Was endlich die Umwandlung der Sternzeit in wahre Zeit und umgekehrt betrifft, so ist es am einfachsten, zuerst von der gegebenen Zeit nach obiger Vorschrift auf mittlere Zeit überzugehen, und diese sodann in die gesuchte Zeit zu verwandeln.

VIERTES CAPITEL.

VON DER PARALLAXE UND REFRACTION.

37. Durch die Beobachtungen erhält man unmittelbar den Ort der Gestirne, an welchem dieselben vom Standpuncte des Beobachters auf der Oberfläche der Erde gesehen werden, während die astronomischen Tafeln und Ephemeriden jenen Ort geben, an welchem dieselben vom Mittelpuncte der Erde aus erscheinen. Beide Richtungen werden nur dann als parallel zu betrachten sein, wenn die Entfernung des Gestirnes im Verhältnisse zum Halbmesser der Erde als unendlich gross angenommen werden kann, wie dies bei den Fixsternen der Fall ist. Ist aber der Erdhalbmesser nicht verschwindend klein im Verhältniss zur Entfernung des Gestirnes, wie bei Sonne, Mond, Planeten und Cometen, so schliessen beide Richtungen einen Winkel ein, welcher die Parallaxe genannt wird. Sollen dann die beobachteten Oerter dieser Gestirne mit den aus den Ephemeriden entnommenen vergleichbar werden, so muss man im Stande sein, den beobachteten Ort auf den Mittelpunct der Erde zu reduciren und umgekehrt.

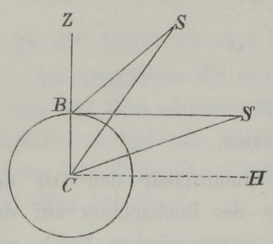
Das Licht, welches von den Gestirnen kommt, muss ferner auf seinem Wege zu unserem Auge durch die Atmosphäre gehen, von welcher unsere Erde umgeben ist, und erleidet in dieser eine Brechung, wodurch die Strahlen von ihrer geraden Richtung abgelenkt werden Die Richtung, welche der Strahl bei seinem Eintritte in das Auge besitzt, und in welcher wir das Gestirn erblicken, ist daher verschieden von derjenigen, welche ohne Dazwischenkunft der Atmosphäre stattfinden würde, und der Unterschied beider Richtungen heisst die Refraction, oder wohl auch die astronomische Refraction zum Unterschiede von der irdischen, welche dann in Betracht kommt, wenn das beobachtete Object sich in der Atmosphäre der Erde befindet. Wir müssen daher die Mittel besitzen, um den beobachteten Ort eines Gestirnes von dem Einflusse der Refraction zu befreien.

Die Parallaxe.

38. Unter Parallaxe versteht man im Allgemeinen den Unterschied der Richtungen der geraden Linien, welche von zwei Puncten zu dem Gestirne gezogen werden, also den Winkel, welchen die beiden Geraden am Gestirne einschliessen; im folgenden wird immer angenommen, dass der eine dieser Puncte der Mittelpunct der Erde, der andere irgend ein Punct auf ihrer Oberfläche sei.

Nehmen wir zunächst die Erde als kugelförmig an, und sei C (Fig. 9) der Mittelpunct, B der Ort des Beobachters auf der Oberfläche derselben, CBZ die Verticalrichtung, d. i. die Richtung nach dem Zenith des Beobachters, BS' und CH senkrecht auf CZ also horizontal und S ein Gestirn in messbarer Entfernung von der Erde; dann ist der Winkel $ZBS = z'$ die scheinbare Zenithdistanz, der Winkel $ZCS = z$ die wahre oder geocentrische Zenithdistanz; die Complemente dieser Winkel zu 90^0, nämlich $SBS' = h'$ und $SCH = h$ sind die scheinbare und beziehungsweise die wahre oder geocentrische Höhe des Gestirnes; der Winkel $BSC = p'$ ist die Parallaxe in Zenithdistanz oder die Höhenparallaxe. Man hat nun unmittelbar aus der Figur: $\angle ZBS - ZCS = BSC$, d. i.:

Fig. 9.



$$z' - z = h - h' = p',$$

somit:

$$z = z' - p', \quad h = h' + p'.$$

Durch die Wirkung der Parallaxe wird also, wie man sieht, die Zenithdistanz vergrössert, die Höhe vermindert.

Setzt man den Halbmesser der Erde $BC = \varrho$, die Entfernung des Gestirnes vom Mittelpunct der Erde $CS = \varDelta$, so folgt aus dem Dreiecke BCS:

$$\sin p' = \frac{\varrho}{\varDelta} \sin z'.$$

Für $z' = 0$, d. i. wenn das Gestirn im Zenith steht, wird $p' = 0$; hingegen wird p' ein Maximum, wenn $z' = 90^0$, d. i. wenn das Gestirn in S', im Horizonte des Beobachters sich befindet. Die in letzterem Falle stattfindende Parallaxe $BS'C$ heisst die Horizontalparallaxe; bezeichnen wir sie mit p_0, so ist:

$$\sin p_0 = \frac{\varrho}{\varDelta},$$

und

$$\sin p' = \sin p_0 \sin z'. \tag{63}$$

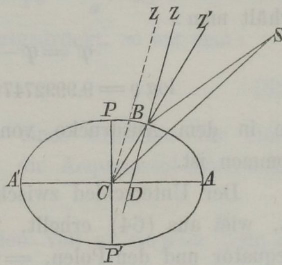
Die Höhenparallaxe ist daher dem Sinus der scheinbaren Zenithdistanz proportional.

Da die Ebene, welche durch die Gesichtslinien BS und CS gelegt wird, nothwendig auch durch das Zenith Z geht, so schneidet dieselbe die Himmelskugel in einem Verticalkreise, in welchem daher sowohl der scheinbare als der wahre Ort des Gestirnes liegen; hieraus folgt, dass, wenn die Erde kugelförmig ist, das Azimuth eines Gestirnes durch die Parallaxe nicht geändert wird.

39. Unsere Erde ist aber keine vollkommene Kugel, sondern hat die Gestalt eines an seinen Polen abgeplatteten Sphäroids, welches durch

Umdrehung einer Ellipse um ihre kleine Axe entsteht. Alle Meridiane der Erde sind daher congruente Ellipsen. Sei in Fig. 10 $ABPP'$ der elliptische Meridian irgend eines Punctes B auf der Oberfläche der Erde, C der Mittelpunct derselben, BZ die Normale im Puncte B, welche die grosse Axe AA' im Puncte D schneidet. Da die Richtung der Schwerkraft oder die Verticallinie im Puncte B mit der Normale zusammenfällt, so ist Z das Zenith des Beobachters in B; der verlängerte Erdhalbmesser CB trifft aber die Himmelskugel im Puncte Z', welcher das geocentrische Zenith des Punctes A heisst. Ist nun S ein Gestirn, so ist wieder der Winkel $ZBS = z'$ die scheinbare oder beobachtete Zenithdistanz; zieht man ferner parallel zu BZ durch den Mittelpunct der Erde die CZ, so trifft letztere Gerade das Himmelsgewölbe gleichfalls im Zenith Z, und der Winkel ZCS ist die wahre oder geocentrische Zenithdistanz. Denkt man sich nun das Gestirn S ausserhalb der Meridianebene des Punctes B (in der Figur die Ebene der Zeichnung), so werden zwei Verticalebenen, von welchen die eine durch die Gerade BZ und das Gestirn S, die andere durch die Gerade CZ und das Gestirn S gelegt wird, mit der Meridianebene offenbar verschiedene Winkel einschliessen, woraus folgt, dass in Folge der sphäroidischen Gestalt der Erde auch das Azimuth der Gestirne durch die Parallaxe geändert wird. Uebrigens erreicht diese Aenderung nur bei dem Monde einen merklichen Betrag; bei allen andern Gestirnen ist sie verschwindend.

Fig. 10.



Der Winkel $ADB = \varphi$, welchen die Normale BD mit der Ebene des Aequators bildet, ist die Polhöhe oder geographische Breite des Punctes B; der Winkel $ACB = \varphi'$, welchen der Halbmesser $CB = \varrho$ des Punctes B mit der Ebene des Aequators einschliesst, heisst die geocentrische oder verbesserte Breite des Punctes B. Bei den parallactischen Rechnungen werden die beiden Grössen φ' und ϱ benöthiget. Setzt man die halbe grosse Axe des elliptischen Meridians, oder den Halbmesser des Aequators $AC = a$, die halbe Polaraxe $CP = b$, und

$$\frac{a-b}{a+b} = n, \quad \frac{2n}{1+n^2} = N,$$

so ist, wie wir im geodätischen Theile finden werden:

$$\varphi' = \varphi - \frac{N}{\sin 1''} \sin 2\varphi + \tfrac{1}{2} \frac{N^2}{\sin 1''} \sin 4\varphi - \ldots$$

$$\log \varrho = \log \left(a \frac{1+n^2}{1+n} \right) + M \left\{ (N-n) \cos 2\varphi - \tfrac{1}{2} (N^2 - n^2) \cos 4\varphi + \ldots \right\}$$

wo $M = 0.4342945$ den Modulus der briggischen Logarithmen bedeutet. Nun ist nach Bessel:

$$a = 3272077.14 \text{ Toisen}$$
$$b = 3261139.33 \quad „$$

Berechnet man mit diesen Werthen die Coefficienten der Reihen, so erhält man:

$$\varphi' = \varphi - 690''.65 \sin 2\varphi + 1''.16 \sin 4\varphi\,, \tag{64}$$

$$\log \varrho = 9.9992747 + 0.0007271 \cos 2\varphi - 0.0000018 \cos 4\varphi\,, \tag{65}$$

wo in dem Ausdrucke von $\log \varrho$ der Aequatorealhalbmesser $a = 1$ angenommen ist.

Der Unterschied zwischen der geographischen und geocentrischen Breite ist, wie aus (64) erhellt, für $\varphi = 0^0$ und für $\varphi = 90^0$, d. i. unter dem Aequator und den Polen, $= 0$, und erreicht sehr nahe in der geographischen Breite $\varphi = 45^0$ sein Maximum $= 11\frac{1}{2}$ Minute.

Für Wien ($\varphi = 48^0\, 12'$) findet man z. B.:

$$\varphi' - \varphi = -11'\, 26''.60 \qquad \log \varrho = 9.9991954.$$

40. Die Horizontalparallaxe eines Gestirnes wird durch die Gleichung:

$$\sin p_0 = \frac{\varrho}{\varDelta} \tag{66}$$

bestimmt, wo ϱ die Entfernung des Beobachters vom Mittelpuncte der Erde bedeutet; in Folge der sphäroidischen Gestalt der Erde ist dieselbe daher verschieden für Puncte auf der Erde von verschiedener Polhöhe, und am grössten für jene unter dem Aequator, weil für diese der Halbmesser ϱ seinen grössten Werth $= a$ erreicht. Man nennt die unter dem Aequator stattfindende Horizontalparallaxe eines Gestirnes dessen Aequatoreal-Horizontal-Parallaxe; bezeichnen wir sie mit p, so ist:

$$\sin p = \frac{a}{\varDelta}. \tag{67}$$

Man pflegt häufig die Aequatoreal-Horizontal-Parallaxe der Gestirne (mit Ausnahme des Mondes) durch jene der Sonne auszudrücken; da nun die Entfernung der Erde von der Sonne, und in Folge dessen auch die Aequatoreal-Horizontal-Parallaxe der letzteren veränderlich ist, so wählt man hiezu, um ein bestimmtes Maass zu haben, jenen Werth derselben, welcher stattfindet, wenn sich die Erde in ihrer mittleren Entfernung von der Sonne (gleich der halben grossen Axe der elliptischen Erdbahn) befindet, und nennt diese die mittlere Aequatoreal-Horizontal-Parallaxe der Sonne. Der Zusammenhang der Grössen ist dann folgender. Bezeichnen wir, wie früher, mit p_0 die Horizontalparallaxe eines Gestirnes für einen Beobachtungsort, dessen Entfernung vom Mittelpunct der Erde $= \varrho$, mit $\varDelta$ die Entfernung des Gestirnes vom Mittelpunct der Erde; mit p die Aequatoreal-Horizontal-Parallaxe desselben Gestirnes; mit π die mittlere Aequatoreal-Horizontal-Parallaxe der Sonne, und mit D deren mittlere Entfernung von der Erde, so ist:

$$\sin p_0 = \frac{\varrho}{\varDelta} \ldots \alpha) \qquad \sin p = \frac{a}{\varDelta} \ldots \beta) \qquad \sin \pi = \frac{a}{D} \ldots \gamma).$$

Durch Elimination von $\varDelta$ aus α) und β) folgt: $\sin p_0 = \frac{\varrho}{a} . \sin p$; wird nun, wie dies immer geschieht, ϱ durch a als Einheit ausgedrückt, so hat man:

$$\sin p_0 = \frac{\varrho}{\varDelta} = \varrho \sin p, \tag{68}$$

durch welche Gleichung die Horizontalparallaxe eines Gestirnes für einen Beobachtungsort, dessen Halbmesser $= \varrho$, durch die Aequatoreal-Horizontal-Parallaxe des Gestirnes ausgedrückt wird.

Ferner folgt aus β) und γ) durch Elimination von a: $\sin p = \frac{D}{\varDelta} \sin \pi$; man nimmt nun die mittlere Entfernung der Erde von der Sonne $D = 1$ an, und drückt die Entfernungen $\varDelta$ der Gestirne durch diese Einheit aus, dadurch wird:

$$\sin p = \frac{\sin \pi}{\varDelta}, \tag{69}$$

eine Gleichung, welche die Aequatoreal-Horizontal-Parallaxe eines Gestirnes, dessen Entfernung von der Erde $= \varDelta$, durch die mittlere Aequatoreal-Horizontal-Parallaxe der Sonne ausdrückt.

Nach Encke ist die mittlere Aequatoreal-Horizontal-Parallaxe der Sonne:

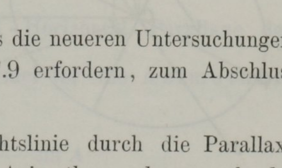
$$\pi = 8''.57116,$$

welcher Werth noch allgemein angenommen wird, bis die neueren Untersuchungen, welche eine Vergrösserung desselben auf nahe $8''.9$ erfordern, zum Abschluss gebracht sein werden.

41. Die Aenderung der Richtung der Gesichtslinie durch die Parallaxe hat nicht nur eine Aenderung von Höhe und Azimuth, sondern auch der Rectascension und Declination, so wie der Länge und Breite des Gestirnes zur Folge. Wir haben daher die Aufgabe aufzulösen: Wenn der scheinbare Ort eines Gestirnes (sei es Höhe und Azimuth, oder Rectascension und Declination, oder Länge und Breite) gegeben ist, daraus den wahren oder geocentrischen, vom Mittelpuncte der Erde gesehenen abzuleiten, und umgekehrt.

Zu diesem Zwecke legen wir durch den Mittelpunct der Erde C (Fig 11) und durch den Beobachtungsort B zwei zu einander parallele Systeme von rechtwinkeligen Coordinatenaxen, so dass in jedem der beiden Systeme die Ebene der xy parallel liegt zur Grundebene der sphärischen Coordinaten, für welche die Parallaxe gesucht wird; ist dann S das Gestirn, und man fällt von den Puncten B und S auf die Ebene der xy die Perpendikel BJ und Sm, welch' letzteres die Ebene der $x'y'$ im Puncte m' schneidet, und zieht JG und mK senkrecht auf Cx, $m'K'$ senkrecht auf Cx', so sind:

Fig. 11.



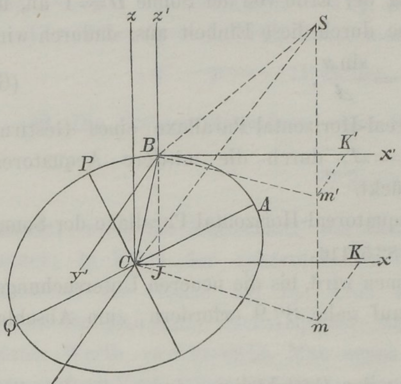
$CG = X$, $JG = Y$, $BJ = Z$ die Coordinaten von B, bezogen auf C,
$CK = x$, $mK = y$, $Sm = z$, „ „ „ S, „ „ C,
$BK' = x'$, $m'K' = y'$, $Sm' = z'$ „ „ „ S, „ „ B,
und es bestehen ganz allgemein die Gleichungen:

$$x' = x - X, \quad y' = y - Y, \quad z' = z - Z; \tag{70}$$

drückt man nun diese rechtwinkeligen Coordinaten durch die entsprechenden sphärischen Coordinaten aus, so hat man in jedem Falle die Grundformeln der Parallaxe.

42. Parallaxe in Azimuth und Zenithdistanz. Gemäss dem im vorhergehenden §. Gesagten werden für diesen Fall die beiden Systeme rechtwinkeliger Coordinatenaxen so angeordnet, dass die Ebenen der xy und $x'y'$ parallel zum Horizonte des Beobachtungsortes B (Fig. 12) liegen, ferner die positiven Halbaxen der x und x' gegen den Südpunct, jene der y und y' gegen den Westpunct, jene der z und z' gegen das Zenith gerichtet seien. Bei dieser Anordnung fallen die Ebenen der xz und $x'z'$ zusammen mit der Ebene des Meridians $BPQA$ des Beobachtungsortes B, und es ist, wenn S das Gestirn:

Fig. 12.



$\angle m\,CK = A$ das wahre oder geocentrische Azimuth,
$\angle m\,CS = z$ die „ „ „ Zenithdistanz,
$CS = \varDelta$ die Entfernung des Gestirnes vom Mittelpunct der Erde;
$\angle m'BK' = A'$ das scheinbare Azimuth,
$\angle m'BS = z'$ die „ Zenithdistanz,
$BS = \varDelta'$ die Entfernung vom Beobachtungsorte.

Fällt man nun von dem, in der Ebene der xz liegenden Puncte B das Perpendikel BJ auf die Ebene der xy, so sind die Coordinaten des Punctes B bezogen auf C: $X = CJ$, $Y = 0$, $Z = BJ$; bezeichnet man daher die Polhöhe des Punctes B mit φ, dessen geocentrische Breite mit φ', so ist $\angle CBJ = \varphi - \varphi'$, und man hat aus dem rechtwinkeligen Dreiecke CBJ, wenn der Halbmesser $CB = \varrho$ gesetzt wird:

$$X = \varrho \sin(\varphi - \varphi'), \quad Y = 0, \quad Z = \varrho \cos(\varphi - \varphi').$$

Für die Coordinaten des Gestirnes S, bezogen auf den Mittelpunct C der Erde, hat man, vermöge der Glgn. (3):

$$x = \varDelta \sin z \cos A, \quad y = \varDelta \sin z \sin A, \quad z = \varDelta \cos z,$$

endlich für die Coordinaten von S, bezogen auf B:

$$x' = \Delta' \sin z' \cos A', \quad y' = \Delta' \sin z' \sin A', \quad z' = \Delta' \cos z'.$$

Durch Substitution dieser Werthe in die Glgn. (70) erhält man sofort die Grundformeln der Parallaxe in Azimuth und Zenithdistanz:

$$\begin{aligned} \Delta' \sin z' \cos A' &= \Delta \sin z \cos A - \varrho \sin(\varphi - \varphi'), \\ \Delta' \sin z' \sin A' &= \Delta \sin z \sin A, \\ \Delta' \cos z' &= \Delta \cos z \qquad - \varrho \cos(\varphi - \varphi'). \end{aligned} \tag{71}$$

Die beiden ersten dieser Formeln bringt man nun leicht auf eine für den vorliegenden Zweck bequemere Form, indem man einmal die 1te mit $\sin A$, die 2te mit $\cos A$ multiplicirt und die Producte subtrahirt, dann die 1te mit $\cos A$, die 2te mit $\sin A$ multiplicirt und die Producte addirt; man erhält auf diese Art:

$$\begin{aligned} \Delta' \sin z' \sin(A' - A) &= \varrho \sin(\varphi - \varphi') \sin A, \\ \Delta' \sin z' \cos(A' - A) &= \Delta \sin z - \varrho \sin(\varphi - \varphi') \cos A. \end{aligned} \tag{a}$$

Durch Division dieser Gleichungen folgt sofort:

$$\operatorname{tg}(A' - A) = \frac{\varrho \sin(\varphi - \varphi') \sin A}{\Delta \sin z - \varrho \sin(\varphi - \varphi') \cos A};$$

dividirt man Zähler und Nenner durch $\Delta \sin z$, und beachtet, dass zufolge der Gl. (68): $\dfrac{\varrho}{\Delta} = \varrho \sin p$ ist, wenn p die Aequatoreal - Horizontal - Parallaxe des Gestirnes bedeutet, so erhält man als strenge Formel für die Azimuthal-Parallaxe:

$$\operatorname{tg}(A' - A) = \frac{\dfrac{\varrho \sin(\varphi - \varphi') \sin p}{\sin z} \sin A}{1 - \dfrac{\varrho \sin(\varphi - \varphi') \sin p}{\sin z} \cos A}. \tag{72}$$

Um eine ähnliche Formel für die Höhenparallaxe zu erhalten, multipliciren wir die 1te der Glgn. (a) mit $\sin \frac{1}{2}(A' - A)$, die 2te mit $\cos \frac{1}{2}(A' - A)$, so ergibt sich durch Addition der Producte:

$$\Delta' \sin z' = \Delta \sin z - \varrho \sin(\varphi - \varphi') \frac{\cos \frac{1}{2}(A' + A)}{\cos \frac{1}{2}(A' - A)},$$

welche Gleichung durch Einführung eines Hilfswinkels γ, welcher durch die Gleichung:

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{\cos \frac{1}{2}(A' + A)}{\cos \frac{1}{2}(A' - A)} \operatorname{tg}(\varphi - \varphi')$$

bestimmt wird, folgende Form annimmt:

$$\Delta' \sin z' = \Delta \sin z - \varrho \cos(\varphi - \varphi') \operatorname{tg}\gamma. \tag{b}$$

Aus dieser Gleichung und der 3ten der Glgn. (71) erhält man nun wieder durch das zur Ableitung der Glgn. (a) angewendete Verfahren:

$$\Delta' \sin(z' - z) = \varrho \cos(\varphi - \varphi') \frac{\sin(z - \gamma)}{\cos\gamma}, \quad (c)$$
$$\Delta' \cos(z' - z) = \Delta - \varrho \cos(\varphi - \varphi') \frac{\cos(z - \gamma)}{\cos\gamma},$$

und hieraus durch Division:

$$\operatorname{tg}(z' - z) = \frac{\dfrac{\varrho \cos(\varphi - \varphi')}{\cos\gamma} \sin(z - \gamma)}{\Delta - \dfrac{\varrho \cos(\varphi - \varphi')}{\cos\gamma} \cos(z - \gamma)},$$

oder, wenn man wieder Zähler und Nenner durch Δ dividirt und $\varrho \sin p$ statt $\dfrac{\varrho}{\Delta}$ schreibt:

$$\operatorname{tg}(z' - z) = \frac{\dfrac{\varrho \cos(\varphi - \varphi') \sin p}{\cos\gamma} \sin(z - \gamma)}{1 - \dfrac{\varrho \cos(\varphi - \varphi') \sin p}{\cos\gamma} \cos(z - \gamma)}. \quad (73)$$

Dies ist die strenge Formel für die Parallaxe in Zenithdistanz. Was den Hilfswinkel γ betrifft, so kann man, da selbst für den Mond die Differenz $A' - A$ immer sehr klein ist, und $\varphi - \varphi'$ bekanntlich nicht grösser als 11'.5 wird, zur Berechnung desselben immer der Formel:

$$\gamma = (\varphi - \varphi') \cos A \quad (74)$$

sich bedienen, welche aus obigem Ausdrucke von $\operatorname{tg}\gamma$ hervorgeht, wenn man statt der Tangenten die Bögen, ferner A statt $\frac{1}{2}(A' + A)$ und $\cos\frac{1}{2}(A' - A) = 1$ setzt.

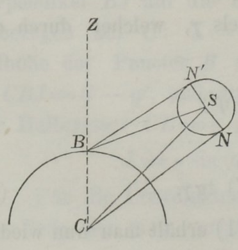
Multiplicirt man endlich die 3^te der Glgn. (71) mit $\sin\gamma$, die Gl. (b) mit $\cos\gamma$, und subtrahirt die Producte, so erhält man:

$$\Delta' = \Delta \frac{\sin(z - \gamma)}{\sin(z' - \gamma)}, \quad (75)$$

durch welche Gleichung die scheinbare Entfernung des Gestirnes vom Beobachtungsorte gegeben ist.

Erscheint das Gestirn als eine sichtbare Scheibe, so versteht man unter Halbmesser desselben den Winkel, unter welchem der lineare Radius der Scheibe gesehen wird. Sei (Fig. 13) C der Mittelpunct der Erde, B der Ort des Beobachters auf der Oberfläche derselben, S der Mittelpunct des Gestirnes, welches wir von sphärischer Gestalt voraussetzen; zieht man die Tangenten CN, BN', so ist der Winkel $SCN = R$ der geocentrische, der Winkel $SBN' = R'$ der scheinbare Halbmesser; ist nun $r = SN = SN'$ der lineare Radius des Gestirnes, ausgedrückt in derselben Längeneinheit wie die Entfernungen $CS = \Delta$ und $BS = \Delta'$, so hat man aus den rechtwinkeligen

Fig. 13.



Dreiecken CNS und $BN'S$:

$$\sin R = \frac{r}{\Delta}{}^{*)}, \qquad \sin R' = \frac{r}{\Delta'}.$$

Hieraus folgt: $\dfrac{\sin R'}{\sin R} = \dfrac{\Delta}{\Delta'}$, oder genügend genau: $\dfrac{R'}{R} = \dfrac{\Delta}{\Delta'}$; mit Zuziehung der Gl. (75) erhält man daher für den scheinbaren, durch die Parallaxe vergrösserten Halbmesser des Gestirnes den Ausdruck:

$$R' = R\,\frac{\sin(z' - \gamma)}{\sin(z - \gamma)}. \tag{76}$$

Uebrigens ist diese in Folge der Parallaxe eintretende Vergrösserung des Halbmessers nur bei dem Monde merklich.

B e i s p i e l. Man suche die Parallaxe des Mondes in Zenithdistanz und Azimuth für Greenwich, 1860, März 6, 8^h mittlere Zeit.

Es ist für Greenwich:

$\varphi = 51^0\,28'\,38''.0$, $\varphi' = 51^0\,17'\,25''.43$; $\varphi - \varphi' = 11'\,12''.57$, $\log\varrho = 9.999113$

Für die gegebene Zeit findet man aus dem Nautical Almanac die Rectascension, Declination, Aequatoreal-Horizontal-Parallaxe und den Halbmesser des Mondes:

$$\alpha = 10^h\,29^m\,55^s.65, \qquad \delta = +6^0\,59'\,47''.2,$$
$$p = 61'\,23''.8 \qquad R = 16'\,46''.1,$$

und hat nun zunächst die geocentrischen Grössen A und z zu berechnen und zu diesem Zwecke den Stundenwinkel des Mondes für die gegebene Zeit zu suchen. Nun ist:

Sternzeit im mittleren Mittag zu Greenwich, 1860, März 6,		22^h	57^m	45^s	.02
Gegebene mittlere Zeit . . .		8	0	0	.00
Acceleration der Sternzeit in 8^h	+		1	18	.85
Sternzeit θ =		6	59	3	.87
α =		10	29	55	.65
Oestlicher Stundenwinkel t =	−	3	30	51	.78
=		-52^0	$42'$	$56''$	.70

---

*) Verbindet man diese Gleichung mit jener (67): $\sin p = \dfrac{a}{\Delta}$, in welcher a den Halbmesser des Erd-Aequators, p die Aequatoreal-Horizontal-Parallaxe des Gestirnes bezeichnet, so kommt:

$$\frac{\sin R}{\sin p} = \frac{r}{a};$$

das Verhältniss der Sinusse des geocentrischen Halbmessers und der Aequatoreal-Horizontal-Parallaxe eines Gestirnes ist daher constant. Für den Mond ist dieses Verhältniss nach H a n s e n's Mondtafeln:

$$\frac{\sin R}{\sin p} = \frac{r}{a} = 0.272956.$$

Mit den Werthen von φ, δ, t findet man [§. 16]:

$$A = -63^\circ\, 27'\, 13''.00 \text{ (östlich)}, \quad z = 61^\circ\, 58'\, 48''.60,$$

und die Berechnung der scheinbaren Grössen A', z', R' ist nach den Formeln (72), (74), (73) und (76) folgende:

$$\begin{array}{lr}
\log \varrho & = 9.99911 \\
\lg \sin(\varphi - \varphi') & = 7.51331 \\
\lg \sin p & = \underline{8.25185} \\
 & 5.76427 \\
\lg \sin z & = \underline{9.94585} \\
 & 5.81842 \\
\lg \sin A & = 9.95162_n \\
\lg \cos A & = \underline{9.65023} \\
\lg \text{Zähler} & = 5.77004_n \\
 & 5.46865 \\
 & 0.00003 \\
 & 0.99997 \\
\lg \text{Nenner} & = 9.99999 \\
\lg \operatorname{tg}(A' - A) & = 5.77005_n \\
A' - A & = -12''.15 \\
A' & = -63^\circ\, 27'\, 25''.15
\end{array}$$

$$\begin{array}{lr}
\lg(\varphi - \varphi') & = 2.82774 \\
\lg \cos A & = \underline{9.65023} \\
 & 2.47797 \\
\gamma & = 5'\, 0''.59 \\
z - \gamma & = 61^\circ\, 53'\, 48''.0 \\
z' - \gamma & = 62^\circ\, 48'\, 17''.8 \\
\lg \sin(z - \gamma) & = 9.945518 \\
\lg \sin(z' - \gamma) & = \underline{9.949125} \\
 & 0.003607 \\
\lg R & = 3.002641 \\
\lg R' & = 3.006248 \\
R' & = 1014''.49 \\
 & = 16'\, 54''.49
\end{array}$$

$$\begin{array}{lr}
\lg \varrho & = 9.999113 \\
\lg \cos(\varphi - \varphi') & = 9.999998 \\
\lg \sin p & = \underline{8.251848} \\
 & 8.250959 \\
\lg \sin(z - \gamma) & = 9.945518 \\
\lg \cos(z - \gamma) & = \underline{9.673079} \\
\lg \text{Zähler} & = 8.196477 \\
 & 7.924038 \\
 & 0.008395 \\
 & 0.991605 \\
\lg \text{Nenner} & = 9.996339 \\
\lg \operatorname{tg}(z' - z) & = 8.200138 \\
z' - z & = 0^\circ\, 54'\, 29''.84 \\
z' & = 62\ \ 53\ \ 18\ .44
\end{array}$$

43. Die vorhergehenden Formeln setzen voraus, dass die geocentrischen Grössen z, A gegeben sind und die scheinbaren z', A' gesucht werden; für den umgekehrten Fall sind folgende Formeln bequem. Multiplicirt man die Gl. (b) [§. 42] mit $\cos z'$, die 3te der Glgn. (71) mit $\sin z'$, und subtrahirt die Producte, so erhält man:

$$\sin(z' - z) = \varrho \cos(\varphi - \varphi') \sin p \, \frac{\sin(z' - \gamma)}{\cos\gamma}, \tag{77}$$

wo der Winkel γ immer genügend genau durch die Gleichung:

$$\gamma = (\varphi - \varphi') \cos A'$$

gefunden wird. Multiplicirt man ferner die 1te der Glgn. (71) mit $\sin A'$, die 2te mit $\cos A'$, so folgt durch Subtraction der Producte:

$$\sin(A' - A) = \varrho \sin(\varphi - \varphi') \sin p \, \frac{\sin A'}{\sin z}, \tag{78}$$

wo z durch Berechnung der Gl. (77) bereits bekannt ist.

44. Für den Mond, dessen Aequatoreal-Horizontal-Parallaxe immer zwischen 54 und 61 Minuten beträgt, muss man sich, wenn die Rechnung scharf geführt werden soll, der im Vorhergehenden entwickelten strengen Formeln bedienen; für alle anderen Gestirne ist die Aequatoreal-Horizontal-Parallaxe p so klein, dass die Parallaxe in Azimuth immer unmerklich wird und für die Höhenparallaxe eine Näherungsformel ausreicht. Setzt man, da

$\varphi - \varphi'$ und γ die Grenze $11'.5$ nicht überschreiten, in (77) die Cosinusse dieser Winkel $= 1$, so erhält man:

$$z' - z = \varrho p \sin [z' - (\varphi - \varphi') \cos A']; \tag{79}$$

vernachlässigt man noch die Abweichung der Erde von der Kugelgestalt, so hat man $\varrho = 1$, $\varphi - \varphi' = 0$, und

$$z' - z = p \sin z', \tag{80}$$

welche Formel, übereinstimmend mit Gl. (63), für die Sonne und die Planeten immer genügend genau ist.

Auch für den scheinbaren Halbmesser R' lässt sich leicht eine bequeme Näherungsformel entwickeln. Dividirt man die Glgn. (c) [§. 42] durch $\varDelta$, schreibt $\varrho \sin p$ für $\varrho : \varDelta$, und setzt Kürze halber:

$$\frac{\varrho \sin p \cos (\varphi - \varphi')}{\cos \gamma} = m,$$

so werden dieselben:

$$\frac{\varDelta'}{\varDelta} \sin (z' - z) = m \sin (z - \gamma), \quad \frac{\varDelta'}{\varDelta} \cos (z' - z) = 1 - m \cos (z - \gamma);$$

quadrirt man diese Gleichungen und addirt dieselben, so kommt:

$$\left(\frac{\varDelta'}{\varDelta}\right)^2 = 1 - 2m \cos (z - \gamma) + m^2.$$

Nimmt man nun die Erde als kugelförmig an, so wird $\varrho = 1$, $\varphi - \varphi' = \gamma = 0$, somit $m = \sin p$, und man erhält mit Vernachlässigung des Quadrates von $\sin p$:

$$\frac{\varDelta'}{\varDelta} = 1 - \sin p \cos z,$$

folglich:

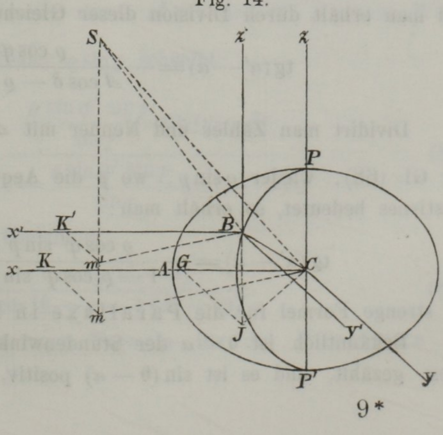
$$\frac{R'}{R} = \frac{\varDelta}{\varDelta'} = \frac{1}{1 - \sin p \cos z} = 1 + \sin p \cos z,$$

also:

$$R' = R + R \sin p \cos z. \tag{81}$$

In dem Beispiele des §. 42 erhält man nach dieser Formel $R' = 16' \, 54''.54$.

Fig. 14.



45. Parallaxe in Rectascension und Declination. Legen wir durch den Mittelpunct C der Erde (Fig. 14) drei senkrechte Axen der x, y, z, so dass die positive Halbaxe der z nach dem Nordpole gerichtet sei, die beiden andern Axen daher in der Ebene des Aequators liegen, und zwar möge die positive Halbaxe der x nach dem Frühlingspuncte, jene der y nach dem 90^{ten} Grade der Rectascension gerichtet sein. Drei mit diesen parallele Axen der x', y', z' seien durch den Beobachtungsort B gelegt, dessen Meridian PBP' ist. Fällt man das Perpendikel BJ auf die Ebene der xy, und zieht JG senkrecht auf Cx, so sind die Coordinaten von B, bezogen auf C:

$$X = CG, \quad Y = GJ, \quad Z = BJ.$$

Es ist aber der Winkel GCJ, gleich dem sphärischen Winkel APB, die Sternzeit $= \theta$ des Beobachtungsortes, und folglich, da $CB = \varrho$, $\angle BCJ = \varphi'$, und $JC = \varrho \cos\varphi'$:

$$X = \varrho \cos\varphi' \cos\theta, \quad Y = \varrho \cos\varphi' \sin\theta, \quad Z = \varrho \sin\varphi'.$$

Ist ferner S das Gestirn, und bezeichnet man mit α, δ dessen geocentrische, mit α', δ' dessen scheinbare Rectascension und Declination, so ist $\angle xCm = \alpha$, $SCm = \delta$, $x'Bm' = \alpha'$, $SBm' = \delta'$; setzt man nun wieder $CS = \varDelta$, $BS = \varDelta'$, so sind, zufolge der Glgn. (4) die Coordinaten von S bezogen auf C:

$$x = \varDelta \cos\delta \cos\alpha, \quad y = \varDelta \cos\delta \sin\alpha, \quad z = \varDelta \sin\delta;$$

die Coordinaten von S bezogen auf B:

$$x' = \varDelta' \cos\delta' \cos\alpha', \quad y' = \varDelta' \cos\delta' \sin\alpha', \quad z' = \varDelta' \sin\delta'.$$

Substituirt man diese Werthe in die Glgn. (70), so erhält man als Grundformeln der Parallaxe in Rectascension und Declination:

$$\begin{aligned}
\varDelta' \cos\delta' \cos\alpha' &= \varDelta \cos\delta \cos\alpha - \varrho \cos\varphi' \cos\theta, \\
\varDelta' \cos\delta' \sin\alpha' &= \varDelta \cos\delta \sin\alpha - \varrho \cos\varphi' \sin\theta, \\
\varDelta' \sin\delta' &= \varDelta \sin\delta - \varrho \sin\varphi'
\end{aligned} \tag{82}$$

Wenn man einmal die erste dieser Gleichungen mit $\sin\alpha$, die zweite mit $\cos\alpha$ multiplicirt und die Producte subtrahirt, dann die erste mit $\cos\alpha$, die zweite mit $\sin\alpha$ multiplicirt und die Producte addirt, so verwandeln sich dieselben in folgende:

$$\begin{aligned}
\varDelta' \cos\delta' \sin(\alpha' - \alpha) &= \qquad\quad - \varrho \cos\varphi' \sin(\theta - \alpha) \\
\varDelta' \cos\delta' \cos(\alpha' - \alpha) &= \varDelta \cos\delta - \varrho \cos\varphi' \cos(\theta - \alpha),
\end{aligned} \tag{a}$$

und man erhält durch Division dieser Gleichungen:

$$\operatorname{tg}(\alpha' - \alpha) = - \frac{\varrho \cos\varphi' \sin(\theta - \alpha)}{\varDelta \cos\delta - \varrho \cos\varphi' \cos(\theta - \alpha)}.$$

Dividirt man Zähler und Nenner mit $\varDelta \cos\delta$, und setzt für $\frac{\varrho}{\varDelta}$, gemäss der Gl. (68), wieder $\varrho \sin p$, wo p die Aequatoreal-Horizontal-Parallaxe des Gestirnes bedeutet, so erhält man:

$$\operatorname{tg}(\alpha' - \alpha) = - \frac{\varrho \cos\varphi' \sin p \sec\delta \sin(\theta - \alpha)}{1 - \varrho \cos\varphi' \sin p \sec\delta \cos(\theta - \alpha)} \tag{83}$$

als strenge Formel für die Parallaxe in Rectascension.

Bekanntlich ist $\theta - \alpha$ der Stundenwinkel des Gestirnes, von Süd über West gezählt, und es ist $\sin(\theta - \alpha)$ positiv, wenn das Gestirn westlich vom

Meridian steht, negativ wenn östlich. Die Parallaxe vermindert daher die Rectascension der Gestirne, wenn sie auf der Westseite stehen und vergrössert sie auf der Ostseite.

Um eine ähnliche Formel für $\delta' - \delta$ zu erhalten, setzen wir in der zweiten der Glgn. (a): $1 - 2\sin\frac{1}{2}(\alpha' - \alpha)^2$ für $\cos(\alpha' - \alpha)$, so kommt:

$$\Delta' \cos\delta' = \Delta\cos\delta - \varrho\cos\varphi'\cos(\theta - \alpha) + 2\,\Delta'\cos\delta'\sin\tfrac{1}{2}(\alpha' - \alpha)^2,$$

oder, wenn man das letzte Glied mit $\cos\frac{1}{2}(\alpha' - \alpha)$ multiplicirt und dividirt:

$$\Delta' \cos\delta' = \Delta\cos\delta - \varrho\cos\varphi'\cos(\theta - \alpha) + \Delta'\cos\delta'\sin(\alpha' - \alpha)\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha' - \alpha)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha' - \alpha)},$$

welche Gleichung, wenn man für $\Delta'\cos\delta'\sin(\alpha' - \alpha)$ den Werth aus der ersten der Glgn. (a) substituirt, in folgende übergeht:

$$\Delta'\cos\delta' = \Delta\cos\delta - \varrho\cos\varphi'\frac{\cos[\theta - \frac{1}{2}(\alpha' + \alpha)]}{\cos\frac{1}{2}(\alpha' - \alpha)}.$$

Diese Gleichung verbinden wir nun mit der 3^{ten} der Glgn. (82); beide erhalten durch Einführung der Hilfsgrössen β und γ, welche durch die Gleichungen:

$$\beta\sin\gamma = \sin\varphi'$$
$$\beta\cos\gamma = \frac{\cos\varphi'\cos[\theta - \frac{1}{2}(\alpha' + \alpha)]}{\cos\frac{1}{2}(\alpha' - \alpha)}$$

bestimmt werden, die Form:

$$\begin{aligned}\Delta'\cos\delta' &= \Delta\cos\delta - \varrho\beta\cos\gamma,\\ \Delta'\sin\delta' &= \Delta\sin\delta - \varrho\beta\sin\gamma,\end{aligned} \qquad (b)$$

aus welchen wieder, durch das schon mehrmals angewendete Verfahren, die folgenden sich ergeben:

$$\begin{aligned}\Delta'\sin(\delta' - \delta) &= -\varrho\beta\sin(\gamma - \delta),\\ \Delta'\cos(\delta' - \delta) &= \Delta - \varrho\beta\cos(\gamma - \delta).\end{aligned}$$

Hieraus folgt:

$$\operatorname{tg}(\delta' - \delta) = -\frac{\varrho\beta\sin(\gamma - \delta)}{\Delta - \varrho\beta\cos(\gamma - \delta)},$$

oder, wenn man Zähler und Nenner durch Δ dividirt, für β seinen Werth $= \frac{\sin\varphi'}{\sin\gamma}$ einführt, und statt $\frac{\varrho}{\Delta}$ wieder $\varrho\sin p$ schreibt:

$$\operatorname{tg}(\delta' - \delta) = -\frac{\frac{\varrho\sin\varphi'\sin p}{\sin\gamma}\sin(\gamma - \delta)}{1 - \frac{\varrho\sin\varphi'\sin p}{\sin\gamma}\cos(\gamma - \delta)}, \qquad (84)$$

wo der Hilfswinkel γ durch die Gleichung:

$$\operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\varphi'\frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha' - \alpha)}{\cos[\theta - \alpha - \frac{1}{2}(\alpha' - \alpha)]} \qquad (85)$$

bestimmt ist. Dies sind die strengen Formeln für die P a r a l l a x e in D e c l i n a t i o n.

Subtrahirt man endlich die beiden Gleichungen (b), nachdem die erste mit $\sin\gamma$, die zweite mit $\cos\gamma$ multiplicirt worden, so kommt: $\Delta' \sin(\gamma - \delta') = \Delta \sin(\gamma - \delta)$, somit:

$$\Delta' = \Delta \frac{\sin(\gamma - \delta)}{\sin(\gamma - \delta')}, \tag{86}$$

und

$$R' = R \frac{\sin(\gamma - \delta')}{\sin(\gamma - \delta)}, \tag{86*}$$

wodurch die scheinbare Entfernung Δ' des Gestirnes vom Beobachtungsorte, und dessen scheinbarer Halbmesser R' bestimmt sind.

Beispiel. Man suche die Parallaxe des Mondes in Rectascension und Declination für Greenwich, 1860, März 6, 8^h mittlere Zeit.

Mit den in dem Beispiele §. 42 angeführten Werthen ist die Rechnung folgende, wobei der Kürze wegen $\theta - \alpha = t$ gesetzt ist:

	$\frac{1}{2}(\alpha' - \alpha) = +15' 27''.71$	
$t = -52^\circ 42' 56''.70$	$t - \frac{1}{2}(\alpha' - \alpha) = -52^\circ 58' 24''.41$	$\lg \varrho = 9.999113$
$\lg \varrho = 9.999113$	$\lg \cos \frac{1}{2}(\alpha' - \alpha) = 9.999996$	$\lg \sin \varphi' = 9.892276$
$\lg \cos \varphi' = 9.796139$	$\lg \cos [t - \frac{1}{2}(\alpha' - \alpha)] = 9.779730$	$\lg \sin p = 8.251848$
$\lg \sin p = 8.251848$	0.220266	8.143237
$\lg \sec \delta = 0.003246$	$\mathrm{tg}\, \varphi' = 0.096136$	$\lg \sin \gamma = 9.954534$
8.050346	$\mathrm{tg}\, \gamma = 0.316402$	8.188703
$\lg \sin t = 9.900717_n$	$\gamma = 64^\circ 14' 15''.0$	$\lg \sin(\gamma - \delta) = 9.924773$
$\lg \cos t = 9.782307$	$\gamma - \delta = 57\ 14\ 27\ .8$	$\lg \cos(\gamma - \delta) = 9.733282$
$\lg$ Zähler $= 7.951063_n$	$\gamma - \delta' = 57^\circ 59' 28''.8$	$\lg$ Zähler $= 8.113476$
7.832653	$\lg \sin(\gamma - \delta') = 9.928379$	7.921985
0.006802	$\lg \sin(\gamma - \delta) = 9.924773$	0.008356
0.993198	0.003606	0.991644
$\lg$ Nenner $= 9.997035$	$\lg R = 3.002641$	$\lg$ Nenner $= 9.996356$
$\lg \mathrm{tg}(\alpha' - \alpha) = 7.954028$	$\lg R' = 3.006247$	$\lg \mathrm{tg}(\delta' - \delta) = 8.117120_n$
$\alpha' - \alpha = +30' 55''.42$	$R' = 1014''.49$	$\delta' - \delta = -45' 0''.98$
$\alpha' = 157^\circ 59' 50''.17$	$= 16' 54''.49$	$\delta' = 6^\circ 14' 46''.22$

46. Sind nicht, wie oben vorausgesetzt wurde, die geocentrischen Grössen α, δ, sondern die scheinbaren α', δ' gegeben, so kann man sich der folgenden Formeln bedienen:

$$\sin(\alpha' - \alpha) = -\varrho \cos\varphi' \sin p \frac{\sin(\theta - \alpha')}{\cos\delta},$$

$$\mathrm{tg}\,\gamma = \mathrm{tg}\,\varphi' \frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha' - \alpha)}{\cos[\theta - \alpha' + \frac{1}{2}(\alpha' - \alpha)]}, \tag{87}$$

$$\sin(\delta' - \delta) = -\varrho \sin\varphi' \sin p \frac{\sin(\gamma - \delta')}{\sin\gamma},$$

von welchen die erstere entsteht, wenn man die 1te der Glgn. (82) mit $\sin\alpha'$, die 2te mit $\cos\alpha'$ multiplicirt und die Producte subtrahirt; die 3te aus der Subtraction der beiden Glgn. (b) erhalten wird, nachdem die 1te derselben mit $\sin\delta'$, die 2te mit $\cos\delta'$ multiplicirt worden. Der Ausdruck von $\operatorname{tg}\gamma$ ist mit jenem (85) identisch.

Bei Anwendung dieser Formeln erhält man zunächst aus der ersten, indem man im zweiten Theile δ' statt δ nimmt, einen genäherten Werth von $\alpha' - \alpha$, mit welchem aus den beiden anderen γ und $\delta' - \delta$ hinreichend scharf gefunden wird; hiedurch wird δ bekannt und kann $\alpha' - \alpha$ corrigirt werden.

47. Auch hier wird aber der Gebrauch der strengen Formeln (83)—(87) nur bei dem Monde erfordert; für die Planeten und Cometen reichen Näherungsformeln aus, welche aus (87) hervorgehen, wenn man die Sinus der kleinen Bögen $\alpha' - \alpha$, $\delta' - \delta$ und p mit den Bögen vertauscht, und in dem Ausdrucke von $\operatorname{tg}\gamma$ die für diese Gestirne immer sehr kleine Grösse $\frac{1}{2}(\alpha' - \alpha) = 0$ setzt. Ueberdies ist es für solche Gestirne bequemer, statt der Aequatoreal-Horizontal-Parallaxe p derselben ihre Entfernung Δ vom Mittelpuncte der Erde mittelst der Gl. (69):

$$\sin p = \frac{\sin\pi}{\Delta} \quad \text{oder} \quad p = \frac{\pi}{\Delta}$$

einzuführen, wo $\pi = 8''.57116$ die mittlere Aequatoreal-Horizontal-Parallaxe der Sonne bedeutet. Man erhält auf diese Art als Näherungsformeln für die Parallaxe in Rectascension und Declination:

$$\begin{aligned} \alpha - \alpha' &= \pi\varrho\cos\varphi' \frac{\sin(\theta - \alpha')}{\Delta\cos\delta'}, \\ \operatorname{tg}\gamma &= \frac{\operatorname{tg}\varphi'}{\cos(\theta - \alpha')}, \\ \delta - \delta' &= \pi\varrho\sin\varphi' \frac{\sin(\gamma - \delta')}{\Delta\sin\gamma}, \end{aligned} \tag{88}$$

wo im zweiten Theile statt der scheinbaren Coordinaten α', δ' ohne merklichen Fehler die geocentrischen α, δ gesetzt werden können, wenn letztere gegeben sind.

Beispiel. In Krakau wurde 1864, Januar 16, $6^h\,49^m\,49^s.5$ mittlere Zeit die scheinbare Rectascension und Declination des Cometen V beobachtet:

$$\alpha' = 19^h\,39^m\,17^s.67, \qquad \delta' = +\,39^0\,22'\,19''.6;$$

der Logarithmus der Entfernung des Cometen von der Erde war um diese Zeit: $\log\Delta = 9.6128$. Man sucht den geocentrischen Ort.

Die Polhöhe von Krakau ist $\varphi = 50^0\,3'\,50''.0$; nach den Formeln (64) und (65) findet man $\varphi' = 49^0\,52'.5$, $\log\varrho = 9.9991$, womit sich die (für einen bestimmten Beobachtungsort constanten) Werthe: $\log\pi\varrho\cos\varphi' = 0.7413$, $\log\pi\varrho\sin\varphi' = 0.8156$ ergeben. Ferner ist die der gegebenen mittleren Zeit entsprechende Sternzeit: $\theta = 2^h\,31^m\,27^s.1$, somit $\theta - \alpha' = 6^h\,52^m\,9^s.4 =$

$=103^{0}\,2'\,21''$. Man hat daher nach den Formeln (88):

$$\begin{array}{lll}
\lg \pi\varrho \cos\varphi' = 0.7413 & \lg \operatorname{tg}\varphi' = 0.0743 & \lg \pi\varrho \sin\varphi' = 0.8156 \\
\lg\sin(\theta-\alpha') = 9.9887 & \lg\cos(\theta-\alpha') = 9.3534_n & \lg\sin(\gamma-\delta') = 9.9435_n \\
\lg\sec\delta' = \underline{0.1118} & \operatorname{tg}\gamma = \underline{0.7209_n} & \lg\operatorname{cosec}\gamma = \underline{0.0077_n} \\
\quad 0.8418 & \gamma = -\;79^{0}\,14'.0 & \quad 0.7668 \\
\lg\varDelta = \underline{9.6128} & \gamma-\delta' = -\;118\;\;36.3 & \lg\varDelta = \underline{9.6128} \\
\lg(\alpha-\alpha') = 1.2290 & & \lg(\delta-\delta') = 1.1540 \\
\alpha-\alpha' = +\;16''.94 & & \delta-\delta' = +\;14''.3 \\
\quad = +\;\;1^{s}.13 & &
\end{array}$$

der geocentrische Ort des Cometen ist daher:

$$\alpha = 19^{h}\,39^{m}\,18^{s}.80 \qquad \delta = +\;39^{0}\,22'\,33''.9.$$

48. Parallaxe in Länge und Breite. Für diesen Fall sind die beiden Coordinaten-Systeme so anzuordnen, dass die Ebenen der xy parallel werden zur Ebene der Ekliptik, die Axen der x, so wie im Vorhergehenden, nach dem Frühlingspuncte, jene der y nach dem 90^{ten} Grade der Länge gerichtet sind. In den Ausdrücken für x, y, z und x', y', z' treten dann offenbar, gemäss den Glgn. (5), [§. 13] beziehungsweise λ, β und λ', β' an die Stelle von α, δ und α', δ'; in den Ausdrücken von X, Y, Z des §. 45 sind ferner θ und φ' nichts anderes als die sphärischen auf den Aequator bezogenen Coordinaten jenes Punctes der scheinbaren Himmelskugel, in welchem dieselbe von dem verlängerten Erdhalbmesser CB (Fig. 14) getroffen wird, d. i. Rectascension und Declination dieses Punctes (oder des geocentrischen Zenithes); bezieht man daher diesen Punct auf die Ekliptik, indem man dessen Rectascension und Declination (θ, φ') nach den Formeln des §. 18, in Länge und Breite (l, b) verwandelt, so hat man in den Ausdrücken von X, Y, Z nur l, b an die Stelle von θ und φ' zu setzen. Hieraus folgt also, dass die Formeln der §§. 45, 46, 47, unmittelbar auf den vorliegenden Fall übertragen werden, wenn man an die Stelle von:

$$\begin{array}{cccccc}
\alpha, & \delta, & \alpha', & \delta', & \theta, & \varphi': \\
\lambda, & \beta, & \lambda', & \beta', & l, & b
\end{array}$$

setzt. Hiernach werden die genäherten Formeln für die Parallaxe in Länge und Breite:

$$\left.\begin{aligned}
\lambda-\lambda' &= \pi\varrho\cos b\,\frac{\sin(l-\lambda)}{\varDelta\cos\beta}, \\
\operatorname{tg}\gamma &= \frac{\operatorname{tg} b}{\cos(l-\lambda)}, \\
\beta-\beta' &= \pi\varrho\sin b\,\frac{\sin(\gamma-\beta)}{\varDelta\sin\gamma},
\end{aligned}\right\}\quad(89)$$

wo l und b aus folgenden Gleichungen [§. 18] erhalten werden:

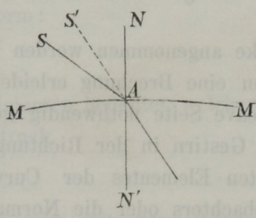
$$\operatorname{tg} M = \frac{\operatorname{tg} \varphi'}{\sin \theta}, \tag{90}$$
$$\operatorname{tg} l = \frac{\cos (M - \varepsilon)}{\cos M} \operatorname{tg} \theta, \qquad \operatorname{tg} b = \operatorname{tg} (M - \varepsilon) \sin l.$$

Hiebei ist l in jenem Quadranten zu nehmen, welcher dem Zeichen von $\operatorname{tg} l$ entspricht, und dem $\cos l$ gleiches Zeichen mit $\cos \theta$ verleiht.

Die Refraction.

49. Das Licht pflanzt sich nur so lange geradlinig fort, als dasselbe den leeren Raum oder ein Mittel von gleichförmiger Dichte durchläuft. Tritt jedoch ein Lichtstrahl aus dem leeren Raume oder irgend einem Mittel in schiefer Richtung in ein anderes von verschiedener Dichte, so wird derselbe an der Trennungsfläche beider Mittel von seiner Richtung abgelenkt, er wird gebrochen. Man nennt den Strahl vor seinem Eintritte in das zweite Mittel den einfallenden Strahl, nach demselben den gebrochenen Strahl. Sei (Fig. 15) MM' die (ebene oder krumme) Trennungsfläche zweier Mittel von verschiedener Dichte, SA der einfallende, AB der gebrochene Strahl, NAN' die Normale der Trennungsfläche im Einfallspuncte A, welche das Einfallsloth genannt wird. Eine Ebene, durch den einfallenden Strahl und die Normale gelegt, heisst die Einfallsebene, der Winkel SAN, welchen der einfallende Strahl mit der Normale bildet, der Einfallswinkel, der Winkel BAN' des gebrochenen Strahles mit dem Einfallslothe der Brechungswinkel. Ist der Brechungswinkel (wie in der Figur) kleiner als der Einfallswinkel, so sagt man, der Strahl werde zum Einfallslothe gebrochen; es findet dies im allgemeinen statt, wenn das Licht aus einem dünneren in ein dichteres Mittel übergeht; im umgekehrten Falle sagt man, der Strahl werde vom Einfallslothe gebrochen. Ein Auge, welches sich in irgend einem Puncte des gebrochenen Strahles AB befindet, wird den leuchtenden Punct S, von welchem der Strahl ausgeht, in der Richtung BAS', also nicht an seinem wahren Orte erblicken.

Fig. 15.



Diese Brechung des Lichtes erfolgt bekanntlich nach folgenden Gesetzen: 1) Der gebrochene Strahl liegt stets in der Einfallsebene. 2) Für zwei bestimmte brechende Mittel steht der Sinus des Einfallswinkels, bei jeder Grösse des letzteren, zum Sinus des Brechungswinkels in einem constanten Verhältniss, welches der Brechungsindex oder Brechungsexponent genannt wird.

50. Die Erde ist von einer Atmosphäre umgeben, deren Dichte an der Oberfläche der Erde am grössten ist und mit zunehmender Entfernung von derselben stetig abnimmt. Man kann sich dieselbe als aus concentrischen Schichten von sehr geringer Dicke und abnehmender Dichte bestehend vor-