögen, so erhält man:

$$\begin{aligned} \alpha' - \alpha &= -15''.8148 \sin \odot + 0''.1902 \sin 2\odot - 1.1644 \sin 2\ominus \\ &\quad + 0''.1173 \sin (\ominus - P) - 0''.0195 \sin (\ominus + P) \\ &\quad - \left[6''.8650 \sin \odot - 0''.0825 \sin 2\odot + 0''.5055 \sin 2\ominus \right] \sin \alpha \operatorname{tg} \delta \\ &\quad - \left[-0''.0509 \sin (\ominus - P) + 0''.0085 \sin (\ominus + P) \right] \sin \alpha \operatorname{tg} \delta \\ &\quad - \left[9''.2231 \cos \odot - 0''.0897 \cos 2\odot + 0''.5510 \cos 2\ominus \right] \cos \alpha \operatorname{tg} \delta, \\ &\quad + 0''.0093 \cos (\ominus + P) \end{aligned} \quad (106)$$

$$\begin{aligned} \delta' - \delta &= - \left[6''.8650 \sin \odot - 0''.0825 \sin 2\odot + 0''.5055 \sin 2\ominus \right] \cos \alpha \\ &\quad - \left[-0''.0509 \sin (\ominus - P) + 0''.0085 \sin (\ominus + P) \right] \cos \alpha \\ &\quad + \left[9''.2231 \cos \odot - 0''.0897 \cos 2\odot + 0''.5510 \cos 2\ominus \right] \sin \alpha \\ &\quad + 0''.0093 \cos (\ominus + P) \end{aligned}$$

Die Zahlencoefficienten in diesen Ausdrücken gelten für das Jahr 1800; für das Jahr 1900 sind die Coefficienten der drei von $\sin \odot$ und $\cos \odot$ abhängigen Hauptglieder: $15''.8321$, $6''.8682$, $9''.2240$; die Aenderung der übrigen Coefficienten ist unmerklich.

Gl. (a) partiell nach λ und ε differenzirt, gibt:

$$\cos \delta \frac{d\delta}{d\lambda} = \cos \beta \cos \lambda \sin \varepsilon = \cos \delta \cos \alpha \sin \varepsilon,$$

$$\cos \delta \frac{d\delta}{d\varepsilon} = \cos \beta \sin \lambda \cos \varepsilon - \sin \beta \sin \varepsilon = \cos \delta \sin \alpha,$$

also:

$$\frac{d\delta}{d\lambda} = \cos \alpha \sin \varepsilon, \quad \frac{d\delta}{d\varepsilon} = \sin \alpha.$$

Aus (c) folgt ferner durch Differenziation nach λ :

$$\cos \delta \cos \alpha \frac{d\alpha}{d\lambda} - \sin \delta \sin \alpha \frac{d\delta}{d\lambda} = \cos \beta \cos \lambda \cos \varepsilon = \cos \delta \cos \alpha \cos \varepsilon,$$

somit:

$$\frac{d\alpha}{d\lambda} = \cos \varepsilon + \operatorname{tg} \delta \operatorname{tg} \alpha \cdot \frac{d\delta}{d\lambda} = \cos \varepsilon + \sin \varepsilon \sin \alpha \operatorname{tg} \delta.$$

Endlich findet man aus (c) durch Differenziation nach ε :

$$\cos \delta \cos \alpha \frac{d\alpha}{d\varepsilon} - \sin \delta \sin \alpha \frac{d\delta}{d\varepsilon} = -\cos \beta \sin \lambda \sin \varepsilon - \sin \beta \cos \varepsilon = -\sin \delta,$$

$$\cos \delta \cos \alpha \frac{d\alpha}{d\varepsilon} = \sin \delta \left(\sin \alpha \frac{d\delta}{d\varepsilon} - 1 \right) = \sin \delta (\sin \alpha^2 - 1), \quad \text{folglich: } \frac{d\alpha}{d\varepsilon} = -\cos \alpha \operatorname{tg} \delta.$$

Hat man für einen bestimmten Stern die Nutation in Rectascension und Declination zu berechnen, so geschieht dies übrigens bequemer nach den Formeln (105) als jenen (106), da man nicht nöthig hat, die Grössen $\mathcal{A}\lambda$ und $\mathcal{A}\varepsilon$ erst aus den Formeln (104) zu rechnen, wozu man übrigens die erforderlichen Elemente (δ und \odot) in den Ephemeriden findet. Diese enthalten nämlich auch die Nutation in Länge $\mathcal{A}\lambda$ von 10 zu 10 Tagen berechnet; ferner die scheinbare Schiefe der Ekliptik gleichfalls von 10 zu 10 Tagen und die mittlere Schiefe für den Anfang des Jahres; sei letztere $=\varepsilon$, die scheinbare Schiefe für das gegebene Datum $=\varepsilon'$; da nun nach Bessel die jährliche Abnahme der Schiefe $0''.4837$ ist, so hat man $\varepsilon' = \varepsilon - 0''.484 t + \mathcal{A}\varepsilon$, wo t die seit Anfang des Jahres bis zu dem gegebenen Datum verfllossene Zeit in Theilen des Jahres; hieraus

$$\mathcal{A}\varepsilon = \varepsilon' - \varepsilon + 0''.484 t.$$

Ist, wie im Berliner Jahrbuche seit 1868, auch die mittlere Schiefe ε von 10 zu 10 Tagen gegeben, so ist einfach $\mathcal{A}\varepsilon = \varepsilon' - \varepsilon$.

Setzt man in den Gln. (105) $\alpha = \delta = 0$, so geben die Ausdrücke: $\alpha' = \mathcal{A}\lambda \cos \varepsilon$, $\delta' = \mathcal{A}\lambda \sin \varepsilon$ offenbar den Ort des mittleren Aequinoctiums in Bezug auf den wahren Aequator. Die Grösse $\mathcal{A}\lambda \cos \varepsilon$ heisst die Nutation (oder Gleichung der Aequinoctialpunkte) in Rectascension, und wird gleichfalls im Nautical-Almanac von 10 zu 10 Tagen aufgeführt.

67. Mit Rücksicht auf die Nutation kann nun auch die Beziehung zwischen der Sternzeit und mittleren Zeit schärfer bestimmt werden, als dies im III. Capitel möglich war.

Die dort angenommene erste mittlere Sonne (\odot_1) bewegt sich gleichförmig in der Ekliptik und geht gleichzeitig mit der wahren Sonne durch das Perihel. Die Länge dieser ersten mittleren Sonne, vom mittleren Aequinoctium aus gezählt, wird die mittlere Länge der Sonne genannt.

Die zweite mittlere Sonne (\odot_2) bewegt sich gleichförmig im Aequator und geht gleichzeitig mit der ersten mittleren Sonne durch das mittlere Aequinoctium. Demzufolge ist daher stets:

Die mittlere Rectascension von $\odot_2 =$ der mittleren Länge von $\odot_1 =$ der mittleren Länge der Sonne.

In jedem Momente ist aber die Sternzeit θ der Stundenwinkel des wahren Frühlingspunctes, die mittlere Zeit M der Stundenwinkel der zweiten mittleren Sonne; zufolge der Gl. (1), §. 11, ist daher in jedem Momente $\theta = M +$ der wahren Rectascension der zweiten mittleren Sonne. Bezeichnet man daher die Sternzeit im mittleren Mittage, wo $M = 0$, mit θ_0 , so ist:

$\theta_0 =$ wahre A. R. von $\odot_2 =$ mittlere A. R. von $\odot_2 +$ Nutat. in A. R.
 $=$ der mittleren Länge der Sonne $+ \text{Nut. in Rectascension, in Zeit ausgedrückt.}$

Kennt man daher die mittlere Länge der Sonne für irgend eine Epoche und deren tägliche Aenderung in Bezug auf das mittlere Aequinoctium (die mittlere tägliche tropische Bewegung), so kann die Sternzeit im mittleren Mittag für ein gegebenes Datum leicht berechnet werden.

Nach den Sonnentafeln von Hansen und Olufsen ist die mittlere Länge der Sonne im mittleren Mittag zu Paris, 1850, Januar 0*):

$$= 279^{\circ} 47' 34''.44 = 18^h 39^m 10^s .296,$$

und die mittlere siderische (d. i. auf einen festen Punct bezogene) Bewegung in einem julianischen Jahre von 365.25 Tagen:

$$= 360^{\circ} - 22''.56009,$$

welch' letztere Grösse constant ist. Um hieraus die tropische auf den Frühlingspunct sich beziehende Bewegung zu finden, muss das Zurückgehen des Frühlingspunctes in Folge der Präcession berücksichtigt werden. Man hat nun vermöge der Gl. (94*):

Jährl. allg. Präcession zur Zeit 1850 + t =	50''.23572 + 0''.0002442966 t
Mittl. siderische Bewegung in 365.25 Tagen	= 360^{\circ} - 22 .56009
Mittl. tropische Bewegung in 365.25 Tagen	= 360^{\circ} + 27''.67563 + 0''.0002442966 t

oder in Zeit:

$$24^h + 1^s .84504 + 0^s .00001628644 t;$$

hieraus folgt die mittlere tropische Bewegung in einem Tage:

$$3^m 56^s .55536 + 0^s .000000044589 t,$$

ferner, wenn man den vorhergehenden Ausdruck mit dt multiplicirt und integrirt:

$$24^h . t + 1^s .84504 t + 0.00000814322 t^2$$

als mittlere tropische Bewegung in t julianischen Jahren, wo t von 1850 zu zählen ist.

Das gemeine Jahr von 365 Tagen ist nun um $\frac{1}{4}$ Tag kürzer als das julianische, und die mittlere Bewegung in $\frac{1}{4}$ Tag = $59^s .1388$. Ferner ist jedes vierte Jahr ein Schaltjahr von 366 Tagen; bezeichnet man daher den Rest nach der Division der Jahreszahl durch 4 mit f , so hat man, da 1850 das zweite Jahr nach dem zunächst vorausgehenden Schaltjahre 1848 ist, die mittlere tropische Bewegung von 1850 bis 1850 + t :

$$= 24^h . t + 1^s .84504 t + 0^s .00000814322 t^2 - 59^s .1388 (f - 2),$$

somit die mittlere Länge der Sonne im mittleren Mittag zu Paris, 1850 + t , Januar 0, (die sogenannte Epoche):

$$E = 18^h 39^m 10^s .296 + 1^s .84504 t + 0^s .00000814322 t^2 - 59^s .1388 (f - 2),$$

*) Die Epoche: mittlerer Mittag Januar 0, oder kurz: Januar 0.0 ist gleichbedeutend mit dem mittleren Mittag des 31. December oder December 31.0.

oder, wenn man den constanten Theil des letzten Gliedes mit dem ersten Gliede vereinigt:

$$E = 18^h 41^m 8^s.574 + 1^s.84504 t + 0^s.00000814322 t^2 - 59^s.1388 f. \quad (A)$$

In Schaltjahren gilt, für $f=0$, der Werth von E für Januar 1.0. Um die Epoche auf einen anderen Meridian zu übertragen, dessen Längenunterschied von Paris $= d$ Stunden ist, westlich positiv genommen, hat man noch die Grösse $+ 9^s.85648 d$ hinzuzufügen, wo $9^s.85648$ die mittlere Bewegung in 1 Stunde.

Beispiel. Man suche die Sternzeit im mittleren Mittage zu Berlin, 1869, September 17. — Hier ist $t=19$, $f=1$, $d=-44^m 14^s.0 = -0^h.7372$, und die Zwischenzeit von Januar 0.0 bis September 17.0 gleich 260 Tage. Mit diesen Werthen von t und f erhält man aus (A):

$E =$ mittl. Länge zu Paris, 1869, Januar 0.0	$= 18^h 40^m 44^s.494$
Reduction auf Berlin $= -0.7372 \times 9^s.85648$	$= -7.266$
Mittlere Länge zu Berlin, 1869, Januar 0.0	$= 18 40 37.228$
Bewegung in 260 Tagen $= (3^m 56^s.55536) \times 260$	$= 17 5 4.394$
Nutation in Rectascension	$= -0.870$
Sternzeit im mittl. Mittag zu Berlin, 1869, Sept. 17	$= 11 45 40.75,$

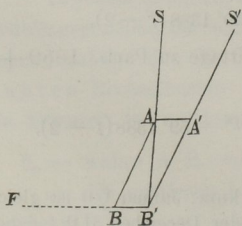
übereinstimmend mit der Angabe des Berliner Jahrbuches.

Die Aberration der Fixsterne.

68. Das Licht pflanzt sich bekanntlich nicht momentan, sondern mit einer gewissen Geschwindigkeit fort, welche, wie gross sie auch sein mag (nahe 41000 geogr. Meilen in 1^s), doch zur Geschwindigkeit der Erde in ihrer Bahn (nahe 4,12 geogr. M.) in einem angebbaren Verhältnisse steht. Die Folge hievon ist, dass die Richtung eines von einem Gestirne zum Auge gelangenden Lichtstrahles verändert wird, und wir das Gestirn an einem anderen Orte erblicken, als wenn sich das Licht momentan fortpflanzen, oder der Beobachter in Ruhe befinden würde.

Die Richtung, in welcher uns ein Stern erscheint, ist offenbar durch die Richtung bestimmt, welche wir einem Fernrohre geben müssen, damit das Gestirn in der Axe desselben gesehen werde. Unterscheiden wir hiebei zwei Zeit-

Fig. 20.



momente t und t' , in welchen der Strahl beziehungsweise beim Objective ein- und aus dem Oculare austritt. Sei (Fig. 20) SB' ein von einem als im Raume unbeweglich vorausgesetzten Sterne kommenden Lichtstrahl, A der Ort des Objectivs zur Zeit t , AB' der Weg des Strahles in der Zeit $t' - t$, so muss der Strahl zur Zeit t' das Ocular in B' finden, damit ihm der Austritt aus dem Fernrohre möglich sei. Ist daher BB' die Bewegung des Beobachters

oder des Fernrohres in der Zeit $t' - t$, so wird zur Zeit t , wo das Objectiv in A sich befindet, das Ocular sich in B befinden, somit das Fernrohr die Richtung BA haben müssen, damit es, zur Zeit t' in die zu AB parallele Lage $A'B'$ gelangt, dem Strahle den Austritt bei B' gestatte. Es ist daher $B'A'$ die scheinbare Richtung des Strahles, welche wir beobachten, während BA die wahre Richtung darstellt, oder es ist S der wahre, S' der scheinbare Ort des Sternes. Der Unterschied beider Richtungen, d. i. der Winkel $SB'S'$ heisst die Aberration der Fixsterne.

Wie man sieht, ist der scheinbare Ort S' dem wahren Orte S voraus in der Richtung, nach welcher sich der Beobachter bewegt; eben so ist klar, dass die scheinbare Richtung $B'S'$ in der Ebene liegen muss, welche durch BB' , d. i. die Richtung der Bewegung des Beobachters und durch die Richtung $B'S$ nach dem wahren Orte des Sternes gelegt werden kann. Diese Ebene schneidet die scheinbare Himmelskugel in einem grössten Kreise, welcher durch den wahren Ort S und durch jenen Punct der Himmelskugel geht, in welchem dieselbe von der etwa nach rückwärts verlängerten Richtung $B'B$ der Bewegung des Beobachters getroffen wird, oder von welchem der Beobachter zu kommen scheint; in diesem grössten Kreise liegt daher auch der scheinbare Ort S' des Sternes, und zwar um den dem Winkel $SB'S'$ entsprechenden Bogen SS' nach vorwärts im Sinne der Bewegung des Beobachters.

Seien $\eta = \angle FB'S$, $\eta' = \angle FB'S'$ die Winkel, welche beziehungsweise die wahre und scheinbare Richtung des Sternes mit der nach rückwärts verlängerten Richtung der Bewegung des Beobachters einschliessen, d. i. die Bögen des oberwähnten grössten Kreises zwischen dem Puncte F der scheinbaren Himmelskugel, von welchem die Erde zu kommen scheint, bis zum wahren und scheinbaren Orte des Sternes; $v = BB' = AA'$ die Geschwindigkeit des Beobachters, $V = AB'$ die Geschwindigkeit des Lichtes, so ist $\angle AB'A' = \eta' - \eta$, und man hat aus dem Dreiecke $AB'A'$: $V : v = \sin \eta' : \sin(\eta' - \eta)$, somit, da $\eta' - \eta$ ein sehr kleiner Winkel:

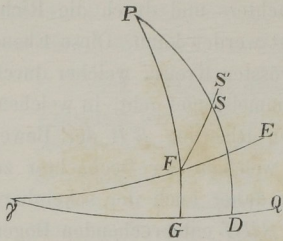
$$\eta' - \eta = \frac{v}{V \sin 1''} \sin \eta' = k \sin \eta', \quad (107)$$

welche Gleichung den Winkel $SB'S' = \text{arc } SS'$, d. i. den Betrag der Aberration im grössten Kreise bestimmt; es handelt sich nun darum, den Einfluss dieser Ortsveränderung auf die Coordinaten eines Fixsternes zu untersuchen.

Die Bewegung des Beobachters ist aber eine doppelte, insoferne derselbe an der jährlichen Bewegung der Erde um die Sonne, und an der täglichen Umdrehung derselben um ihre Axe theilnimmt. Den von der ersteren herrührenden Theil der Aberration nennt man die jährliche Aberration der Fixsterne, den aus der täglichen Bewegung entspringenden weit kleineren Theil die tägliche Aberration. Wir werden jeden dieser Theile besonders betrachten.

69. Jährliche Aberration der Fixsterne in Rectascension und Declination. Die Richtung der Bewegung der Erde in ihrer jährlichen Bahn um die Sonne ist in jedem Punkte durch die Tangente der Bahncurve gegeben, welche offenbar in der Ebene der Erdbahn liegt und somit, nach rückwärts in der der Bewegung der Erde entgegengesetzten Richtung verlängert, die scheinbare Himmelskugel in einem Punkte F der Ekliptik trifft, von welchem die Erde in diesem Augenblicke zu kommen scheint. Nehmen wir die Bahn der Erde um die Sonne als kreisförmig an, so steht die Tangente in jedem Augenblicke senkrecht auf der vom Mittelpunkte der Erde zum Mittelpunkte der Sonne gezogenen Richtung, deren Länge die wahre Länge der

Fig. 21.



Sonne ist. Bezeichnen wir daher diese mit \odot , so ist $\odot + 90^\circ$ die Länge des Punktes F der Ekliptik.

Es seien nun in Fig. 21 γQ der Aequator, P der Pol desselben, γE die Ekliptik, F der eben besprochene Punkt derselben, von welchem die Erde zu kommen scheint, S ein Stern, dessen Rectascension und Declination α, δ ; PD und PG die durch S und F gelegten Declinationskreise.

Zufolge dem im vorigen §. Gesagten liegt nun der scheinbare Ort S' , dessen Rectascension und Declination mit α', δ' bezeichnet werden möge, in der Verlängerung des grössten Kreisbogens $FS = \eta$, und es geht offenbar α in α' , so wie δ in δ' über, wenn wir $FS = \eta$ um

$$SS' = \Delta\eta = \eta' - \eta = k \sin \eta'$$

zunehmen lassen; betrachten wir daher α und δ als Functionen von η , so haben wir vermöge des Taylor'schen Satzes:

$$\begin{aligned} \alpha' - \alpha &= \frac{d\alpha}{d\eta} \Delta\eta + \frac{1}{2} \frac{d^2\alpha}{d\eta^2} \Delta\eta^2, \\ \delta' - \delta &= \frac{d\delta}{d\eta} \Delta\eta + \frac{1}{2} \frac{d^2\delta}{d\eta^2} \Delta\eta^2. \end{aligned} \tag{a}$$

Sei nun A, D Rectascension und Declination des Punktes F , so ist im Dreiecke FPS :

$$FP = 90^\circ - D, \quad PS = 90^\circ - \delta, \quad FS = \eta, \quad \angle FPS = \alpha - A,$$

und man hat aus diesem Dreiecke, wenn die Winkel $PFS = \varphi, PSF = \sigma$ gesetzt werden:

$$\begin{aligned} \sin \delta &= \cos \eta \sin D + \sin \eta \cos D \cos \varphi, \\ \cos \delta \cos \sigma &= \sin \eta \sin D - \cos \eta \cos D \cos \varphi, \end{aligned} \tag{b}$$

ferner:

$$\begin{aligned} \sin \eta \sin \sigma &= \cos D \sin(\alpha - A) \\ \sin \eta \cos \sigma &= \sin D \cos \delta - \cos D \sin \delta \cos(\alpha - A). \end{aligned} \tag{c}$$

Differenzirt man die 1^{te} der Gln. (b) nach η , und beachtet, dass D und q bei einer Aenderung von η constant bleiben, so findet man mit Rücksicht auf die 2^{te} der Gleichungen (b) und (c):

$$\frac{d\delta}{d\eta} = -\cos\sigma = -\frac{\sin D \cos\delta - \cos D \sin\delta \cos(\alpha - A)}{\sin\eta}.$$

Aus demselben Dreiecke erhält man ferner durch Anwendung der zwei letzten der Formeln (13) [§. 15]:

$$\begin{aligned}\sin\varphi \cos\eta &= \cos(\alpha - A) \sin\sigma + \sin(\alpha - A) \cos\sigma \sin\delta \\ \sin\varphi \sin\eta &= \sin(\alpha - A) \cos\delta,\end{aligned}$$

und durch Differenziation der 2^{ten} dieser Gleichungen:

$$\sin\varphi \cos\eta d\eta = \cos(\alpha - A) \cos\delta d\alpha - \sin(\alpha - A) \sin\delta d\delta;$$

setzt man hier für $d\delta$ den oben erhaltenen Werth $-\cos\sigma d\eta$, so kommt mit Rücksicht auf die 1^{te} Gleichung:

$$\frac{d\alpha}{d\eta} = \sin\sigma \sec\delta = \frac{\cos D \sin(\alpha - A) \sec\delta}{\sin\eta}.$$

Es ist nun $\Delta\eta = \eta' - \eta = k \sin\eta' = k \sin(\eta + \Delta\eta) = k \sin\eta + k \Delta\eta \sin 1'' \cos\eta$, oder, wenn man im 2^{ten} Gliede für $\Delta\eta$ den genäherten Werth $k \sin\eta$ setzt:

$$\Delta\eta = k \sin\eta + k^2 \sin 1'' \sin\eta \cos\eta.$$

Beschränken wir uns nun auf die Glieder 1^{ter} Ordnung in (a), so haben wir $\Delta\eta = k \sin\eta$ zu setzen, und erhalten durch Substitution dieses Werthes, so wie der Werthe von $\frac{d\alpha}{d\eta}$ und $\frac{d\delta}{d\eta}$ in die Gln. (a):

$$\begin{aligned}\alpha' - \alpha &= k \cos D \sin(\alpha - A) \sec\delta \\ \delta' - \delta &= k [\cos D \sin\delta \cos(\alpha - A) - \sin D \cos\delta].\end{aligned}$$

Zur Bestimmung von A und D erhalten wir aber aus dem rechtwinkligen Dreieck γFE , in welchem $\gamma F = \odot + 90^\circ$, $\gamma G = A$, $FG = D$, und der Winkel $F\gamma G = \varepsilon$ die Schiefe der Ekliptik ist, durch Anwendung der Formeln (6) die Gleichungen:

$$\begin{aligned}\cos A \cos D &= -\sin\odot \\ \sin A \cos D &= \cos\odot \cos\varepsilon \\ \sin D &= \cos\odot \sin\varepsilon.\end{aligned}$$

Entwickeln wir also $\sin(\alpha - A)$ und $\cos(\alpha - A)$ und setzen für die hiernach erscheinenden Producte $\cos A \cos D$, $\sin A \cos D$, und für $\sin D$ die Werthe, so erhalten wir, wenn wir noch für k , die sogenannte Constante der jährlichen Aberration, den Werth nach Struve's Bestimmung:

$$k = 20''.4451$$

einführen, folgende Formeln für die jährliche Aberration der Fixsterne in Rectascension und Declination:

$$\begin{aligned} \alpha' - \alpha &= -20''.4451 (\cos \odot \cos \varepsilon \cos \alpha + \sin \odot \sin \alpha) \sec \delta, \\ \delta' - \delta &= -20''.4451 \cos \odot (\sin \varepsilon \cos \delta - \cos \varepsilon \sin \delta \sin \alpha) \\ &\quad - 20''.4451 \sin \odot \sin \delta \cos \alpha. \end{aligned} \quad (108)$$

Diese Formeln *) erhalten eine zur Rechnung bequemere Form, wenn man setzt:

$$\begin{aligned} -20''.4451 \cos \odot \cos \varepsilon &= h \sin H \\ -20''.4451 \sin \odot &= h \cos H \\ -20''.4451 \cos \odot \sin \varepsilon &= h \sin H \operatorname{tg} \varepsilon = i, \end{aligned} \quad (109)$$

wodurch dieselben in folgende übergehen:

$$\begin{aligned} \alpha' - \alpha &= h \sin (H + \alpha) \sec \delta, \\ \delta' - \delta &= h \cos (H + \alpha) \sin \delta + i \cos \delta. \end{aligned} \quad (110)$$

Die durch die Gleichungen (109) bestimmten Hilfsgrößen h , H und i hängen nur von der Zeit, nicht aber vom Orte des Sternes ab, und können daher in eine Tafel gebracht werden, deren Argument die Zeit ist. Die Ephemeriden enthalten jährlich eine solche Tafel, welche die Werthe dieser Größen von Tag zu Tag oder von 5 zu 5 Tagen für mittlere Mitternacht gibt.

Beispiel. Man suche die jährliche Aberration in A. R. und Declination des Sternes α Lyrae für 1868, März 7, für die Zeit der oberen Culmination in Wien.

Es ist für diesen Stern: $\alpha = 18^h 32^m 28^s = 278^{\circ} 7'$, $\delta = +38^{\circ} 39'.8$; die mittl. Wiener Zeit der Culmination an dem gegebenen Tage $= 19^h 27^m.5 = 18^h 22^m$ mittl. Greenwich Zeit, und für diese Zeit $\odot = 347^{\circ} 59'$; endlich $\varepsilon = 23^{\circ} 27'.3$. Man hat nun:

$\log k = 1.3106$	$\log h \sin H = 1.2635_n$	
$\log \cos \odot = 9.9904$	$\log h \cos H = 0.6292$	
$\log \sin \odot = 9.3186_n$	$\log \operatorname{tg} H = 0.6343$	$H = 283^{\circ} 4'$
$\log \cos \varepsilon = 9.9625$	$\log \sin H = 9.9886$	$H + \alpha = 201 11$
$\log \sin \varepsilon = 9.5999$	$\log h = 1.2749$	
	$\log i = 0.9009_n$	

*) Entwickelt man auch noch die Glieder 2^{ter} Ordnung, lässt hiebei die constanten Glieder weg, weil diese mit dem mittleren Orte des Sternes vereinigt bleiben können und behält von den periodischen von \odot abhängigen nur die in $\operatorname{tg} \delta$ oder $\sec \delta$ multiplicirten Glieder bei, welche allein einen merklichen Werth erlangen können, so erhalten obige Ausdrücke noch folgende Zusätze:

$$\begin{aligned} \text{in } \alpha' - \alpha: & -\frac{1}{4} k^2 \sin 1'' (1 + \cos \varepsilon^2) \cos 2 \odot \sin 2 \alpha \sec \delta^2 \\ & + \frac{1}{2} k^2 \sin 1'' \cos \varepsilon \sin 2 \odot \cos 2 \alpha \sec \delta^2, \\ \text{in } \delta' - \delta: & + \frac{1}{8} k^2 \sin 1'' [\sin \varepsilon^2 - (1 + \cos \varepsilon^2) \cos 2 \alpha] \cos 2 \odot \operatorname{tg} \delta \\ & - \frac{1}{4} k^2 \sin 1'' \cos \varepsilon \sin 2 \odot \sin 2 \alpha \operatorname{tg} \delta, \end{aligned}$$

welche nach Einsetzung der Zahlenwerthe für k und ε auf folgende Form gebracht werden können:

$$\begin{aligned} \text{in } (\alpha' - \alpha): & + 0''.000931 \sin 2(\odot - \alpha) \sec \delta^2, \\ \text{in } (\delta' - \delta): & - 0''.000466 \cos 2(\odot - \alpha) \operatorname{tg} \delta. \end{aligned}$$

Man sieht, dass diese Verbesserungen nur für dem Pole nahe stehende Sterne einen merklichen Betrag erreichen.

$\log h = 1.2749$	$\log h = 1.2749$	
$\log \sin(H + \alpha) = 9.5579_n$	$\log \cos(H + \alpha) = 9.9696_n$	
$\log \sec \delta = 0.1074$	$\log \sin \delta = 9.7957$	$\log i \cos \delta = 0.7935_n$
$\log(\alpha' - \alpha) = 0.9402_n$	$\frac{1.0402_n}{10'' . 97}$	$- 6'' . 22$
$\alpha' - \alpha = - 8'' . 71$	$- 10'' . 97$	
$= - 0^s . 58$	$\delta' - \delta = - 17'' . 19$	

70. Jährliche Aberration der Fixsterne in Länge und Breite. Die Formeln hiefür ergeben sich unmittelbar aus den im vorhergehenden §. entwickelten, wenn wir $\varepsilon = 0$ setzen und λ, β statt α, δ schreiben. Wir erhalten auf diese Weise:

$$\begin{aligned} \lambda' - \lambda &= - 20'' . 4451 \cos(\odot - \lambda) \sec \beta, \\ \beta' - \beta &= - 20'' . 4451 \sin(\odot - \lambda) \sin \beta^*. \end{aligned} \quad (111)$$

Aus diesen Gleichungen lässt sich leicht folgern, dass der scheinbare Ort des Sternes um den mittleren von der Aberration freien Ort eine Ellipse beschreibt, deren halbe grosse und kleine Axe beziehungsweise k und $k \sin \beta$ ist, von welchen die letztere in der Richtung des Breitenkreises liegt, wobei

*) Als Glieder 2^{ter} Ordnung erhält man hier:

$$\begin{aligned} \text{in } \lambda' - \lambda &: + \frac{1}{2} k^2 \sin 1'' \sin 2(\odot - \lambda) \sec \beta^2 \\ \text{in } \beta' - \beta &: - \frac{1}{4} k^2 \sin 1'' \cos 2(\odot - \lambda) \operatorname{tg} \beta, \end{aligned}$$

oder nach Einführung der Zahlenwerthe:

$$\begin{aligned} \text{in } \lambda' - \lambda &: + 0'' . 001013 \sin 2(\odot - \lambda) \sec \beta^2 \\ \text{in } \beta' - \beta &: - 0'' . 000507 \cos 2(\odot - \lambda) \operatorname{tg} \beta, \end{aligned}$$

welche Glieder wieder nur für Sterne nahe am Pole der Ekliptik einen merklichen Werth erlangen.

Wir haben bei unserer Entwicklung die Bahn der Erde als kreisförmig vorausgesetzt; nimmt man auf die elliptische Gestalt Rücksicht, so findet man für die Aberration in Länge und Breite:

$$\begin{aligned} \lambda' - \lambda &= - k \cos(\odot - \lambda) \sec \beta - ke \cos(P - \lambda) \sec \beta, \\ \beta' - \beta &= - k \sin(\odot - \lambda) \sin \beta - ke \sin(P - \lambda) \sin \beta, \end{aligned}$$

welche Formeln sich von jenen (111) nur durch das 2^{te} Glied unterscheiden, in welchem e die Excentricität der Erdbahn ($= 0.01677$) und P die Länge des Perigeums der Erde bezeichnet, welche hier genügend genau für dieses Jahrhundert $= 280^\circ$ angenommen werden kann. Diese Grössen ändern sich aber nur äusserst langsam; dasselbe gilt für einen Fixstern von λ und β , so dass also das 2^{te} Glied, an und für sich klein, für Fixsterne als constant angenommen werden darf; es kann daher mit dem mittleren Orte des Sternes vereinigt, und bei der Aberration unberücksichtigt bleiben. Dasselbe gilt für die Aberration der Fixsterne in Rectascension und Declination.

Anders verhält es sich bei der Sonne in Folge ihrer veränderlichen Länge; wenden wir auf diese die obigen Formeln an, so ist $\beta = 0$ und $\lambda = \odot$ zu setzen; wir erhalten daher $\beta' - \beta = 0$, und die jährliche Aberration der Sonne in Länge:

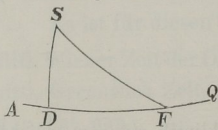
$$\odot' - \odot = - 20'' . 445 - 0'' . 343 \cos(280^\circ - \odot).$$

Die Aberration der Sonne in Länge bewegt sich daher innerhalb eines Jahres zwischen den Grenzen $- 20'' . 10$ und $- 20'' . 79$.

die Periode dieser Bewegung ein Jahr ist. Für Sterne in der Ekliptik ($\beta = 0$) geht die Ellipse in eine gerade Linie, für einen Stern im Pole derselben ($\beta = 90^\circ$) in einen Kreis über.

71. Tägliche Aberration in Rectascension und Declination. Da die Bewegung des Beobachters in Folge der täglichen Umdrehung der Erde um ihre Axe von West nach Ost parallel zum Aequator erfolgt, so wird die Richtung dieser Bewegung, nach rückwärts oder gegen West bis zur scheinbaren Himmelskugel verlängert, diese in einem Punkte F des Aequators treffen, und man überzeugt sich leicht, dass die Rectascension dieses Punktes $= \theta + 270^\circ$ ist, wenn θ die Sternzeit des Beobachtungsortes bedeutet. Denn die Richtung der Bewegung ist in jedem Augenblicke (als Tangente am Parallel des Beobachtungsortes) senkrecht auf die Ebene des Meridians dieses Ortes, und der zwischen diesem Meridiane und dem Stundenkreise des Frühlingspunktes liegende Bogen des Aequators ist eben die Sternzeit θ . Geht man also von dem Frühlingspunkte aus auf dem Aequator in der Richtung der Rectascension fort, so trifft man in der Entfernung θ auf den Meridian des Beobachtungsortes, und folglich in der Entfernung $\theta + 90^\circ$

Fig. 22.



auf die nach vorwärts, in der Entfernung $\theta + 270^\circ$ auf die nach rückwärts verlängerte Richtung der Bewegung des Beobachters.

Sei also (Fig. 22) AQ der Aequator, F der Punkt, dessen Rectascension $= \theta + 270^\circ$, S ein Stern, dessen Rectascension und Declination α , δ ; ziehen wir den grössten Kreisbogen $FS = \eta$, ferner SD senkrecht auf AQ , so ist in dem rechtwinkligen Dreieck DFS :

$$DF = 270^\circ + \theta - \alpha, \quad DS = \delta, \quad FS = \eta,$$

und wir erhalten durch Anwendung der Formeln (6), wenn wir den Winkel $DFS = \gamma$ setzen, die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \cos \eta &= \cos \delta \sin(\theta - \alpha), \\ \sin \eta \cos \gamma &= -\cos \delta \cos(\theta - \alpha), \\ \sin \eta \sin \gamma &= \sin \delta. \end{aligned} \quad (a)$$

Der scheinbare Ort S' liegt in der Verlängerung des Bogens FS , und da der Bogen $SS' = \eta' - \eta$ sehr klein ist, so wird man die hieraus folgenden Aenderungen der Rectascension und Declination leicht durch Differentiation der Gleichungen (a) nach η erhalten, wobei γ und θ als constant zu betrachten sind. Durch Division der zwei ersten Gleichungen folgt:

$$-\operatorname{tg}(\theta - \alpha) = \frac{\operatorname{cotg} \eta}{\cos \gamma},$$

und hieraus:

$$\frac{d\alpha}{\cos(\theta - \alpha)^2} = -\frac{d\eta}{\sin \eta^2 \cos \gamma} = -\frac{d\eta}{\sin \eta \cdot \cos \delta \cos(\theta - \alpha)},$$

$$d\alpha = \frac{d\eta}{\sin \eta} \cos(\theta - \alpha) \sec \delta.$$

Aus der 3^{ten} Gleichung erhält man:

$$\cos \delta \, d\delta = \cos \eta \, d\eta \sin \gamma = \cos \delta \sin(\theta - \alpha) \frac{\sin \delta}{\sin \eta} d\eta,$$

$$d\delta = \frac{d\eta}{\sin \eta} \sin(\theta - \alpha) \sin \delta.$$

Setzen wir in diesen Gleichungen $d\eta = \eta' - \eta$, so wird $d\alpha = \alpha' - \alpha$, $d\delta = \delta' - \delta$, wenn α' , δ' die scheinbare mit der täglichen Aberration behaftete Rectascension und Declination bedeuten.

Ist nun v' die Geschwindigkeit des Beobachters in Folge der täglichen Umdrehung der Erde um ihre Axe, so hat man zufolge der Gl. (107), wenn man, was ohne merklichen Fehler geschehen kann, $\sin \eta$ statt $\sin \eta'$ setzt:

$$\frac{d\eta}{\sin \eta} = \frac{\eta' - \eta}{\sin \eta} = \frac{v'}{V \sin 1''} = \frac{v}{V \sin 1''} \cdot \frac{v'}{v} = k \frac{v'}{v},$$

wenn, wie früher, v die Geschwindigkeit der Erde in ihrer jährlichen Bahn, und k die Constante der jährlichen Aberration bezeichnen.

Sei q' die geocentrische Breite des Beobachtungsortes, ρ dessen Halbmesser, jener des Erdäquators = 1 angenommen, so ist $\rho \cos q'$ der Halbmesser, und $2\pi \rho \cos q'$ der Umfang des Parallels, welchen der Beobachter in einem Sterntage beschreibt. Man kann daher, den Sterntag als Zeiteinheit angenommen, $v' = 2\pi \rho \cos q'$ setzen.

Ferner ist, wenn p die mittlere Aequatoreal-Horizontalparallaxe der Sonne bedeutet, $\frac{1}{\sin p}$ die mittlere Entfernung der Sonne von der Erde, ausgedrückt in Halbmessern des Aequators, somit $\frac{2\pi}{\sin p}$ der Umfang der als kreisförmig angenommenen Bahn der Erde um die Sonne, somit, wenn T die siderische Umlaufszeit der Erde in Sterntagen ausgedrückt bedeutet: $v = \frac{2\pi}{T \sin p}$ *).

*) Da 1 Sterntag = 86164 Secunden mittlerer Zeit, so ist $v = \frac{2\pi}{86164 T \sin p}$ die mittlere Geschwindigkeit der Erde in 1^{er} mittlerer Zeit, ausgedrückt in Halbmessern des Erdäquators. Anderseits war $k = \frac{v}{V \sin 1''}$, wo V die Geschwindigkeit des Lichtes. Da nun der Werth der Constante $k = 20''.4451$ von Struve aus Beobachtungen von Sternen abgeleitet wurde, so ergibt sich hieraus die Geschwindigkeit des Lichtes:

$$V = \frac{v}{k \sin 1''} = \frac{2\pi}{86164 k \sin 1'' T \sin p}$$

Hiemit wird:

$$\frac{d\eta}{\sin \eta} = k \frac{v'}{v} = \varrho \cos \varphi' k T \sin p.$$

Setzt man nun $k = 20''.4451$, $p = 8''.57116$, $T = 366.25637$, so wird $k T \sin p = 0''.311$, welche Grösse die Constante der täglichen Aberration heisst und so klein ist, dass man ohne merklichen Fehler $\cos \varphi$ statt $\varrho \cos \varphi'$ schreiben kann, wenn φ die Polhöhe des Ortes bedeutet.

Man hat daher für die tägliche Aberration in Rectascension und Declination folgende Formeln:

$$\begin{aligned} \alpha' - \alpha &= 0''.311 \cos \varphi \cos (\theta - \alpha) \sec \delta, \\ \delta' - \delta &= 0''.311 \cos \varphi \sin (\theta - \alpha) \sin \delta. \end{aligned} \quad (112)$$

Bekanntlich ist $\theta - \alpha$ der Stundenwinkel des Sternes; zur Zeit der Culmination desselben, wo $\theta - \alpha = 0$, ist daher die tägliche Aberration in Declination = 0, während sie in Rectascension ihren grössten Werth:

$$+ 0''.311 \cos \varphi \sec \delta = + 0^s.0207 \cos \varphi \sec \delta \quad (113)$$

erreicht. Wie man sieht, ist dieselbe, ausgenommen für Polsterne, immer nur sehr klein, und kann daher meistens vernachlässigt werden, wenn es nicht auf die grösste Schärfe ankommt.

Die jährliche Parallaxe der Fixsterne.

72. In Folge der jährlichen Bewegung der Erde um die Sonne sehen wir einen Fixstern zu zwei Zeiten, welche um ein halbes Jahr auseinanderliegen, von zwei Standpuncten, deren gegenseitige Entfernung nahe 40 Millionen geogr. Meilen beträgt; ist daher diese nicht verschwindend klein gegen die Entfernung der Fixsterne von der Erde oder Sonne, so wird hieraus eine Aenderung des scheinbaren Ortes entspringen, welche man die jährliche

in 1^s mittlerer Zeit; multiplicirt man diesen Ausdruck mit dem Halbmesser des Erdäquators = a , so erhält man mit obigen Werthen von k , T und p , da der Umfang des Aequators $2\pi a = 360 \times 15 = 5400$ geogr. Meilen ist: $V = 41544$ geogr. Meilen. Setzt man, nach den Ergebnissen der neueren Beobachtungen, die Horizontalparallaxe der Sonne $p = 8''.85$, so wird $V = 40235$ geogr. Meilen.

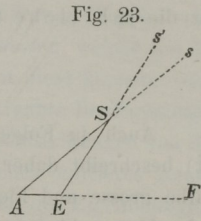
Ferner ist $\frac{1}{\sin p}$ die mittlere Entfernung der Erde von der Sonne, ausgedrückt in Halbmessern des Aequators, folglich $\frac{1}{V \sin p} = t$ die Anzahl Zeitsecunden, welche das Licht braucht, um die mittlere Entfernung der Erde von der Sonne (die halbe grosse Axe der Erdbahn) zu durchlaufen. Es wird daher:

$$t = \frac{86164 k \sin 1'' T}{2\pi},$$

und mit obigen Werthen: $t = 497^s.84 = 8^m 17^s.84$.

Parallaxe der Fixsterne nennt, und deren Periode, eben so wie jene der Aberration, ein Jahr ist.

Sei (Fig. 23) A die Sonne, E die Erde, S ein Stern; betrachten wir, was für den vorliegenden Zweck gestattet ist, den Ort der Sonne und des Sternes im Raume als unveränderlich, so ist die Richtung AS eine constante, während die Richtung ES in Folge der Bewegung der Erde um die Sonne veränderlich ist, und der scheinbare Ort s' im Laufe eines Jahres sich um den mittleren von der Sonne aus gesehenen Ort s bewegen wird. Beide Oerter liegen offenbar in dem grössten Kreise, in welchem die scheinbare Himmelskugel von einer durch die Gerade AE und den Stern S gelegten Ebene geschnitten wird, und welcher die Ekliptik in einem Punkte F schneidet, in welchem dieselbe von der bis zur scheinbaren Himmelskugel verlängerten Geraden AE getroffen wird; die Länge dieses Punctes ist $= \odot + 180^\circ$, wenn \odot die Länge der Sonne bezeichnet.



Es sei nun $\angle FAS = \eta$, $FES = \eta'$, $AS = A$, $AE = r$, so ist in dem Dreiecke AES : $A : r = \sin \eta' : \sin (\eta' - \eta)$, somit, da $\eta' - \eta$ sehr klein:

$$\eta' - \eta = \frac{r}{A \sin 1''} \sin \eta'.$$

Drückt man nun, wie üblich, r und A durch die halbe grosse Axe der Erdbahn als Einheit aus, so ist:

$$\frac{1}{A \sin 1''} = p$$

offenbar der Winkel, unter welchem diese halbe grosse Axe aus der Entfernung $= A$ gesehen erscheint; man nennt diese Grösse die Constante der jährlichen Parallaxe oder schlechthin die jährliche Parallaxe des Fixsternes, dessen Entfernung $= A$, und hat dann

$$\eta' - \eta = r p \sin \eta'$$

als Ausdruck der durch dieselbe bewirkten Ortsveränderung des Sternes im grössten Kreise.

Diese Gleichung stimmt vollkommen mit jener (107) für die Aberration geltenden überein; die Formeln für die jährliche Parallaxe in Rectascension und Declination, so wie in Länge und Breite ergeben sich daher ganz einfach aus jenen für die Aberration entwickelten, wenn wir in letzteren rp statt k und $\odot + 180^\circ$ statt $\odot + 90^\circ$, d. i. $\odot + 90^\circ$ statt \odot setzen. Wir erhalten dadurch für die jährliche Parallaxe in Rectascension und Declination:

$$\begin{aligned} \alpha' - \alpha &= rp (\sin \odot \cos \varepsilon \cos \alpha - \cos \odot \sin \alpha) \sec \delta, \\ \delta' - \delta &= rp \sin \odot (\sin \varepsilon \cos \delta - \cos \varepsilon \sin \delta \sin \alpha) - rp \cos \odot \sin \delta \cos \alpha; \end{aligned} \quad (114)$$

für die jährliche Parallaxe in Länge und Breite:

$$\begin{aligned}\lambda' - \lambda &= rp \sin(\odot - \lambda) \sec \beta, \\ \beta' - \beta &= -rp \cos(\odot - \lambda) \sin \beta.\end{aligned}\tag{115}$$

Auch in Folge der jährlichen Parallaxe (wenn sie überhaupt merklich ist) beschreibt daher der Stern eine Ellipse um seinen mittleren Ort, deren halbe grosse und kleine Axe beziehungsweise rp und $rp \sin \beta$ sind. Der wesentliche Unterschied in der durch die Aberration und Parallaxe bewirkten scheinbaren Bewegung des Sternes besteht aber darin, dass die Maxima und Minima der Abweichung vom mittleren Orte zu anderen Zeiten eintreten. Ist z. B. $\odot = \lambda$, so ist die Parallaxe in Länge $= 0$, in Breite ein Maximum, hingegen die Aberration in Länge ein Maximum und in Breite $= 0$. Nach etwa drei Monaten ist $\odot = \lambda + 90^\circ$ geworden und hiemit dort ein Maximum eingetreten, wo früher der Werth 0 stattfand, und umgekehrt.

Nur bei einigen wenigen Fixsternen ist es aber bisher gelungen, eine jährliche Parallaxe mit Sicherheit nachzuweisen, die grösste ($p = 0''.9$) bei α Centauri, einem Sterne 1^{ter} Grösse auf der südlichen Halbkugel. Von den bei uns sichtbaren helleren Sternen mag nur der Polarstern (α Ursae minoris) angeführt werden, für welchen im Mittel aus mehreren Bestimmungen die jährliche Parallaxe $p = 0''.1$ mit einiger Sicherheit angenommen werden kann, übrigens nur auf die Rectascension (wegen des Factors $\sec \delta$) einen merklichen Einfluss erlangt.

Mittlere und scheinbare Oerter der Fixsterne.

73. Beobachtet man die Rectascension und Declination eines Fixsternes zur Zeit t , so findet man unmittelbar seinen scheinbaren (oder wahren) Ort, bezogen auf den Aequator und das scheinbare Aequinoctium zur Zeit t , und behaftet mit der Aberration der Fixsterne*). Befreit man dann den beobachteten Ort von der Aberration und Nutation, indem man den Betrag derselben, nach den im Vorhergehenden entwickelten Ausdrücken berechnet, mit entgegengesetztem Zeichen zu den beobachteten Coordinaten addirt, so erhält man den sogenannten mittleren Ort des Sternes, bezogen auf den mittleren Aequator und das mittlere Aequinoctium zur Zeit t .

Die Stern-Cataloge enthalten die mittleren Oerter der Sterne, nach der Rectascension geordnet. Da jedoch in Folge der Präcession diese Oerter mit der Zeit sich ändern, so geben die Cataloge die mittleren Oerter der Sterne für einen bestimmten Moment t_0 , die Epoche des Cataloges. Verlangt man dann den mittleren Ort für irgend eine andere Zeit t , so muss an den Ort des Cataloges noch die Präcession in der Zwischenzeit angebracht werden.

*) Hiebei wird von der Parallaxe, als verschwindend, abgesehen und vorausgesetzt, dass die Beobachtung wegen der Refraction bereits corrigirt sei, im Falle sie damit behaftet war.

74. Ausser der durch die Präcession bewirkten Veränderung sind die mittleren Oerter der Sterne noch einer kleinen Aenderung unterworfen, welche von der eigenen Bewegung der Fixsterne herrührt. Man lernt diese kennen, wenn man zwei durch einen längeren Zeitraum von einander getrennte Beobachtungen eines Sternes miteinander vergleicht. Befreit man beide Beobachtungen von der Aberration und reducirt dieselben auf ein gemeinschaftliches mittleres Aequinoctium, so ist der Unterschied in beiden Oertern das Resultat der Eigenbewegung in der Zwischenzeit. Die auf diese Weise gefundene Eigenbewegung ist eigentlich das Resultat zweier Bewegungen: einerseits der absoluten Bewegung des Sternes im Raume, anderseits einer bloss parallactischen Bewegung desselben, hervorgerufen durch die Bewegung unserer Sonne, an welcher auch die Planeten Theil nehmen und in Folge welcher sich der Standpunct des Beobachters ändert; so lange es sich aber bloss um die Oerter der einzelnen Sterne handelt, ist es nicht nothwendig, diese beiden Componenten von einander zu trennen. Die Eigenbewegungen der Fixsterne sind durchaus klein (die grösste bisher gefundene erreicht nicht 8'' jährlich im grössten Kreise), und können als gleichförmig oder der Zeit proportional und in einem grössten Kreise stattfindend angenommen werden. Die auf den Aequator bezogenen Componenten der Eigenbewegung (d. i. die Eigenbewegung in A. R. und Declination) sind mit der Zeit veränderlich, weil die Lage der Ebene des Aequators in Folge der Präcession sich im Raume ändert; doch sind diese Veränderungen nur für die dem Pole nahe stehenden Sterne merklich.

75. Um den mittleren Ort eines Sternes aus einem Cataloge, dessen Epoche $= t_0$ ist, für irgend eine andere Zeit t bequemer zu finden, wird in den Catalogen nebst der Eigenbewegung (*motus proprius*), im Falle diese für den betreffenden Stern bekannt ist, auch die jährliche Präcession in Rectascension und Declination, nach den Formeln (102) berechnet, angeführt. Diese ist aber bekanntlich selbst veränderlich und gilt daher in dem angeführten Betrage für die Epoche des Cataloges; die vollständigeren Cataloge enthalten dann noch die Veränderung der jährlichen Präcession in 100 Jahren (*Variatio saecularis*), wodurch die Rechnung sehr einfach wird*).

Sei p die jährliche Präcession für die Epoche t_0 des Cataloges, Δp die *Variatio saecularis*, t die Zeit, auf welche der mittlere Ort übertragen werden soll, also $t - t_0$ der Zeitraum, für welchen die Präcession gesucht wird, so ist:

$$p \quad \text{die jährliche Präcession zur Zeit } t_0,$$

$$p + \frac{\Delta p}{100} (t - t_0) \quad \text{die jährliche Präcession zur Zeit } t;$$

*) Differenzirt man die Glgn. (102) nach m, n, a, δ , so wie die (103) nach t , so erhält man die Aenderung der Präcession in 1 Jahre, durch deren Multiplication mit 100 sich die Veränderung in 100 Jahren ergibt.

das arithmetische Mittel aus beiden: $p + \frac{\Delta p}{200}(t - t_0)$ ist dann die Präcession für die Mitte beider Zeiten und gibt, mit $t - t_0$ multiplicirt, den Betrag der Präcession für die Zwischenzeit $t - t_0$. Der vollständige Ausdruck für die Veränderung des mittleren Ortes während der Zeit $t - t_0$ ist daher:

$$\left(p + \frac{\Delta p}{100} \frac{t - t_0}{2} + \text{mot. propr.}\right)(t - t_0),$$

und gilt sowohl für Rectascension als Declination.

76. Nach dem Vorhergehenden hat es keine Schwierigkeit, den mittleren Ort eines Sternes für irgend eine Zeit zu berechnen, wenn derselbe für eine bestimmte Epoche gegeben ist. Aus dem mittleren Orte findet man sodann den scheinbaren oder wahren Ort, wenn man zu ersterem den Betrag der Nutation und jährlichen Aberration*) hinzulegt, zu deren Berechnung die in den vorhergehenden Abschnitten entwickelten Formeln dienen. Da jedoch diese Reduction vom mittleren Ort auf den scheinbaren und umgekehrt sehr häufig vorkommt, so ist es nothwendig, diese Rechnung durch zweckmässig eingerichtete Hilfstafeln möglichst zu vereinfachen, deren von Bessel herührende Einrichtung auf folgender Umformung beruht.

Um den scheinbaren Ort eines Fixsternes für ein gegebenes Datum zu finden, suche man zunächst (nach §. 75) den mittleren Ort für den Anfang des betreffenden Jahres. Es seien nun α und δ die mittlere Rectascension und Declination zu Anfang des Jahres, τ die Zeit, in Bruchtheilen des tropischen Jahres ausgedrückt, vom Jahresanfang bis zu dem gegebenen Datum; α' , δ' die scheinbare Rectascension und Declination zur Zeit τ , so hat man, um α' , δ' zu erhalten, zu α und δ noch die Präcession und Eigenbewegung in der Zeit τ , ferner Nutation und jährliche Aberration hinzuzufügen. Bezeichnet man daher mit μ , μ' die jährliche Eigenbewegung in Rectascension und Declination, so ist, zufolge der Formeln (102), (106) und (108):

$\alpha' = \alpha + \tau(m + n \sin \alpha \operatorname{tg} \delta) + \tau \mu$	Präc. u. Eigenbew.	
$- 15''.8148 \sin \delta \delta + 0.1902 \sin 2 \delta \delta - 1.1644 \sin 2 \odot$			}
$+ 0''.1173 \sin (\odot - P) - 0''.0195 \sin (\odot + P)$			
$- \left[\begin{array}{l} 6''.8650 \sin \delta \delta - 0''.0825 \sin 2 \delta \delta + 0''.5055 \sin 2 \odot \\ - 0''.0509 \sin (\odot - P) + 0''.0085 \sin (\odot + P) \end{array} \right] \sin \alpha \operatorname{tg} \delta$			
$- \left[\begin{array}{l} 9''.2231 \cos \delta \delta - 0''.0897 \cos 2 \delta \delta + 0''.5510 \cos 2 \odot \\ + 0''.0093 \cos (\odot + P) \end{array} \right] \cos \alpha \operatorname{tg} \delta$			
$- 20''.4451 \cos \varepsilon \cos \odot \cos \alpha \sec \delta - 20''.4451 \sin \odot \sin \alpha \sec \delta$			
			Nutation
			Aberr.

*) Die tägliche Aberration bleibt hier ausser Betracht, indem diese, weil von der Polhöhe des Beobachtungsortes abhängig, bei jeder Beobachtung besonders berücksichtigt werden muss, wenn dies überhaupt, bei der Kleinheit dieser Correction, für nothwendig erachtet wird. Ebenso ist die jährliche Parallaxe im Allgemeinen verschwindend.

$$\delta' = \delta + \tau \cdot n \cos \alpha + \tau \mu' \dots \dots \dots \text{Präc. u. Eigenbew.}$$

$$\left. \begin{aligned} & - \left[\begin{aligned} & 6''.8650 \sin \delta \delta - 0''.0825 \sin 2 \delta \delta + 0''.5055 \sin 2 \odot \\ & - 0''.0509 \sin (\odot - P) + 0''.0085 \sin (\odot + P) \end{aligned} \right] \cos \alpha \\ & + \left[\begin{aligned} & 9''.2231 \cos \delta \delta - 0''.0897 \cos 2 \delta \delta + 0''.5510 \cos 2 \odot \\ & + 0''.0093 \cos (\odot + P) \end{aligned} \right] \sin \alpha \end{aligned} \right\} \text{Nutation}$$

$$\left. \begin{aligned} & - 20''.4451 \cos \odot (\sin \varepsilon \cos \delta - \cos \varepsilon \sin \delta \sin \alpha) \\ & - 20''.4451 \sin \odot \sin \delta \cos \alpha \end{aligned} \right\} \text{Aberr.}$$

Setzen wir nun:

$$\begin{aligned} 6''.8650 &= n i & 15''.8148 &= m i + h \\ 0.0825 &= n i' & 0.1902 &= m i' + h' \\ 0.5055 &= n i'' & 1.1644 &= m i'' + h'' \\ 0.0509 &= n i''' & 0.1173 &= m i''' + h''' \\ 0.0085 &= n i^{iv} & 0.0195 &= m i^{iv} + h^{iv}, \end{aligned} \tag{a}$$

wo m und n die beiden Constanten der Präcession in Rectascension und Declination [Gln. (103)] bedeuten, so können die obigen Ausdrücke in folgender Weise geschrieben werden:

$$\alpha' = \alpha + \left[\begin{aligned} & \tau - i \sin \delta \delta + i' \sin 2 \delta \delta - i'' \sin 2 \odot \\ & + i''' \sin (\odot - P) - i^{iv} \sin (\odot + P) \end{aligned} \right] (m + n \sin \alpha \operatorname{tg} \delta)$$

$$- \left[\begin{aligned} & 9''.2231 \cos \delta \delta - 0''.0897 \cos 2 \delta \delta + 0''.5510 \cos 2 \odot \\ & + 0''.0093 \cos (\odot + P) \end{aligned} \right] \cos \alpha \operatorname{tg} \delta$$

$$- 20''.4451 \cos \varepsilon \cos \odot \cos \alpha \sec \delta - 20''.4451 \sin \odot \sin \alpha \sec \delta$$

$$- h \sin \delta \delta + h' \sin 2 \delta \delta - h'' \sin 2 \odot + h''' \sin (\odot - P) - h^{iv} \sin (\odot + P)$$

$$+ \tau \mu.$$

$$\delta' = \delta + \left[\begin{aligned} & \tau - i \sin \delta \delta + i' \sin 2 \delta \delta - i'' \sin 2 \odot \\ & + i''' \sin (\odot - P) - i^{iv} \sin (\odot + P) \end{aligned} \right] n \cos \alpha$$

$$+ \left[\begin{aligned} & 9''.2231 \cos \delta \delta - 0''.0897 \cos 2 \delta \delta + 0''.5510 \cos 2 \odot \\ & + 0''.0093 \cos (\odot + P) \end{aligned} \right] \sin \alpha$$

$$- 20''.4451 \cos \odot (\sin \varepsilon \cos \delta - \cos \varepsilon \sin \delta \sin \alpha)$$

$$- 20''.4451 \sin \odot \sin \delta \cos \alpha$$

$$+ \tau \mu'.$$

Führen wir daher, nach Bessel, folgende Bezeichnungen ein:

$$\begin{aligned} A &= \tau - i \sin \delta \delta + i' \sin 2 \delta \delta - i'' \sin 2 \odot + i''' \sin (\odot - P) - i^{iv} \sin (\odot + P) \\ B &= -9''.2231 \cos \delta \delta + 0''.0897 \cos 2 \delta \delta - 0''.5510 \cos 2 \odot - 0''.0093 \cos (\odot + P) \\ C &= -20''.4451 \cos \varepsilon \cos \odot \\ D &= -20''.4451 \sin \odot \\ E &= -h \sin \delta \delta + h' \sin 2 \delta \delta - h'' \sin 2 \odot, \end{aligned} \tag{116}$$

$$\begin{aligned} a &= m + n \sin \alpha \operatorname{tg} \delta & a' &= n \cos \alpha \\ b &= \cos \alpha \operatorname{tg} \delta & b' &= -\sin \alpha \\ c &= \cos \alpha \sec \delta & c' &= \operatorname{tg} \varepsilon \cos \delta - \sin \alpha \sin \delta \\ d &= \sin \alpha \sec \delta & d' &= \cos \alpha \sin \delta, \end{aligned} \tag{117}$$

so erhalten wir:

$$\begin{aligned} \alpha' - \alpha &= Aa + Bb + Cc + Dd + E + \tau\mu, \\ \delta' - \delta &= Aa' + Bb' + Cc' + Dd' + \tau\mu'. \end{aligned} \quad (118)$$

Die Grössen A, B, C, D, E sind, wie man sieht, von dem Orte des Sternes ganz unabhängig und gelten daher für alle Sterne gemeinschaftlich; als Functionen der mit der Zeit veränderlichen Grössen $\delta\delta, \odot$ u. s. w. können dieselben in Tafeln gebracht werden, deren Argument die Zeit ist. Die Grösse E ist immer sehr klein und kann meist vernachlässiget werden. Die Grössen $a, b, c, d, a', b', c', d'$ hingegen hängen nur von dem Orte des Sternes ab; sie sind zwar mit diesem in Folge der Präcession veränderlich, doch ist diese Aenderung eine sehr langsame, so dass ihre Werthe, einmal berechnet, für längere Zeit beibehalten werden können, daher auch in manchen Stern-Catalogen die Logarithmen dieser Grössen aufgenommen sind. Man sieht, dass a, a' die jährliche Präcession des Sternes in A. R. und Declination bedeuten; eben so wird man leicht bemerken, dass $Cc + Dd$ die jährliche Aberration in A. R., $Cc' + Dd'$ die jährliche Aberration in Declination darstellt.

Die Grössen $i, i', \dots h, h', \dots$ findet man leicht aus den Gln. (a) mit Zuziehung der Gln. (103). Ihre Werthe sind für 1800:

$$\begin{aligned} i &= 0.34223, & i' &= 0.00411, & i'' &= 0.02520, & i''' &= 0.00254, & i^{iv} &= 0.00042, \\ h &= 0''.0572 & & & h'' &= 0''.0041 & & & & \end{aligned}$$

Die Grössen h', h''' und h^{iv} sind unmerklich. Für 1900 wird

$$i = 0''.34255, \quad h = 0''.0491, \quad h'' = 0''.0028;$$

die Werthe der anderen Grössen ändern sich nicht merklich.

In dem Ausdrücke von A können die beiden in i''' und i^{iv} multiplicirten Glieder in eines zusammengezogen werden. Setzt man nämlich:

$$\begin{aligned} (i''' - i^{iv}) \cos P &= q \cos Q \\ -(i''' + i^{iv}) \sin P &= q \sin Q, \end{aligned}$$

so wird:

$$i''' \sin(\odot - P) - i^{iv} \sin(\odot + P) = q \sin(\odot + Q).$$

Es ist aber für 1800: $P = 279^\circ 30'$; für 1900: $P = 281^\circ 13'$; hiemit wird die Summe dieser beiden Glieder:

$$\text{für 1800: } + 0.00294 \sin(\odot + 83^\circ 11')$$

$$\text{für 1900: } + 0.00293 \sin(\odot + 81^\circ 57')$$

In den Tabulis Regiomontanis hat nun Bessel Tafeln gegeben, welche die Logarithmen der Grössen A, B, C, D sammt der Grösse E von 1750 bis 1850 von 10 zu 10 Tagen berechnet enthalten, von Zech bis 1860, von Wolfers in den Tabulis Reductionum bis 1880 fortgesetzt wurden, und jährlich in den astronomischen Ephemeriden für das betreffende Jahr aufgenommen sind.

77. Im Vorhergehenden wurde der Ausdruck „Anfang des Jahres“ gebraucht, ohne diesen Moment näher zu bestimmen. Wählt man nun, wie gewöhnlich, hiefür den mittleren Mittag des 0^{ten} oder 1^{ten} Januar, so wird offenbar noch die Angabe des Meridians erfordert, auf dessen mittleren Mittag sich der Jahresanfang bezieht, weil dieser Epoche unter jedem Meridian ein anderer absoluter Zeitmoment entspricht.

Für die Einrichtung der oberwähnten Tafeln ist es aber von Vortheil, den Anfang des Jahres von einem absoluten, nicht an einen bestimmten Meridian, sondern vielmehr an die Bewegung der Sonne geknüpften Moment zu zählen; da nun am Anfang des Jahres die mittlere Länge der Sonne immer in der Nähe von 280° sich befindet [§. 67, Gl. A], so hat Bessel als Jahresanfang jenen Moment gewählt, in welchem die mittlere Länge der Sonne $= 280^{\circ}$ oder die Rectascension der mittleren Sonne $= 18^h 40^m$ ist; er zählt in diesem Augenblicke Januar 0.0, welches Datum gleichbedeutend ist mit December 31.0 des vorhergehenden Jahres, und nennt das in diesem Momente beginnende Jahr das fingirte Jahr (*annus fictus*). Für jenen Meridian, für welchen am 0. Januar im mittleren Mittag die mittlere Länge der \odot gleich 280° oder (§. 67) die Sternzeit $= 18^h 40^m$ ist, fällt also das fingirte Jahr mit dem bürgerlichen zusammen; dieser Meridian, welcher im Folgenden der Kürze wegen der Haupt-Meridian genannt werden mag, ist offenbar in jedem Jahre ein anderer, weil die Dauer eines Jahres nicht eine ganze Anzahl von Tagen beträgt.

Es ist leicht, die Lage des Haupt-Meridians zu bestimmen. Sei dieser PO (Fig. 24), k dessen Länge vom Meridiane von Paris PW , positiv gezählt, wenn PO östlich von Paris; E die mittlere Länge der Sonne im mittleren Mittage Januar 0, zu Paris. Da nun am 0. Januar im mittleren Mittag des Haupt-Meridians die mittlere Länge der Sonne oder die Rectascension der mittleren Sonne $= 280^{\circ} = 18^h 40^m$ ist, so ist k offenbar die Zeit, welche die mittlere Sonne braucht, um ihre Rectascension von $18^h 40^m$ auf E zu bringen, also:

$$k = \frac{E - 18^h 40^m}{\text{mittl. tägl. Beweg.}} = \frac{E - 18^h 40^m}{236^s.55536}.$$

Die Gl. (A) [§. 67] gibt die Epoche E nach den Sonnentafeln von Hansen; durch Substitution dieses Werthes und Ausführung der Division erhält man:

$$k = 0.289886 + 0.00779967 t + 0.000000034424 t^2 - \frac{1}{4} f,$$

wo $t =$ Jahrzahl $- 1850$, f der Rest nach der Division der Jahrzahl durch 4, und k in Theilen des Tages ausgedrückt ist. Durch Multiplication mit 24 kommt:

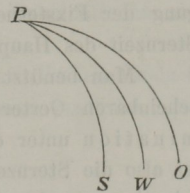


Fig. 24.

$$k = 6^h 57^m 26^s.13 + (11^m 13^s.8872)t + 0^s.002974 t^2 - f.6^h.$$

Man sieht leicht, dass $-k$, d. i. Januar 0.0 $-k$ die mittlere Pariser Zeit des Anfanges des *annus fictus* ist.

Z. B. Für 1869 ist $t=19$, $f=1$; hiemit wird $k = +0^d.188092 = +4^h 30^m 51^s.1$, d. i. im Jahre 1869 liegt der Hauptmeridian um $4^h 30^m 51^s.1$ östlich von Paris, und die mittlere Pariser Zeit des Anfanges des *annus fictus* ist 1869, Januar 0.0 $-(4^h 30^m 51^s.1) = 1868$, December 30, $19^h 29^m 8^s.9$.

Es sei nun *PS* der Meridian eines beliebigen Ortes *S*, dessen Länge von Paris (westlich positiv gezählt) $=d$, so ist $k+d$ die östliche Länge des Hauptmeridians in Bezug auf den Meridian von *S*, und wenn für letzteren irgend eine Ortszeit *T* gegeben ist, so ist $T+k+d$ die demselben Momente entsprechende Ortszeit des Hauptmeridians. Diese Relation gilt offenbar, es mag in der gegebenen Zeit *T* dem Monatsdatum die Tageszeit in mittlerer oder Sternzeit beigefügt sein, so lange man, wie gewöhnlich, das Datum nach mittleren Tagen fortlaufend zählt.

In den von Bessel zur Reduction der Sternörter gegebenen Tafeln bilden aber nicht die mittleren Tage, sondern die vom Anfange des fingirten Jahres gezählten Sterntage das Argument, also jene Tage, welche in dem Augenblicke beginnen, wo unter dem Hauptmeridiane die Sternzeit $=18^h 40^m$ ist, weil eben der Sterntag die Periode der täglichen Bewegung der Fixsterne ist. Diese Tafeln gelten daher unmittelbar für $18^h 40^m$ Sternzeit des Hauptmeridians.

Man benützt aber diese Tafeln vorzüglich, um aus dem mittleren die scheinbaren Oerter der Fixsterne (oder umgekehrt) zur Zeit ihrer Culmination unter einem bestimmten Meridiane zu berechnen; in diesem Falle ist also die Sternzeit irgend welchen Datums eines Ortes, nämlich die Culminationszeit des betreffenden Sternes ($=$ der Rectascension desselben) die gegebene Epoche, für welche die Grössen *A*, *B*, . . . der Tafel zu entnehmen sind. Das Argument, mit welchem in die Tafeln einzugehen ist, wird daher die seit Beginn des *annus fictus* bis zur gegebenen Culmination verfllossene Zeit sein, ausgedrückt in Sterntagen. Um diese zu finden, wird man offenbar nur zu bestimmen haben: 1) um wie viel die erste nach dem Anfange des fingirten Jahres eintretende Culmination von diesem Anfange abstand, und 2) die wievielte in der Reihe der auf einander folgenden Culminationen diejenige ist, für welche man in die Tafel eingehen will, welch' letztere Bestimmung sich leicht aus dem Datum ergeben wird.

Da nun das fingirte Jahr in dem Momente beginnt, in welchem die Rectascension der mittleren Sonne $=18^h 40^m$, oder die Sternzeit im mittleren Mittag des Hauptmeridians $=18^h 40^m$ ist, so wird von dieser Epoche bis zur nächstfolgenden Culmination eines Fixsternes, dessen Rectascension $=\alpha$

ist, unter dem Hauptmeridian die Zeit:

$$\alpha' = \alpha - 18^h 40^m, \text{ oder } \alpha' = \alpha + 24^h - 18^h 40^m = \alpha + 5^h 20^m$$

verfliessen, je nachdem $\alpha >$ oder $< 18^h 40^m$ ist. Zur Zeit dieser ersten Culmination des Sternes unter einem anderen Meridian, dessen westliche Länge vom Hauptmeridian $= k + d$ ist, wird daher vom Beginne des fingirten Jahres die Zeit:

$$\alpha' + k + d$$

verflossen sein. Diese Grösse ist daher das Argument, mit welchem in die Tafel für die erste Culmination am 0. Januar einzugehen ist.

Die Tafeln geben nun die Logarithmen der Grössen A , B , etc. von 10 zu 10 Sterntagen des *annus fictus* (Januar 0, 10, 20, etc.); das Argument für die Sternzeit α an irgend einem Datum des Jahres wird daher sein:

$$\text{Datum} + \alpha' + k + d,$$

vorausgesetzt, dass, da das Datum bekanntlich nach mittleren Tagen fortläuft, mit jedem mittleren Tage eine und nur eine Culmination des Fixsternes, dessen A. R. $= \alpha$ ist, sich vollzieht. Dies wird auch der Fall sein bis auf einen und zwar jenen mittleren Tag des Jahres, an welchem die mittlere Rectascension der Sonne $= \alpha$ wird, an welchem Tage nothwendig zwei Culminationen des Sternes stattfinden müssen*). Bis zu dieser Epoche bildet daher der obige Ausdruck das Argument; nach derselben ist demselben noch 1 Tag hinzuzufügen, damit in der Reihe der auf einander folgenden Culminationen nicht eine derselben verloren gehe.

Man kann daher kurz sagen: das Argument der Bessel'schen Tafeln für die Sternzeit α an irgend einem Datum eines Ortes, dessen westliche Länge vom Hauptmeridian $= k + d$, ist:

$$\text{Datum} + \alpha' + k + d + i,$$

wo 1) $\alpha' = \alpha - 18^h 40^m$, oder $\alpha' = \alpha + 5^h 20^m$, je nachdem $\alpha >$ oder $< 18^h 40^m$ ist; und 2) $i = 0$ vom Anfang des Jahres bis zu jenem Tage, an welchem die A. R. der mittleren Sonne $= \alpha$ wird; nach demselben $i = 1$ Tag oder $= 24^h$.

Hiebei ist d die westliche Länge des Ortes von Paris, und, für diesen Zweck hinreichend genau, in Theilen des Tages:

*) So ist z. B. die Rectascension, also die Sternzeit der Culmination, von α Ursae maj. im J. 1869 $= 10^h 55^m.6$, und die Sternzeit (d. i. die wahre A. R. der mittleren \odot) im mittleren Mittag zu Berlin:

am 4. September $10^h 54^m.4$,

am 5. September $10 58 4$.

Der Stern culminirt daher am 4. September zweimal, das erstemal $1^m.2$ nach dem Beginn dieses Tages, das zweitemal $2^m.8$ vor Anfang des 5. September.

$$k = 0.290 + 0.00780t - \frac{1}{4}f,$$

wo t und f die obige Bedeutung haben.

Es ist übrigens zu bemerken, dass die Tafel vermöge ihrer logarithmischen Form und des beträchtlichen Intervalls von 10 Tagen zur Interpolation nicht geeignet ist; man wird daher die Correctionen $\alpha' - \alpha$ und $\delta' - \delta$ zunächst für die Epochen der Tafel berechnen, und erst an diesen Correctionen die Interpolation vornehmen.

Beispiel. Man berechne eine Ephemeride des scheinbaren Ortes von α Cassiopejæ für August 1869, für die Zeit der oberen Culmination in Wien.

Der mittlere Ort für den Anfang des Jahres 1869.0 ist:

$$\alpha = 0^h 33^m 5^s.281, \quad \delta = + 55^\circ 49' 6''.75;$$

jährliche Eigenbewegung in A. R.: $\mu = + 0^s.0066$, in Decl.: $\mu' = + 0''.0645$; ferner hat man für 1869.0 nach den Glgn. (93) und (102):

$$\varepsilon = 23^\circ 27' 20''; \quad m = 46''.0650, \quad n = 20''.0529.$$

Hiemit berechnet man nach den Formeln (117):

$$\begin{aligned} \log a &= 0.5256, & \log b &= 8.9874, & \log c &= 9.0698, & \log d &= 8.2323, & \log \mu &= 7.820 \\ \log a' &= 1.2976, & \log b' &= 9.1580_n, & \log c' &= 9.0960, & \log d' &= 9.9131, & \log \mu' &= 8.810 \end{aligned}$$

Dem Berliner Jahrbuche für 1869 entnimmt man:

	$\log A$	$\log B$	$\log C$	$\log D$	E	$\log \tau$
Juli 29,	9.5061	0.7619	1.0382	1.2207 _n	-0 ^s .003	9.758
Aug. 8,	9.5403	0.7428	1.1238	1.1589 _n	-0.003	9.779
18,	9.5689	0.7228	1.1851	1.0720 _n	-0.003	9.798
28,	9.5930	0.7035	1.2281	0.9469 _n	-0.003	9.816

Man bildet nun nach Vorschrift der Formeln (118) die Grössen: $\log Aa$, $\log Bb$, etc. und erhält durch Addition der entsprechenden Zahlen:

	$\alpha' - \alpha$	$\delta' - \delta$
Juli 29	+2 ^s .636	-6''.68
Aug. 8	+3.018	-4.02
18	+3.353	-1.12
28	+3.641	+1.95,

welche Zahlen noch für die Epochen der Tafel gelten. Um dieselben auf die Zeit der oberen Culmination in Wien zu übertragen, hat man, behufs Bildung des Argumentes, für 1869: $k = + 0^d.188$ (Beisp. S. 182); Wien's Länge von Paris, östlich: $d = - 56^m 10^s.4 = - 0^d.039$, folglich $k + d = + 0^d.149$. Ferner, da $\alpha < 18^h 40^m$: $\alpha' = \alpha + 5^h 20^m = 5^h 53^m = 0^d.245$; endlich $i = 1^d$, weil die Rectascension der mittleren Sonne am 30. März, also vor der Zeit, für welche wir rechnen, der Rectascension α des Sternes gleich wird. Das Argument ist daher: Datum $+ 1^d + 0^d.245 + 0^d.149 =$ Datum $+ 1^d.394$. Man

hat also um $n = 1.394$ Tage nach vorwärts zu interpoliren; setzt man das 10tägige Intervall $= 1$, so ist $n = 0.1394$ oder genau genug $n = 0.14$. Hiedurch erhält man folgende Werthe der Correctionen, und endlich durch Hinzufügung derselben zum mittleren Orte am Anfange des Jahres die scheinbaren Orte für die Zeit der oberen Culmination in Wien:

	$\alpha' - \alpha$	$\delta' - \delta$	α'	δ'
Juli 29	+ 2 ^s .692	- 6 ^u .32	0 ^h 33 ^m 7 ^s .97	+ 55° 49' 0 ^u .4
Aug. 8	+ 3.068	- 3.62	8.35	3.1
18	+ 3.396	- 0.70	8.68	6.0
28	+ 3.678	+ 2.39	8.96	9.1

Der Nautical-Almanac gibt die Logarithmen der Hilfsgrößen A, B, C, D für jeden Tag des Jahres und zwar für die Zeit der mittleren Mitternacht von Greenwich; beim Gebrauche dieser Tafeln ist also einfach die mittlere Greenwicher Zeit das Argument. Dabei ist zu bemerken, dass die nach dem Vorgange Bessel's im Berliner Jahrbuche mit A, B, C, D bezeichneten Ausdrücke (116) im Nautical-Almanac in derselben Ordnung mit C, D, A, B bezeichnet sind, worauf bei der Combination mit den Größen a, b , etc. zu achten ist.

78. Das im Vorhergehenden gelehrt Verfahren zur Reduction vom mittleren auf den scheinbaren Ort ist dann sehr bequem, wenn man die Werthe von a, b, c, \dots für den betreffenden Stern einem Sterncataloge entnehmen kann, oder wenn eine ganze Reihe von Oertern eines Sternes, eine sogenannte Ephemeride desselben zu berechnen ist (wie im vorhergehenden Beispiel), weil dann die Constanten a, b, c, \dots für alle Oerter nur einmal zu berechnen sind. Sucht man aber nur einen einzelnen Ort, so bedient man sich mit Vortheil der folgenden gleichfalls von Bessel herrührenden Formeln.

Da, wie schon früher bemerkt, die Summen $Cc + Dd$, so wie $Cc' + Dd'$ in den Gln. (118) die jährliche Aberration des Sternes in A. R. und Declination darstellen, so kann man vermöge der Gln. (110), setzen:

$$Cc + Dd = h \sin(H + \alpha) \sec \delta,$$

$$Cc' + Dd' = h \cos(H + \alpha) \sin \delta + i \cos \delta,$$

wo die Größen h, H und i durch die Gln. (109) als Funktionen von \odot und ϵ gegeben sind, somit in Tafeln mit dem Argumente: Zeit gebracht werden können.

Die übrigen Glieder in (118) sind dann:

$$Aa + Bb + E = Am + An \sin \alpha \operatorname{tg} \delta + B \cos \alpha \operatorname{tg} \delta + E$$

$$Aa' + Bb' = An \cos \alpha - B \sin \alpha.$$

Setzt man nun:

$$f = Am + E, \quad An = g \cos G,$$

$$B = g \sin G,$$

so wird:

$$\begin{aligned} Aa + Bb + E &= g \sin(G + \alpha) \operatorname{tg} \delta + f, \\ Aa' + Bb' &= g \cos(G + \alpha), \end{aligned}$$

wo die Grössen g , G und f wieder nur von der Zeit abhängen und mit derselben als Argument tabulirt werden können.

Die vollständigen Formeln sind daher:

$$\begin{aligned} \alpha' - \alpha &= g \sin(G + \alpha) \operatorname{tg} \delta + h \sin(H + \alpha) \sec \delta + f + \tau \mu, \\ \delta' - \delta &= g \cos(G + \alpha) + h \cos(H + \alpha) \sin \delta + i \cos \delta + \tau \mu'. \end{aligned} \quad (119)$$

Das Berliner Jahrbuch gibt die Werthe von f , $\log g$, G , $\log h$, H , $\log i$ für jeden Tag des Jahres, der Nautical-Almanac von 5 zu 5 Tagen, beide für mittlere Mitternacht des Meridians der Ephemeride. Das Argument dieser Tafeln ist also die mittlere Zeit.

Beispiel. Man suche den scheinbaren Ort von α Cassiopejæ für 1869, August 18, obere Culmination zu Wien.

Es ist Sternzeit der Culmination $= 0^h 33^m 5^s = 14^h 43^m$ mittlere Wiener Zeit $= 14^h 31^m$ mittlere Berliner Zeit, für welche Zeit man dem Berliner Jahrbuche die Grössen:

$$f = + 17''.17, \quad \log g = 0.9614, \quad G = 35^\circ 0'.3, \quad \log h = 1.2855, \quad H = 126^\circ 15'.7, \\ \log i = 0.8293$$

entnimmt. Ferner ist $\mu = + 0''.099$, $\mu' = + 0''.0645$; $\tau = 0.632$.

Man hat nun: $\alpha = 8^\circ 16'.3$; $G + \alpha = 43^\circ 17'$, $H + \alpha = 134^\circ 32'$.

$\log g = 0.9614$	$\log h = 1.2855$	
$\log \sin(G + \alpha) = 9.8361$	$\log \sin(H + \alpha) = 9.8530$	$\log i = 0.8293$
$\log \cos(G + \alpha) = 9.8621$	$\log \cos(H + \alpha) = 9.8459_n$	$\log \cos \delta = 9.7496$
$\log \operatorname{tg} \delta = 0.1680$	$\log \sec \delta = 0.2504$	$\log i \cos \delta = 0.5789$
	$\log \sin \delta = 9.9176$	

$\log g \sin(G + \alpha) \operatorname{tg} \delta = 0.9655$	$\log h \sin(H + \alpha) \sec \delta = 1.3889$
$\log g \cos(G + \alpha) = 0.8235$	$\log h \cos(H + \alpha) \sin \delta = 1.0490_n$

$g \sin(G + \alpha) \operatorname{tg} \delta = + 9''.236$	$g \cos(G + \alpha) = + 6''.660$
$h \sin(H + \alpha) \sec \delta = + 24.485$	$h \cos(H + \alpha) \sin \delta = - 11.195$
$f = + 17.17$	$i \cos \delta = + 3.792$
$\tau \mu = + 0.062$	$\tau \mu' = + 0.041$
$\alpha' - \alpha = + 50''.95$	$\delta' - \delta = - 0''.70$
$= + 3^s.397$	

übereinstimmend mit dem im vorhergehenden §. erhaltenen Resultate.