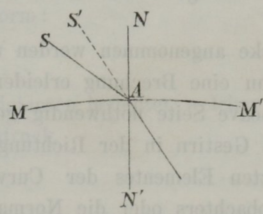
$$\operatorname{tg} M = \frac{\operatorname{tg} \varphi'}{\sin \theta},$$
$$\operatorname{tg} l = \frac{\cos (M - \varepsilon)}{\cos M} \operatorname{tg} \theta, \qquad \operatorname{tg} b = \operatorname{tg} (M - \varepsilon) \sin l. \tag{90}$$

Hiebei ist l in jenem Quadranten zu nehmen, welcher dem Zeichen von $\operatorname{tg} l$ entspricht, und dem $\cos l$ gleiches Zeichen mit $\cos \theta$ verleiht.

Die Refraction.

49. Das Licht pflanzt sich nur so lange geradlinig fort, als dasselbe den leeren Raum oder ein Mittel von gleichförmiger Dichte durchläuft. Tritt jedoch ein Lichtstrahl aus dem leeren Raume oder irgend einem Mittel in schiefer Richtung in ein anderes von verschiedener Dichte, so wird derselbe an der Trennungsfläche beider Mittel von seiner Richtung abgelenkt, er wird gebrochen. Man nennt den Strahl vor seinem Eintritte in das zweite Mittel den *einfallenden* Strahl, nach demselben den *gebrochenen* Strahl. Sei (Fig. 15) MM' die (ebene oder krumme) Trennungsfläche zweier Mittel von verschiedener Dichte, SA der einfallende, AB der gebrochene Strahl, NAN' die Normale der Trennungsfläche im Einfallspuncte A, welche das *Einfallsloth* genannt wird. Eine Ebene, durch den einfallenden Strahl und die Normale gelegt, heisst die *Einfallsebene*, der Winkel SAN, welchen der einfallende Strahl mit der Normale bildet, der *Einfallswinkel*, der Winkel BAN' des gebrochenen Strahles mit dem Einfallslothe der *Brechungswinkel*. Ist der Brechungswinkel (wie in der Figur) kleiner als der Einfallswinkel, so sagt man, der Strahl werde *zum* Einfallslothe gebrochen; es findet dies im allgemeinen statt, wenn das Licht aus einem dünneren in ein dichteres Mittel übergeht; im umgekehrten Falle sagt man, der Strahl werde *vom* Einfallslothe gebrochen. Ein Auge, welches sich in irgend einem Puncte des gebrochenen Strahles AB befindet, wird den leuchtenden Punct S, von welchem der Strahl ausgeht, in der Richtung BAS', also nicht an seinem wahren Orte erblicken.

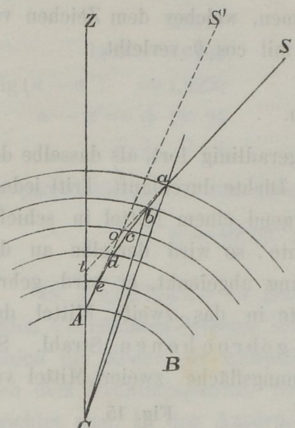
Fig. 15.



Diese Brechung des Lichtes erfolgt bekanntlich nach folgenden Gesetzen: 1) Der gebrochene Strahl liegt stets in der Einfallsebene. 2) Für zwei bestimmte brechende Mittel steht der Sinus des Einfallswinkels, bei jeder Grösse des letzteren, zum Sinus des Brechungswinkels in einem constanten Verhältniss, welches der Brechungsindex oder Brechungsexponent genannt wird.

50. Die Erde ist von einer Atmosphäre umgeben, deren Dichte an der Oberfläche der Erde am grössten ist und mit zunehmender Entfernung von derselben stetig abnimmt. Man kann sich dieselbe als aus concentrischen Schichten von sehr geringer Dicke und abnehmender Dichte bestehend vorstellen, so dass innerhalb jeder Schichte die Dichte der Luft als constant betrachtet werden darf. Sei, in Fig. 16, C der Mittelpunct der Erde, welche wir für die vorliegende Betrachtung ohne merklichen Fehler als kugelförmig annehmen können, AB die Oberfläche derselben. Gelangt nun ein Strahl von einem Gestirne S bei a in der Richtung Sa an die obere Grenze der Atmosphäre, d. i. an die erste Schichte, welche auf das Licht eine brechende Wirkung auszuüben vermag, so wird er daselbst gebrochen und zwar zum Einfallslothe Ca, gelangt in der Richtung ab an die nächste Schichte von grösserer Dichte, wird daselbst abermals zum Einfallslothe Cb gebrochen u. s. w., bis er nach einer Reihe von stets zum Einfallslothe erfolgenden Brechungen bei A in der Richtung eA das Auge des Beobachters trifft. Da nun die Dichte von oben nach unten stetig zunimmt, die Schichten also von unendlich kleiner Dicke angenommen werden müssen, so wird der Strahl in jedem Puncte seiner Bahn eine Brechung erleiden, diese Bahn selbst somit eine Curve sein, deren concave Seite nothwendig gegen die Erde gekehrt ist; der Beobachter wird das Gestirn in der Richtung AeS', d. i. in der Richtung der Tangente des letzten Elementes der Curve erblicken. Ist CAZ die Verticalrichtung des Beobachters oder die Normale im Puncte A, so muss, in Folge des ersten der beiden im vorhergehenden §. angeführten Gesetze, die durch diese Normale und das letzte Curvenelement Ae gelegte Verticalebene, in welcher somit die Richtung AS' nach dem scheinbaren Orte S' liegt, nothwendig die ganze Bahn des Lichtstrahles, also auch den wahren Ort S enthalten; durch die Refraction wird daher nur die Zenithdistanz eines Gestirnes vermindert, oder die Höhe vergrössert, das Azimuth desselben jedoch nicht geändert.

Fig. 16.



Der Winkel ZAS', welchen die scheinbare mit der Wirkung der Refraction behaftete Richtung mit der Verticalrichtung einschliesst, heisst die scheinbare Zenithdistanz, während der Winkel ZAS, welchen eine vom Beobachter zum Sterne gezogene Gerade mit der Verticalrichtung bildet, die wahre Zenithdistanz ist. Der Unterschied beider Winkel $= SAS'$ ist die Refraction, welche zur scheinbaren Zenithdistanz addirt, die wahre Zenithdistanz ZAS gibt*).

---

*) Der analytische Ausdruck der Refration, sowie die nach demselben berechnete Tafel gibt, strenge genommen, als Refraction den Winkel SoS', welchen der ein-

51. Der Betrag der Refraction, d. i. der Winkel SAS' (Fig. 16), wird unter übrigens gleichen Umständen, offenbar um so grösser sein, je dichter die Luft an der Oberfläche der Erde ist. Die Dichte der Luft hängt aber vom Luftdrucke und der Temperatur der Luft ab, welche beide Elemente durch das Barometer und Thermometer angegeben werden. In Folge dieser Abhängigkeit der Refraction von dem jeweiligen Zustande der Atmosphäre berechnet man die Refraction zunächst für einen gewissen Normalzustand der Atmosphäre, d. i. für einen bestimmten Luftdruck und eine bestimmte Temperatur; die für diesen Normalzustand geltende Refraction wird die mittlere Refraction genannt. Diese bedarf dann noch einer von dem beobachteten Barometer- und Thermometerstande abhängigen Verbesserung, um die wahre Refraction zu erhalten, welche zur Zeit der Beobachtung stattfand.

52. Bezüglich der Entwickelung des analytischen Ausdruckes der Refraction müssen wir in Anbetracht des grösseren Raumes, welchen dieselbe beansprucht, auf ausführlichere Werke verweisen *) und beschränken uns hier auf die Erklärung der Construction der darnach berechneten Tafeln. Die gebräuchlichsten sind die Bessel'schen Refractionstafeln. Bessel bringt den Ausdruck der wahren Refraction in folgende Form:

$$r = \alpha \operatorname{tg} z \,.\, \beta^{A} \gamma^{\lambda} ,$$

wo z die scheinbare Zenithdistanz, α einen Coefficienten bedeutet, welcher sich mit dieser, jedoch nur langsam, ändert; der Ausdruck

$$r_0 = \alpha \operatorname{tg} z$$

ist dann die mittlere Refraction. Eine Tafel gibt mit dem Argumente „scheinbare Zenithdistanz" oder „scheinbare Höhe" den $\log \alpha$. Der Factor β hängt vom Luftdrucke, also vom Barometerstande ab; da jedoch der durch das Barometer gemessene Luftdruck nicht allein von der Höhe der Quecksilbersäule, sondern auch von der Temperatur derselben abhängt, so setzt man

$$\beta = BT,$$

wo nun der Factor B von dem abgelesenen Barometerstande, der Factor T von der Temperatur der Quecksilbersäule, welche durch das am Barometer befestigte Thermometer (das sogenannte innere Thermometer) gemessen wird,

---

fallende Strahl Sa, gehörig verlängert, mit der scheinbaren Richtung AS' bildet; addirt man diesen Winkel zur scheinbaren Zenithdistanz, so erhält man als wahre Zenithdistanz den Winkel ZtS, statt des Winkels ZAS; der Unterschied beider Winkel ist der Winkel tSA und so klein, dass er nur beim Monde (in Folge seiner grossen Nähe), wenn derselbe nahe am Horizonte steht, merklich wird, in allen andern Fällen verschwindet.

*) Brünnow, Lehrbuch der sphärischen Astronomie, Berlin 1862. S. 164, ff. — Bruhns, die astronomische Strahlenbrechung. Leipzig, 1861.

abhängt. Zwei kleine Hilfstafeln geben mit dem Argumente: Beobachteter Barometerstand" den log B und mit dem Argumente: „Inneres Thermometer" den log T.

Der Factor γ hängt von der Temperatur der äusseren Luft ab, welche durch ein im Freien befindliches (das sogenannte äussere) Thermometer angegeben wird. Eine Hilfstafel gibt den log γ.

Die Exponenten A und λ endlich sind Zahlen, welche von der Zenithdistanz abhängen und erst bei grösseren Zenithdistanzen von der Einheit merklich abweichen.

Schreibt man den obigen Ausdruck von r logarithmisch, und BT statt β, so erhält man für den Logarithmus der wahren Refraction r in Bogensecunden den Ausdruck:

$$\log r = \log \alpha + \log \operatorname{tg} z + A(\log B + \log T) + \lambda \log \gamma. \qquad (91)$$

53. Von den folgenden Tafeln gibt:

Taf. I. den $\log \alpha$, ferner die Zahlen A und λ mit dem Argumente „scheinbare Zenithdistanz";

Taf. II. den $\log B$ mit dem Argumente „Barometerstand in Millimetern" *), und den $\log T$ mit dem Argumente „Temperatur in Graden Cels. am inneren Thermometer";

Taf. III. den $\log \gamma$ mit dem Argumente „Temperatur der Luft in Graden Celsius am äusseren Thermometer";

Taf. IV. endlich gibt die mittlere Refraction $r_0 = \alpha \operatorname{tg} z$, mit dem Argumente „scheinbare Zenithdistanz"; diese mittlere Refraction entspricht einem normalen Zustand der Atmosphäre bei $+48^0.75$ Fahr. $= 7^0.44$ R. $= 9^0.31$ C. Temperatur der Luft und 29.644 engl. Zoll $=$ 333.78 par. Linien $=$ 752.72 Millimeter Barometerstand bei $+10^0$ C. am inneren Thermometer.

---

*) Die Tafel erstreckt sich von 720 bis 780 Millim., was für Beobachtungsorte in den gewöhnlichen Seehöhen hinreicht; fällt bei grösserer Meereshöhe des Beobachtungsortes das Barometer unter 720 Millim., so findet man den $\log B$ mittelst der Formel:

$$\log B = \log b - 2.875934,$$

wo b den Barometerstand in Millimetern ausgedrückt bedeutet.

Ist die Barometer-Scala nach Pariser oder englischem Maass getheilt, so findet man den $\log B$ mittelst der Formeln:

$$\log B = \log b^L - 2.522759 = \log b^E - 1.471244,$$

wo b^L die Ablesung in Pariser Linien, b^E die Ablesung in englischen Zollen bedeutet.

Endlich ist bekanntlich:

$$c^0 = \tfrac{10}{8}\, r^0 = \tfrac{10}{18}\,(f^0 - 32^0),$$

wenn r^0 und f^0 die der Temperatur c^0 Cels. entsprechenden Lesungen an einem beziehungsweise nach Réaumur oder Fahrenheit getheilten Thermometer bedeuten.

Bessel's Refractions-Tafel.

Taf. I. Argument: Scheinbare Zenith-Distanz.

Zen.-Dist.	log α	λ
0°	1.76156	
10	1.76154	
20	1.76149	
30	1.76139	
35	1.76130	
40	1.76119	
45	1.76104	1.0018
50	1.76082	1.0023
52	1.76071	1.0026
54	1.76058	1.0029
56	1.76042	1.0034
58	1.76023	1.0040
60	1.76001	1.0046
61	1.75988	1.0049
62	1.75973	1.0054
63	1.75957	1.0058
64	1.75939	1.0063
65	1.75919	1.0068
66	1.75897	1.0075
67	1.75871	1.0083
68	1.75842	1.0092
69	1.75809	1.0101
70	1.75771	1.0111
71	1.75726	1.0124
72	1.75675	1.0139
73	1.75615	1.0156
74	1.75543	1.0175
75	1.75457	1.0197

Zen.-Dist.	log α	A	λ
75° 0′	1.75457		1.0197
20	1.75425		1.0204
40	1.75391		1.0212
76 0	1.75355		1.0220
20	1.75316		1.0230
40	1.75274		1.0241
77 0	1.75229	1.0026	1.0252
20	1.75180	1.0027	1.0264
40	1.75129	1.0028	1.0281
78 0	1.75072	1.0030	1.0299
20	1.75013	1.0031	1.0318
40	1.74947	1.0033	1.0338
79 0	1.74876	1.0035	1.0357
20	1.74799	1.0037	1.0377
40	1.74714	1.0039	1.0398
80 0	1.74623	1.0041	1.0420
20	1.74521	1.0043	1.0442
40	1.74412	1.0046	1.0466
81 0	1.74288	1.0049	1.0493
20	1.74155	1.0052	1.0523
40	1.74007	1.0056	1.0559
82 0	1.73845	1.0060	1.0600
20	1.73663	1.0065	1.0646
40	1.73459	1.0070	1.0697
83 0	1.73229	1.0075	1.0754
20	1.72974	1.0081	1.0815
40	1.72681	1.0088	1.0879
84 0	1.72346	1.0096	1.0951

Zen.-Dist.	log α	A	λ
84° 0′	1.72346	1.0096	1.0951
10	1.72160	1.0100	1.0992
20	1.71961	1.0105	1.1036
30	1.71749	1.0110	1.1082
40	1.71522	1.0115	1.1130
50	1.71279	1.0121	1.1178
85 0	1.71020	1.0127	1.1229
10	1.70772	1.0133	1.1283
20	1.70505	1.0140	1.1342
30	1.70188	1.0147	1.1408
40	1.69816	1.0155	1.1478
50	1.69384	1.0163	1.1549
86 0	1.68908	1.0172	1.1624
10	1.68383	1.0182	1.1706
20	1.67813	1.0192	1.1794
30	1.67204	1.0204	1.1888
40	1.66560	1.0216	1.1989
50	1.65869	1.0230	1.2098
87 0	1.65114	1.0244	1.2215
10	1.64286	1.0261	1.2341
20	1.63353	1.0278	1.2477
30	1.62278	1.0298	1.2624
40	1.61041	1.0318	1.2783
50	1.59618	1.0342	1.2955
88 0	1.57995	1.0368	1.3141
30	1.51530	1.0465	1.3797
89 0	1.40764	1.0593	1.4653
30	1.18228	1.0780	1.5789

Taf. II. Factor B, abhängig vom Barometer.

Factor T, abhängig vom inneren Thermometer.

Millimeter	log B	Millimeter	log B	Millimeter	log B	Cent.-Grad	log T
720	— 0.01860	740	— 0.00670	760	+ 0.00488	— 20°	+ 0.00140
722	— 0.01740	742	— 0.00553	762	+ 0.00602	— 15	+ 0.00105
724	— 0.01619	744	— 0.00436	764	+ 0.00716	— 10	+ 0.00070
726	— 0.01500	746	— 0.00319	766	+ 0.00830	— 5	+ 0.00035
728	— 0.01380	748	— 0.00203	768	+ 0.00943	0	0.00000
730	— 0.01261	750	— 0.00087	770	+ 0.01056	+ 5	— 0.00035
732	— 0.01142	752	+ 0.00028	772	+ 0.01168	+ 10	— 0.00070
734	— 0.01024	754	+ 0.00144	774	+ 0.01281	+ 15	— 0.00105
736	— 0.00906	756	+ 0.00259	776	+ 0.01393	+ 20	— 0.00140
738	— 0.00788	758	+ 0.00374	778	+ 0.01505	+ 25	— 0.00175
740	— 0.00670	760	+ 0.00488	780	+ 0.01616	+ 30	— 0.00210

Taf. III. Factor γ, abhängig vom äussern Thermometer.

Cent.-Grad	log γ	Cent.-Grad	log γ	Cent.-Grad	log γ	Cent.-Grad	log γ
−20°	+0.04734	0°	+0.01448	+12°	−0.00410	+24°	−0.02192
−15	+0.03889	+1	+0.01290	+13	−0.00562	+25	−0.02338
−10	+0.03060	+2	+0.01133	+14	−0.00713	+26	−0.02483
−9	+0.02896	+3	+0.00976	+15	−0.00863	+27	−0.02627
−8	+0.02733	+4	+0.00820	+16	−0.01013	+28	−0.02771
−7	+0.02570	+5	+0.00664	+17	−0.01162	+29	−0.02914
−6	+0.02408	+6	+0.00509	+18	−0.01311	+30	−0.03057
−5	+0.02247	+7	+0.00354	+19	−0.01459	+31	−0.03200
−4	+0.02086	+8	+0.00200	+20	−0.01607	+32	−0.03342
−3	+0.01926	+9	+0.00047	+21	−0.01754	+33	−0.03483
−2	+0.01766	+10	−0.00106	+22	−0.01901	+34	−0.03624
−1	+0.01607	+11	−0.00259	+23	−0.02047	+35	−0.03765
0	+0.01448	+12	−0.00410	+24	−0.02192	+40	−0.04460

Taf. IV. Mittlere Refraction.

Scheinb. Zenith-Dist.	Mittlere Refr.	Scheinb. Zenith-Dist.	Mittlere Refr.	Scheinb. Zenith-Dist.	Mittlere Refr.	Scheinb. Zenith-Dist.	Mittlere Refr.	Scheinb. Zenith-Dist.	Mittlere Refr.
0°	0″.0	38°	0′ 45″.1	60°	1′ 39″.7	76° 0′	3′ 47″.4	83° 0′	7′ 19″.7
5	5.1	39	0 46.7	61	1 43.8	20	3 52.9	20	7 39.2
10	10.2	40	0 48.4	62	1 48.2	40	3 58.8	40	8 0.3
15	15.5	41	0 50.2	63	1 52.8	77 0	4 4.9	84 0	8 23.3
20	21.0	42	0 51.9	64	1 57.8	20	4 11.2	20	8 48.4
21	22.2	43	0 53.8	65	2 3.2	40	4 18.0	40	9 16.0
22	23.3	44	0 55.7	66	2 8.9	78 0	4 25.0	85 0	9 46.5
23	24.5	45	0 57.7	67	2 15.2	20	4 32.4	20	10 21.2
24	25.7	46	0 59.7	68	2 21.9	40	4 40.2	40	10 58.6
25	26.9	47	1 1.8	69	2 29.3	79 0	4 48.5	86 0	11 38.9
26	28.2	48	1 4.0	70	2 37.3	20	4 57.2	20	12 23.7
27	29.4	49	1 6.3	70°30′	2 41.6	40	5 6.4	40	13 15.0
28	30.7	50	1 8.7	71 0	2 46.1	80 0	5 16.2	87 0	14 14.6
29	32.0	51	1 11.2	71 30	2 50.8	20	5 26.5	20	15 23.4
30	33.3	52	1 13.8	72 0	2 55.8	40	5 37.6	40	16 40.7
31	34.7	53	1 16.5	72 30	3 1.0	81 0	5 49.3	88 0	18 8.6
32	36.1	54	1 19.3	73 0	3 6.6	20	6 1.8	20	19 51.9
33	37.5	55	1 22.3	73 30	3 12.4	40	6 15.2	40	21 55.6
34	38.9	56	1 25.4	74 0	3 18.6	82 0	6 29.6	89 0	24 24.6
35	40.4	57	1 28.7	74 30	3 25.1	20	6 45.1	20	27 22.7
36	41.9	58	1 32.1	75 0	3 32.1	40	7 1.7	40	30 52.3
37	43.5	59	1 35.8	75 30	3 39.5	83 0	7 19.7	90 0	34 54.1
38	45.1	60	1 39.7	76 0	3 47.4				

Beispiel. Die beobachtete scheinbare Zenithdistanz sei $z = 78^0\,4'\,27''.3$; Barom.: 746.3 Millim.; inn. Therm.: $+16^0.4$ C.; äusseres Therm.: $+14^0.8$.

Wir erhalten aus Taf. I. für $z = 78^0\,4'\,27''.3$:

$$\log\alpha = 1.75059,\quad A = 1.0030,\quad \lambda = 1.0303;$$

$$\begin{array}{lr}
\text{aus Taf. II. für 746.3 Millim.:} & \log B = -0.00302 \\
\text{für } +16^0.4 \text{ Cels.:} & \log T = -0.00115 \\
\hline
 & \log B + \log T = -0.00417 \\
\text{aus Taf. III. für } +14^0.8 \text{ C.:} & \log\gamma = -0.00833.
\end{array}$$

Hiernach ist die Rechnung folgende:

$$\begin{array}{rl}
\log\alpha = & 1.75059 \\
\log\operatorname{tg} z = & 0.67530 \\
A(\log B + \log T) = & -0.00418 \\
\lambda\log\gamma = & -0.00858 \\
\hline
\log r = & 2.41313, \quad r = 258''.90 = 4'\,18''.90.
\end{array}$$

Die wahre Zenithdistanz ist daher $= 78^0\,4'\,27''.3 + 4'\,18''.90 = 78^0\,8'\,46''.20$.

Ist die wahre Zenithdistanz gegeben, so wird man durch Anbringung der mittleren Refraction, welche man der Tafel IV. entnimmt, zunächst einen genäherten Werth der scheinbaren Zenithdistanz bilden, mit welchem man dann aus Taf. I. die Werthe von $\log\alpha$, A und λ erhält.

Beispiel. Es sei gegeben die wahre Zenithdistanz $= 78^0\,8'\,46''.20$; Barometer, inneres und äusseres Thermometer wie im vorhergehenden Beispiel.

Man findet aus Taf. IV. in der Gegend von $78^0\,8'$ die mittlere Refraction $= 4'.5$ und hat daher $78^0\,4'.3$ als genäherte scheinbare Zenithdistanz, womit man aus Taf. I. erhält:

$$\log\alpha = 1.75059,\quad A = 1.0030,\quad \lambda = 1.0303,$$

welche Werthe mit den oben erhaltenen übereinstimmen, und daher in Verbindung mit den Werthen von B, T, γ wieder für die wahre Refraction den Werth $r = 4'\,18''.90$ geben, womit die scheinbare Zenithdistanz

$$= 78^0\,8'\,46''.20 - 4'\,18''.90 = 78^0\,4'\,27''.30$$

wird.

54. Aus Taf. I. ersieht man, dass die Exponenten A und λ erst bei grossen Zenithdistanzen sich merklich von der Einheit entfernen; ist daher die Zenithdistanz nicht zu gross, so kann man $A = \lambda = 1$ annehmen, und erhält dann, wenn man noch r_0 statt $\alpha\operatorname{tg} z$ schreibt, für die wahre Refraction den einfacheren Ausdruck: $r = r_0 \,.\, BT\gamma$, oder:

$$\log r = \log r_0 + \log B + \log T + \log\gamma; \tag{92}$$

die mittlere Refraction r_0 kann aus Taf. IV. genommen werden, wenn die Hundertel der Secunden unbeachtet bleiben können; sollen jedoch diese in der Rechnung noch mitgenommen werden, so ist die mittlere Refraction mittelst Taf. I. nach dem Ausdrucke $r_0 = \alpha\operatorname{tg} z$ zu berechnen.

Beispiel. Scheinbare Zenithdistanz: $63^0\,8'\,15''.71$; Barometer 761.7 Mm.; inneres Thermometer $+5.4$ C.; äusseres Thermometer $+3.8^0$. C.

Taf. IV. gibt für 63° 8′.3, die mittlere Refraction $r_0 = 1' 53''.5 = 113''.5$; man erhält daher:

$$\begin{aligned}\log r_0 &= 2.05500\\ \log B &= +0.00585\\ \log T &= -0.00038\\ \log \gamma &= +0.00851\\ \hline \log r &= 2.06898, \quad r = 117.2 = 1' 57''.2.\end{aligned}$$

Nach der genaueren Formel (91) findet man 1′ 57″.22.

Wie aus Taf. I. erhellt, ändert sich der Werth des Coefficienten α nur wenig mit der Zenithdistanz, oder, mit andern Worten, die mittlere Refraction ist der Tangente der scheinbaren Zenithdistanz nahe proportional, so lange diese nicht beträchtlich gross wird; bis $z = 65^0$ bis 70^0 kann $\alpha = 57''.5$ als mittlerer Werth angenommen werden. Die einfache Formel:

$$r = 57''.5 \operatorname{tg} z$$

gibt daher die mittlere Refraction für mässige Zenithdistanzen; bis zu $z = 65^0$ erreicht der Fehler derselben nicht 0″.2.

55. Bei der Entwickelung der Refractionsformeln geht man von der schon in §. 50 erwähnten Annahme aus, dass die Atmosphäre aus concentrischen Schichten bestehe, deren Dichte von unten nach oben nach einem bestimmten Gesetze abnimmt; der wirkliche Zustand der Atmosphäre wird aber in Folge der fortwährend vor sich gehenden Störungen des Gleichgewichtes dieser Annahme nie vollständig entsprechen und daher die nach den Formeln oder darauf beruhenden Tafeln berechnete Refraction von der wirklich stattfindenden mehr oder weniger verschieden sein. Durch Vergleichung der nach seinen Tafeln berechneten Refractionen mit den beobachteten hat Bessel folgende Werthe des wahrscheinlichen Fehlers der Tafeln für verschiedene Zenithdistanzen erhalten:

für $z =$	45°,	60°,	75°,	80°,	85°,	86°,	87°,	88°,	89°,	89° 30′:
w. F.: $= \pm$	0″.27	0″.34	0″.66	0″.92	1″.7	2″.4	3″.9	7″.7	16″.8	20″.0.

Bei mässigen Zenithdistanzen wird daher die wahrscheinliche Unsicherheit der Refraction auf etwa $\frac{1}{4}$ Secunde anzunehmen sein, nimmt aber rasch zu, sobald die Zenithdistanz über 60^0 hinaus wächst. In der Nähe des Horizontes ist die Refraction immer einer beträchtlichen Unsicherheit unterworfen, in Folge der Länge des Weges, welchen die Lichtstrahlen in diesem Falle in den nahe an der Oberfläche der Erde befindlichen, dichteren Schichten der Atmosphäre zurückzulegen haben, deren meteorologischer Zustand in grösserer Entfernung vom Beobachtungsorte oft sehr beträchtlich von jenem abweichen kann, welcher durch das am Beobachtungsorte befindliche Barometer und Thermometer angegeben wird.

Es ist selbstverständlich, dass, wenn es sich um genaue Beobachtungen handelt, Barometer und Thermometer gehörig geprüft und untersucht sein müssen, da die Angaben dieser Instrumente gewöhnlich mit einem grösseren oder geringeren Fehler behaftet sind. Ebenso ist klar, dass das äussere Thermometer im Freien so angebracht sein muss, dass es die Temperatur der Luft möglichst richtig angebe, also nicht nur vor den directen Sonnenstrahlen, sondern auch vor der strahlenden Wärme benachbarter Objecte gehörig geschützt sei.

56. Da wir in Folge der Refraction die Gestirne in einer grösseren Höhe erblicken, als dieselben wirklich einnehmen, so wird durch dieselbe auch der Aufgang der Gestirne beschleunigt, der Untergang verzögert. Differenzirt man die bekannte Gleichung

$$\cos z = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos t$$

nach z und t, so kommt:

$$\sin z\, dz = \cos\varphi \cos\delta \sin t\, dt,$$

somit für den Horizont, wo $z = 90^0$:

$$dt = \frac{dz}{\cos\varphi \cos\delta \sin t_0},$$

welche Gleichung die der Aenderung dz der Zenithdistanz entsprechende Aenderung des Stundenwinkels angibt. Nun beträgt die Refraction im Horizont nahe $35' = 140^s$; die durch die Refraction bewirkte Beschleunigung, beziehungsweise Verzögerung des Auf- und Unterganges ist daher in Zeitsecunden:

$$dt = \frac{140^s}{\cos\varphi \cos\delta \sin t_0}.$$

Beispiel. Für den Stern Aldebaran ($\alpha = 4^h\, 28^m\, 20^s.9$, $\delta = +16^0\, 14'\, 30''$) haben wir in §. 21 den Stundenwinkel des Auf- und Unterganges in Wien ($\varphi = 48^0\, 12'$) erhalten: $t_0 = 109^0\, 0'\, 54'' = 7^h\, 16^m\, 3^s.6$. Mit diesem Werthe findet man $dt = 231^s.4 = 3^m\, 51^s.4$; in Folge der Wirkung der Refraction geht also der Stern um $3^m\, 51^s.4$ früher auf und später unter.

Reduction beobachteter Zenithdistanzen.

57. Hat man mit irgend einem Instrumente, welches wir hier als fehlerfrei voraussetzen, die Zenithdistanz eines Gestirnes beobachtet, so ist dieselbe mit dem Einflusse der Refraction und Parallaxe behaftet; man hat daher in allen Fällen zunächst die Beobachtung von der Refraction zu befreien, und sodann durch Anbringung der Parallaxe auf den Mittelpunct der Erde zu reduciren.

Sei Z die beobachtete Zenithdistanz, r die zugehörige nach der vorhergehenden Vorschrift berechnete Refraction, so ist:

1) im Falle eines Fixsternes

$$z = Z + r$$

die geocentrische Zenithdistanz, weil für Fixsterne, in Folge ihrer im Verhältniss zum Erdhalbmesser unendlich grossen Entfernung, die Parallaxe $= 0$ ist.

2) Im Falle des Mondes ist Z die beobachtete Zenithdistanz des obern oder untern Mondrandes. Bezeichnet man daher mit R' den durch die Parallaxe vergrösserten Mond-Halbmesser, so ist:

$$z' = Z + r \pm R' \qquad (\alpha)$$

die von der Refraction befreite, vom Beobachtungsorte aus gesehene Zenithdistanz des Mondcentrums; ist nun z die geocentrische Zenithdistanz des Mondmittelpunctes, und $z' - z$ die Höhenparallaxe, so hat man:

$$z = z' - (z' - z) = Z + r \pm R' - (z' - z),$$

wo $z' - z$ nach Gl. (77) zu berechnen ist.

Weil aber, um R' zu finden, die Kenntniss von z' schon erfordert wird, so setze man zunächst: $z' = Z + r \pm R$, wo R den aus den Ephemeriden bekannten geocentrischen Mond-Halbmesser bedeutet, und berechne mit diesem Werthe von z' mittelst der Gl. (81) einen genäherten Werth von R', womit man sofort einen genügend genauen Werth von z' erhält, um $(z' - z)$ und R' scharf berechnen zu können.

Beispiel. Gesetzt, man habe 1860, März 6, 8^h mittlere Zeit in Greenwich die scheinbare Zenithdistanz des untern Mondrandes beobachtet und erhalten:

$$Z = 63^0\, 8'\, 15''.71;$$

Barom. 761.7 Millim.; inneres Therm. $+5^0.4$; äuss. Therm. $+3^0.8$ C. Man hat nun:

Beobachtete scheinb. Zenithdistanz	$Z = 63^0\ 8'\ 15''.71$
Refraction (vergl. Beisp. §. 54)	$r = +\ 1\ 57\ .22$
Scheinbare, von der Refraction befreite Zenithdistanz des untern Mondrandes	$= 63^0\ 10'\ 12''.93$

Subtrahirt man hievon den geocentrischen Mondhalbmesser $R = 16'\ 46''.1$ *), so erhält man einen genäherten Werth $z' = 62^0\ 53'.5$ der scheinbaren Zenithdistanz des Mondcentrums, mit welchem man nach Gl. (81) den genäherten Werth $R' = 16'\ 54''.4$, und mit diesem den genaueren Werth $z' = 62^0\ 53'\ 18''.5$ findet. Hiemit ergibt sich nun nach Gl. (77):

die Parallaxe in Zenithdistanz:	$-(z' - z) = -\ 54\ 29\ .85$

Durch Verbindung der Parallaxe mit obigem Werthe von z' erhält man nun die genäherte geocentrische Zenithdistanz $z = 61^0\ 58'\ 48''.7$, und mit diesem Werthe und dem Werthe von z', nach Gl. (76):

Den vergrösserten Mondhalbmesser	$R' = -\ 16\ 54\ .49$
Geocentrische Zenithdistanz	$= 61^0\ 58'\ 48''.59$

Wird, wie dies häufig der Fall ist, nicht die äusserste Schärfe der Rechnung erfordert, so werden, wie aus dem Beispiele selbst erhellt, oft schon

*) Siehe das Beispiel zu §. 42.

die genäherten Werthe genügen. Auch kann man in solchem Falle die Berechnung des vergrösserten Halbmessers umgehen, indem man die Parallaxe nach Gl. (77) unmittelbar für den beobachteten Mondrand sucht; durch Anbringung derselben an die beobachtete von der Refraction befreite Zenithdistanz ergibt sich die geocentrische Zenithdistanz des beobachteten Mondrandes, zu welcher nur noch der geocentrische Halbmesser mit seinem Zeichen hinzuzulegen kommt. Nach diesem Verfahren ist die Rechnung folgende:

Beobachtete Zenithdistanz	$z = 63^0\ 8'\ 15''.71$
Refraction	$r = +\ \ 1\ 57\ .22$
Scheinbare, von der Refraction befreite Zenithdistanz des untern Mondrandes	$63^0\ 10'\ 12''.93$
Parallaxe [nach Gl. (77)]	$-\ 54\ 38\ .07$
Geocentrischer Halbmesser	$-\ 16\ 46\ .1$
Geocentrische Zenithdistanz	$61^0\ 58'\ 48''.76$

Der Unterschied gegen den oben erhaltenen Werth beträgt $0''.17$ und rührt davon her, dass bei letzterem Verfahren die offenbar nicht ganz richtige Annahme gemacht wird, als wäre die Horizontalparallaxe für den Mondrand dieselbe als für den Mittelpunct; der hieraus hervorgehende Fehler kann jedoch $0''.2$ nicht überschreiten.

3) Im Falle die Zenithdistanz der S o n n e oder eines P l a n e t e n beobachtet wurde, bleibt das Verfahren dasselbe wie beim Monde, nur vereinfacht durch den Umstand, dass für diese Gestirne die Vergrösserung des Halbmessers als verschwindend klein hinwegfällt. Die Berechnung der Parallaxe geschieht immer genügend genau nach Gl. (80).

FÜNFTES CAPITEL.

VON DEN ÄNDERUNGEN DER ÖRTER DER GESTIRNE AN DER SCHEINBAREN HIMMELSKUGEL, WELCHE AUS DEN ÄNDERUNGEN DER LAGE DER COORDINATEN-EBENEN, UND AUS DER JÄHRLICHEN BEWEGUNG DER ERDE ENTSPRINGEN.

58. Die Oerter der Gestirne an der scheinbaren Himmelskugel werden bekanntlich durch sphärische Coordinaten bestimmt, welche sich auf eine der beiden Grundebenen des Aequators oder der Ekliptik beziehen, und es bildet der eine der beiden Durchschnittspuncte dieser zwei grössten Kreise (der Frühlingspunct) in beiden Systemen den gemeinschaftlichen Ursprung je einer Coordinate, nämlich der Rectascension in dem einen, der Länge in dem andern Systeme. Die Lage dieser beiden Grundebenen im Raume ist aber keine unveränderliche; sowohl die Ebene des Aequators als der Ekliptik sind vielmehr in zwar sehr langsamen doch fortwährenden Bewegungen begriffen, in Folge welcher sich sowohl die gegenseitige Neigung beider Ebenen als auch die Richtung ihrer Durchschnittslinie, also der Ort des Frühlingspunctes am Himmel, beständig verändern. Die Längen und Breiten der Sterne, so wie