

Was endlich die Umwandlung der Sternzeit in wahre Zeit und umgekehrt betrifft, so ist es am einfachsten, zuerst von der gegebenen Zeit nach obiger Vorschrift auf mittlere Zeit überzugehen, und diese sodann in die gesuchte Zeit zu verwandeln.

VIERTES CAPITEL.

VON DER PARALLAXE UND REFRACTION.

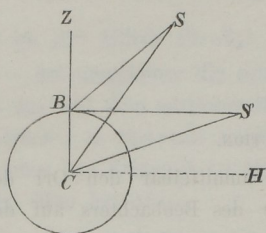
37. Durch die Beobachtungen erhält man unmittelbar den Ort der Gestirne, an welchem dieselben vom Standpuncte des Beobachters auf der Oberfläche der Erde gesehen werden, während die astronomischen Tafeln und Ephemeriden jenen Ort geben, an welchem dieselben vom Mittelpuncte der Erde aus erscheinen. Beide Richtungen werden nur dann als parallel zu betrachten sein, wenn die Entfernung des Gestirnes im Verhältnisse zum Halbmesser der Erde als unendlich gross angenommen werden kann, wie dies bei den Fixsternen der Fall ist. Ist aber der Erdhalbmesser nicht verschwindend klein im Verhältniss zur Entfernung des Gestirnes, wie bei Sonne, Mond, Planeten und Cometen, so schliessen beide Richtungen einen Winkel ein, welcher die Parallaxe genannt wird. Sollen dann die beobachteten Oerter dieser Gestirne mit den aus den Ephemeriden entnommenen vergleichbar werden, so muss man im Stande sein, den beobachteten Ort auf den Mittelpunct der Erde zu reduciren und umgekehrt.

Das Licht, welches von den Gestirnen kommt, muss ferner auf seinem Wege zu unserem Auge durch die Atmosphäre gehen, von welcher unsere Erde umgeben ist, und erleidet in dieser eine Brechung, wodurch die Strahlen von ihrer geraden Richtung abgelenkt werden. Die Richtung, welche der Strahl bei seinem Eintritte in das Auge besitzt, und in welcher wir das Gestirn erblicken, ist daher verschieden von derjenigen, welche ohne Dazwischenkunft der Atmosphäre stattfinden würde, und der Unterschied beider Richtungen heisst die Refraction, oder wohl auch die astronomische Refraction zum Unterschiede von der irdischen, welche dann in Betracht kommt, wenn das beobachtete Object sich in der Atmosphäre der Erde befindet. Wir müssen daher die Mittel besitzen, um den beobachteten Ort eines Gestirnes von dem Einflusse der Refraction zu befreien.

Die Parallaxe.

38. Unter Parallaxe versteht man im Allgemeinen den Unterschied der Richtungen der geraden Linien, welche von zwei Puncten zu dem Gestirne gezogen werden, also den Winkel, welchen die beiden Geraden am Gestirne einschliessen; im folgenden wird immer angenommen, dass der eine dieser Puncte der Mittelpunct der Erde, der andere irgend ein Punct auf ihrer Oberfläche sei.

Nehmen wir zunächst die Erde als kugelförmig an, und sei C (Fig. 9) der Mittelpunkt, B der Ort des Beobachters auf der Oberfläche derselben, CBZ die Verticalrichtung, d. i. die Richtung nach dem Zenith des Beobachters, BS' und CH senkrecht auf CZ also horizontal und S ein Gestirn in messbarer Entfernung von der Erde; dann ist der Winkel $ZBS = z'$ die scheinbare Zenithdistanz, der Winkel $ZCS = z$ die wahre oder geocentrische Zenithdistanz; die Complementary dieser Winkel zu 90° , nämlich $SBS' = h'$ und $SCH = h$ sind die scheinbare und beziehungsweise die wahre oder geocentrische Höhe des Gestirnes; der Winkel $BSC = p'$ ist die Parallaxe in Zenithdistanz oder die Höhenparallaxe. Man hat nun unmittelbar aus der Figur: $\angle ZBS - ZCS = BSC$, d. i.:



$$\begin{aligned} z' - z &= h - h' = p', \\ \text{somit:} \quad z &= z' - p', \quad h = h' + p'. \end{aligned}$$

Durch die Wirkung der Parallaxe wird also, wie man sieht, die Zenithdistanz vergrößert, die Höhe vermindert.

Setzt man den Halbmesser der Erde $BC = \rho$, die Entfernung des Gestirnes vom Mittelpunkt der Erde $CS = \Delta$, so folgt aus dem Dreiecke BCS :

$$\sin p' = \frac{\rho}{\Delta} \sin z'.$$

Für $z' = 0$, d. i. wenn das Gestirn im Zenith steht, wird $p' = 0$; hingegen wird p' ein Maximum, wenn $z' = 90^\circ$, d. i. wenn das Gestirn in S' , im Horizonte des Beobachters sich befindet. Die in letzterem Falle stattfindende Parallaxe $BS'C$ heisst die Horizontalparallaxe; bezeichnen wir sie mit p_0 , so ist:

$$\sin p_0 = \frac{\rho}{\Delta},$$

und

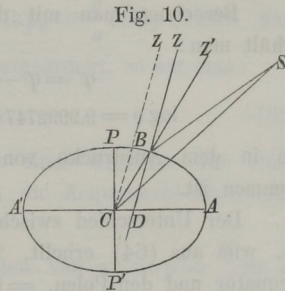
$$\sin p' = \sin p_0 \sin z'. \quad (63)$$

Die Höhenparallaxe ist daher dem Sinus der scheinbaren Zenithdistanz proportional.

Da die Ebene, welche durch die Gesichtslinien BS und CS gelegt wird, nothwendig auch durch das Zenith Z geht, so schneidet dieselbe die Himmelskugel in einem Verticalkreise, in welchem daher sowohl der scheinbare als der wahre Ort des Gestirnes liegen; hieraus folgt, dass, wenn die Erde kugelförmig ist, das Azimuth eines Gestirnes durch die Parallaxe nicht geändert wird.

39. Unsere Erde ist aber keine vollkommene Kugel, sondern hat die Gestalt eines an seinen Polen abgeplatteten Sphäroids, welches durch

Umdrehung einer Ellipse um ihre kleine Axe entsteht. Alle Meridiane der Erde sind daher congruente Ellipsen. Sei in Fig. 10 $ABPP'$ der elliptische Meridian irgend eines Punctes B auf der Oberfläche der Erde, C der Mittelpunkt derselben, BZ die Normale im Puncte B , welche die grosse Axe AA' im Puncte D schneidet. Da die Richtung der Schwerkraft oder die Verticallinie im Puncte B mit der Normale zusammenfällt, so ist Z das Zenith des Beobachters in B ; der verlängerte Erdhalbmesser CB trifft aber die Himmelskugel im Puncte Z' , welcher das geocentrische Zenith des Punctes A heisst. Ist nun S ein



Gestirn, so ist wieder der Winkel $ZBS = z'$ die scheinbare oder beobachtete Zenithdistanz; zieht man ferner parallel zu BZ durch den Mittelpunkt der Erde die CZ , so trifft letztere Gerade das Himmelsgewölbe gleichfalls im Zenith Z , und der Winkel ZCS ist die wahre oder geocentrische Zenithdistanz. Denkt man sich nun das Gestirn S ausserhalb der Meridianebene des Punctes B (in der Figur die Ebene der Zeichnung), so werden zwei Verticalebenen, von welchen die eine durch die Gerade BZ und das Gestirn S , die andere durch die Gerade CZ und das Gestirn S gelegt wird, mit der Meridianebene offenbar verschiedene Winkel einschliessen, woraus folgt, dass in Folge der sphäroidischen Gestalt der Erde auch das Azimuth der Gestirne durch die Parallaxe geändert wird. Uebrigens erreicht diese Aenderung nur bei dem Monde einen merklichen Betrag; bei allen andern Gestirnen ist sie verschwindend.

Der Winkel $ADB = \varphi$, welchen die Normale BD mit der Ebene des Aequators bildet, ist die Polhöhe oder geographische Breite des Punctes B ; der Winkel $ACB = \varphi'$, welchen der Halbmesser $CB = \rho$ des Punctes B mit der Ebene des Aequators einschliesst, heisst die geocentrische oder verbesserte Breite des Punctes B . Bei den parallactischen Rechnungen werden die beiden Grössen φ' und ρ benöthiget. Setzt man die halbe grosse Axe des elliptischen Meridians, oder den Halbmesser des Aequators $AC = a$, die halbe Polaraxe $CP = b$, und

$$\frac{a-b}{a+b} = n, \quad \frac{2n}{1+n^2} = N,$$

so ist, wie wir im geodätischen Theile finden werden :

$$\varphi' = \varphi - \frac{N}{\sin 1''} \sin 2\varphi + \frac{1}{2} \frac{N^2}{\sin 1''} \sin 4\varphi - \dots$$

$$\log \rho = \log \left(a \frac{1+n^2}{1+n} \right) + M \left\{ (N-n) \cos 2\varphi - \frac{1}{2} (N^2 - n^2) \cos 4\varphi + \dots \right\}$$

wobei $M = 0.4342945$ den Modulus der briggschen Logarithmen bedeutet. Nun ist nach Bessel:

$$a = 3272077.14 \text{ Toisen}$$

$$b = 3261139.33 \quad ,,$$

Berechnet man mit diesen Werthen die Coefficienten der Reihen, so erhält man:

$$\varphi' = \varphi - 690''.65 \sin 2\varphi + 1''.16 \sin 4\varphi, \quad (64)$$

$$\log \varrho = 9.9992747 + 0.0007271 \cos 2\varphi - 0.0000018 \cos 4\varphi, \quad (65)$$

wo in dem Ausdrucke von $\log \varrho$ der Aequatorealhalbmesser $a = 1$ angenommen ist.

Der Unterschied zwischen der geographischen und geocentrischen Breite ist, wie aus (64) erhellt, für $\varphi = 0^\circ$ und für $\varphi = 90^\circ$, d. i. unter dem Aequator und den Polen, $= 0$, und erreicht sehr nahe in der geographischen Breite $\varphi = 45^\circ$ sein Maximum $= 11\frac{1}{2}$ Minute.

Für Wien ($\varphi = 48^\circ 12'$) findet man z. B.:

$$\varphi' - \varphi = -11' 26''.60 \quad \log \varrho = 9.9991954.$$

40. Die Horizontalparallaxe eines Gestirnes wird durch die Gleichung:

$$\sin p_0 = \frac{\varrho}{\mathcal{A}} \quad (66)$$

bestimmt, wo ϱ die Entfernung des Beobachters vom Mittelpuncte der Erde bedeutet; in Folge der sphäroidischen Gestalt der Erde ist dieselbe daher verschieden für Punkte auf der Erde von verschiedener Polhöhe, und am grössten für jene unter dem Aequator, weil für diese der Halbmesser ϱ seinen grössten Werth $= a$ erreicht. Man nennt die unter dem Aequator stattfindende Horizontalparallaxe eines Gestirnes dessen Aequatoreal-Horizontal-Parallaxe; bezeichnen wir sie mit p , so ist:

$$\sin p = \frac{a}{\mathcal{A}}. \quad (67)$$

Man pflegt häufig die Aequatoreal-Horizontal-Parallaxe der Gestirne (mit Ausnahme des Mondes) durch jene der Sonne auszudrücken; da nun die Entfernung der Erde von der Sonne, und in Folge dessen auch die Aequatoreal-Horizontal-Parallaxe der letzteren veränderlich ist, so wählt man hiezu, um ein bestimmtes Maass zu haben, jenen Werth derselben, welcher stattfindet, wenn sich die Erde in ihrer mittleren Entfernung von der Sonne (gleich der halben grossen Axe der elliptischen Erdbahn) befindet, und nennt diese die mittlere Aequatoreal-Horizontal-Parallaxe der Sonne. Der Zusammenhang der Grössen ist dann folgender. Bezeichnen wir, wie früher, mit p_0 die Horizontalparallaxe eines Gestirnes für einen Beobachtungsort, dessen Entfernung vom Mittelpunct der Erde $= \varrho$, mit \mathcal{A} die Entfernung des Gestirnes vom Mittelpunct der Erde; mit p die Aequatoreal-Horizontal-Parallaxe desselben Gestirnes; mit π die mittlere Aequatoreal-Horizontal-Parallaxe der Sonne, und mit D deren mittlere Entfernung von der Erde, so ist:

$$\sin p_0 = \frac{\varrho}{\mathcal{A}} \dots \alpha) \quad \sin p = \frac{a}{\mathcal{A}} \dots \beta) \quad \sin \pi = \frac{a}{D} \dots \gamma).$$

Durch Elimination von \mathcal{A} aus $\alpha)$ und $\beta)$ folgt: $\sin p_0 = \frac{\varrho}{a} \cdot \sin p$; wird nun, wie dies immer geschieht, ϱ durch a als Einheit ausgedrückt, so hat man:

$$\sin p_0 = \frac{\varrho}{\mathcal{A}} = \varrho \sin p, \quad (68)$$

durch welche Gleichung die Horizontalparallaxe eines Gestirnes für einen Beobachtungsort, dessen Halbmesser $= \varrho$, durch die Aequatoreal-Horizontal-Parallaxe des Gestirnes ausgedrückt wird.

Ferner folgt aus $\beta)$ und $\gamma)$ durch Elimination von a : $\sin p = \frac{D}{\mathcal{A}} \sin \pi$; man nimmt nun die mittlere Entfernung der Erde von der Sonne $D = 1$ an, und drückt die Entfernungen \mathcal{A} der Gestirne durch diese Einheit aus, dadurch wird:

$$\sin p = \frac{\sin \pi}{\mathcal{A}}, \quad (69)$$

eine Gleichung, welche die Aequatoreal-Horizontal-Parallaxe eines Gestirnes, dessen Entfernung von der Erde $= \mathcal{A}$, durch die mittlere Aequatoreal-Horizontal-Parallaxe der Sonne ausdrückt.

Nach Encke ist die mittlere Aequatoreal-Horizontal-Parallaxe der Sonne:

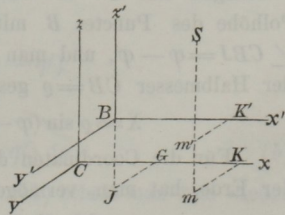
$$\pi = 8''.57116,$$

welcher Werth noch allgemein angenommen wird, bis die neueren Untersuchungen, welche eine Vergrößerung desselben auf nahe $8''.9$ erfordern, zum Abschluss gebracht sein werden.

41. Die Aenderung der Richtung der Gesichtslinie durch die Parallaxe hat nicht nur eine Aenderung von Höhe und Azimuth, sondern auch der Rectascension und Declination, so wie der Länge und Breite des Gestirnes zur Folge. Wir haben daher die Aufgabe aufzulösen: Wenn der scheinbare Ort eines Gestirnes (sei es Höhe und Azimuth, oder Rectascension und Declination, oder Länge und Breite) gegeben ist, daraus den wahren oder geocentrischen, vom Mittelpuncte der Erde gesehenen abzuleiten, und umgekehrt.

Zu diesem Zwecke legen wir durch den Mittelpunct der Erde C (Fig 11) und durch den Beobachtungsort B zwei zu einander parallele Systeme von rechtwinkligen Coordinatenaxen, so dass in jedem der beiden Systeme die Ebene der xy parallel liegt zur Grundebene der sphärischen Coordinaten, für welche die Parallaxe gesucht wird; ist dann S das Gestirn, und man fällt von den Puncten B und S auf die Ebene der xy die Perpendikel BJ und Sm , welch' letzteres die Ebene der $x'y'$ im Puncte m' schneidet, und zieht JG und mK senkrecht auf Cx , $m'K'$ senkrecht auf Cx' , so sind:

Fig. 11.



$CG = X$, $JG = Y$, $BJ = Z$ die Coordinaten von B , bezogen auf C ,
 $CK = x$, $mK = y$, $Sm = z$, „ „ „ S , „ „ C ,
 $BK' = x'$, $m'K' = y'$, $Sm' = z'$ „ „ „ S , „ „ B ,

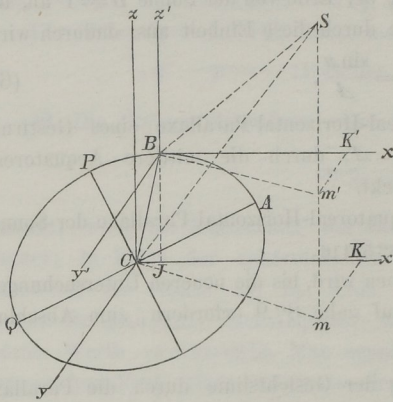
und es bestehen ganz allgemein die Gleichungen:

$$x' = x - X, \quad y' = y - Y, \quad z' = z - Z; \tag{70}$$

drückt man nun diese rechtwinkligen Coordinaten durch die entsprechenden sphärischen Coordinaten aus, so hat man in jedem Falle die Grundformeln der Parallaxe.

42. Parallaxe in Azimuth und Zenithdistanz. Gemäss dem in vorhergehenden §. Gesagten werden für diesen Fall die beiden Systeme

Fig. 12.



rechtwinkliger Coordinatenachsen so angeordnet, dass die Ebenen der xy und $x'y'$ parallel zum Horizonte des Beobachtungsortes B (Fig. 12) liegen, ferner die positiven Halbaxen der x und x' gegen den Südpunct, jene der y und y' gegen den Westpunct, jene der z und z' gegen das Zenith gerichtet seien. Bei dieser Anordnung fallen die Ebenen der xz und $x'z'$ zusammen mit der Ebene des Meridians $BPQA$ des Beobachtungsortes B , und es ist, wenn S das Gestirn:

- $\angle mCK = A$ das wahre oder geocentrische Azimuth,
- $\angle mCS = z$ die „ „ „ Zenithdistanz,
- $CS = A$ die Entfernung des Gestirnes vom Mittelpunct der Erde;
- $\angle m'BK' = A'$ das scheinbare Azimuth,
- $\angle m'BS = z'$ die „ „ Zenithdistanz,
- $BS = A'$ die Entfernung vom Beobachtungsorte.

Fällt man nun von dem, in der Ebene der xz liegenden Punkte B das Perpendikel BJ auf die Ebene der xy , so sind die Coordinaten des Punctes B bezogen auf C : $X = CJ$, $Y = 0$, $Z = BJ$; bezeichnet man daher die Polhöhe des Punctes B mit φ , dessen geocentrische Breite mit φ' , so ist $\angle CBJ = \varphi - \varphi'$, und man hat aus dem rechtwinkligen Dreiecke CBJ , wenn der Halbmesser $CB = \rho$ gesetzt wird:

$$X = \rho \sin(\varphi - \varphi'), \quad Y = 0, \quad Z = \rho \cos(\varphi - \varphi').$$

Für die Coordinaten des Gestirnes S , bezogen auf den Mittelpunct C der Erde, hat man, vermöge der Gln. (3):

$$x = A \sin z \cos A, \quad y = A \sin z \sin A, \quad z = A \cos z,$$

endlich für die Coordinaten von S , bezogen auf B :

$$x' = A' \sin z' \cos A', \quad y' = A' \sin z' \sin A', \quad z' = A' \cos z'.$$

Durch Substitution dieser Werthe in die Glgn. (70) erhält man sofort die Grundformeln der Parallaxe in Azimuth und Zenithdistanz:

$$\begin{aligned} A' \sin z' \cos A' &= A \sin z \cos A - \varrho \sin(\varphi - \varphi'), \\ A' \sin z' \sin A' &= A \sin z \sin A, \\ A' \cos z' &= A \cos z - \varrho \cos(\varphi - \varphi'). \end{aligned} \quad (71)$$

Die beiden ersten dieser Formeln bringt man nun leicht auf eine für den vorliegenden Zweck bequemere Form, indem man einmal die 1^{te} mit $\sin A$, die 2^{te} mit $\cos A$ multiplicirt und die Producte subtrahirt, dann die 1^{te} mit $\cos A$, die 2^{te} mit $\sin A$ multiplicirt und die Producte addirt; man erhält auf diese Art:

$$\begin{aligned} A' \sin z' \sin(A' - A) &= \varrho \sin(\varphi - \varphi') \sin A, \\ A' \sin z' \cos(A' - A) &= A \sin z - \varrho \sin(\varphi - \varphi') \cos A. \end{aligned} \quad (a)$$

Durch Division dieser Gleichungen folgt sofort:

$$\operatorname{tg}(A' - A) = \frac{\varrho \sin(\varphi - \varphi') \sin A}{A \sin z - \varrho \sin(\varphi - \varphi') \cos A};$$

dividirt man Zähler und Nenner durch $A \sin z$, und beachtet, dass zufolge der Gl. (68): $\frac{\varrho}{A} = \varrho \sin p$ ist, wenn p die Aequatoreal - Horizontal - Parallaxe des Gestirnes bedeutet, so erhält man als strenge Formel für die Azimuthal-Parallaxe:

$$\operatorname{tg}(A' - A) = \frac{\frac{\varrho \sin(\varphi - \varphi') \sin p}{\sin z} \sin A}{1 - \frac{\varrho \sin(\varphi - \varphi') \sin p}{\sin z} \cos A}. \quad (72)$$

Um eine ähnliche Formel für die Höhenparallaxe zu erhalten, multipliciren wir die 1^{te} der Glgn. (a) mit $\sin \frac{1}{2}(A' - A)$, die 2^{te} mit $\cos \frac{1}{2}(A' - A)$, so ergibt sich durch Addition der Producte:

$$A' \sin z' = A \sin z - \varrho \sin(\varphi - \varphi') \frac{\cos \frac{1}{2}(A' + A)}{\cos \frac{1}{2}(A' - A)},$$

welche Gleichung durch Einführung eines Hilfwinkels γ , welcher durch die Gleichung:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\cos \frac{1}{2}(A' + A)}{\cos \frac{1}{2}(A' - A)} \operatorname{tg}(\varphi - \varphi')$$

bestimmt wird, folgende Form annimmt:

$$A' \sin z' = A \sin z - \varrho \cos(\varphi - \varphi') \operatorname{tg} \gamma. \quad (b)$$

Aus dieser Gleichung und der 3^{ten} der Glgn. (71) erhält man nun wieder durch das zur Ableitung der Glgn. (a) angewendete Verfahren:

$$\begin{aligned}
 A' \sin(z' - z) &= \rho \cos(\varphi - \varphi') \frac{\sin(z - \gamma)}{\cos \gamma}, \\
 A' \cos(z' - z) &= A - \rho \cos(\varphi - \varphi') \frac{\cos(z - \gamma)}{\cos \gamma},
 \end{aligned}
 \tag{c}$$

und hieraus durch Division:

$$\operatorname{tg}(z' - z) = \frac{\frac{\rho \cos(\varphi - \varphi')}{\cos \gamma} \sin(z - \gamma)}{A - \frac{\rho \cos(\varphi - \varphi')}{\cos \gamma} \cos(z - \gamma)},$$

oder, wenn man wieder Zähler und Nenner durch A dividirt und $\rho \sin p$ statt $\frac{\rho}{A}$ schreibt:

$$\operatorname{tg}(z' - z) = \frac{\frac{\rho \cos(\varphi - \varphi') \sin p}{\cos \gamma} \sin(z - \gamma)}{1 - \frac{\rho \cos(\varphi - \varphi') \sin p}{\cos \gamma} \cos(z - \gamma)}.
 \tag{73}$$

Dies ist die strenge Formel für die Parallaxe in Zenithdistanz. Was den Hilfswinkel γ betrifft, so kann man, da selbst für den Mond die Differenz $A' - A$ immer sehr klein ist, und $\varphi - \varphi'$ bekanntlich nicht grösser als $11'.5$ wird, zur Berechnung desselben immer der Formel:

$$\gamma = (\varphi - \varphi') \cos A
 \tag{74}$$

sich bedienen, welche aus obigem Ausdrücke von $\operatorname{tg} \gamma$ hervorgeht, wenn man statt der Tangenten die Bögen, ferner A statt $\frac{1}{2}(A' + A)$ und $\cos \frac{1}{2}(A' - A) = 1$ setzt.

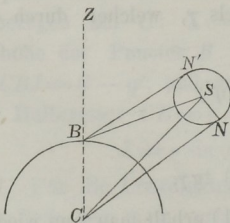
Multiplicirt man endlich die 3^{te} der Gln. (71) mit $\sin \gamma$, die Gl. (b) mit $\cos \gamma$, und subtrahirt die Producte, so erhält man:

$$A' = A \frac{\sin(z - \gamma)}{\sin(z' - \gamma)},
 \tag{75}$$

durch welche Gleichung die scheinbare Entfernung des Gestirnes vom Beobachtungsorte gegeben ist.

Erscheint das Gestirn als eine sichtbare Scheibe, so versteht man unter Halbmesser desselben den Winkel, unter welchem der lineare Radius der Scheibe

Fig. 13.



gesehen wird. Sei (Fig. 13) C der Mittelpunkt der Erde, B der Ort des Beobachters auf der Oberfläche derselben, S der Mittelpunkt des Gestirnes, welches wir von sphärischer Gestalt voraussetzen; zieht man die Tangenten CN, BN' , so ist der Winkel $SCN = R$ der geocentrische, der Winkel $SBN' = R'$ der scheinbare Halbmesser; ist nun $r = SN = SN'$ der lineare Radius des Gestirnes, ausgedrückt in derselben Längeneinheit wie die Entfernungen $CS = A$ und $BS = A'$, so hat man aus den rechtwinkligen

Dreiecken CNS und $BN'S$:

$$\sin R = \frac{r^*}{A}, \quad \sin R' = \frac{r}{A'}$$

Hieraus folgt: $\frac{\sin R'}{\sin R} = \frac{A}{A'}$, oder genügend genau: $\frac{R'}{R} = \frac{A}{A'}$; mit Zuziehung der Gl. (75) erhält man daher für den scheinbaren, durch die Parallaxe vergrösserten Halbmesser des Gestirnes den Ausdruck:

$$R' = R \frac{\sin(z' - \gamma)}{\sin(z - \gamma)}. \quad (76)$$

Uebrigens ist diese in Folge der Parallaxe eintretende Vergrösserung des Halbmessers nur bei dem Monde merklich.

Beispiel. Man suche die Parallaxe des Mondes in Zenithdistanz und Azimuth für Greenwich, 1860, März 6, 8^h mittlere Zeit.

Es ist für Greenwich:

$$\varphi = 51^\circ 28' 38''.0, \quad \varphi' = 51^\circ 17' 25''.43; \quad \varphi - \varphi' = 11' 12''.57, \quad \log \varrho = 9.999113$$

Für die gegebene Zeit findet man aus dem Nautical Almanac die Rectascension, Declination, Aequatoreal-Horizontal-Parallaxe und den Halbmesser des Mondes:

$$\begin{aligned} \alpha &= 10^h 29^m 55^s.65, & \delta &= +6^\circ 59' 47''.2, \\ p &= 61' 23''.8 & R &= 16' 46''.1, \end{aligned}$$

und hat nun zunächst die geocentrischen Grössen A und z zu berechnen und zu diesem Zwecke den Stundenwinkel des Mondes für die gegebene Zeit zu suchen. Nun ist:

Sternzeit im mittleren Mittag zu Greenwich, 1860, März 6,	22 ^h 57 ^m 45 ^s .02
Gegebene mittlere Zeit	8 0 0.00
Acceleration der Sternzeit in 8 ^h +	1 18.85
Sternzeit θ =	6 59 3.87
α =	10 29 55.65
Oestlicher Stundenwinkel t = -	3 30 51.78
	= - 52° 42' 56''.70

*) Verbindet man diese Gleichung mit jener (67): $\sin p = \frac{a}{A}$, in welcher a den Halbmesser des Erd-Aequators, p die Aequatoreal-Horizontal-Parallaxe des Gestirnes bezeichnet, so kommt:

$$\frac{\sin R}{\sin p} = \frac{r}{a};$$

das Verhältniss der Sinusse des geocentrischen Halbmessers und der Aequatoreal-Horizontal-Parallaxe eines Gestirnes ist daher constant. Für den Mond ist dieses Verhältniss nach Hansen's Mondtafeln:

$$\frac{\sin R}{\sin p} = \frac{r}{a} = 0.272956.$$

Mit den Werthen von φ, δ, t findet man [§. 16]:

$$A = -63^{\circ} 27' 13''.00 \text{ (östlich)}, \quad z = 61^{\circ} 58' 48''.60,$$

und die Berechnung der scheinbaren Grössen A', z', R' ist nach den Formeln (72), (74), (73) und (76) folgende:

lg ρ	= 9.99911	lg $(\varphi - \varphi')$	= 2.82774	lg ρ	= 9.999113
lg sin $(\varphi - \varphi')$	= 7.51331	lg cos A	= 9.65023	lg cos $(\varphi - \varphi')$	= 9.999998
lg sin p	= 8.25185		2.47797	lg sin p	= 8.251848
	5.76427	$\gamma = 5' 0''.59$			8.250959
lg sin z	= 9.94585	$z - \gamma = 61^{\circ} 53' 48''.0$		lg sin $(z - \gamma)$	= 9.945518
	5.81842			lg cos $(z - \gamma)$	= 9.673079
lg sin A	= 9.95162 _n	$z' - \gamma = 62^{\circ} 48' 17''.8$		lg Zähler	= 8.196477
lg cos A	= 9.65023	lg sin $(z - \gamma)$	= 9.945518		7.924038
lg Zähler	= 5.77004 _n	lg sin $(z' - \gamma)$	= 9.949125		0.008395
	5.46865		0.003607		0.991605
	0.00003	lg R	= 3.002641	lg Nenner	= 9.996339
	0.99997	lg R'	= 3.006248	lg tg $(z' - z)$	= 8.200138
lg Nenner	= 9.99999	$R = 1014''.49$		$z' - z = 0^{\circ} 54' 29''.84$	
lg tg $(A' - A)$	= 5.77005 _n	= 16' 54''.49		$z' = 62^{\circ} 53' 18''.44$	
$A' - A = -12''.15$					
$A = -63^{\circ} 27' 25''.15$					

43. Die vorhergehenden Formeln setzen voraus, dass die geocentrischen Grössen z, A gegeben sind und die scheinbaren z', A' gesucht werden; für den umgekehrten Fall sind folgende Formeln bequem. Multiplicirt man die Gl. (b) [§. 42] mit $\cos z'$, die 3^{te} der Gln. (71) mit $\sin z'$, und subtrahirt die Producte, so erhält man:

$$\sin(z' - z) = \rho \cos(\varphi - \varphi') \sin p \frac{\sin(z' - \gamma)}{\cos \gamma}, \quad (77)$$

wo der Winkel γ immer genügend genau durch die Gleichung:

$$\gamma = (\varphi - \varphi') \cos A'$$

gefunden wird. Multiplicirt man ferner die 1^{te} der Gln. (71) mit $\sin A'$, die 2^{te} mit $\cos A'$, so folgt durch Subtraction der Producte:

$$\sin(A' - A) = \rho \sin(\varphi - \varphi') \sin p \frac{\sin A'}{\sin z}, \quad (78)$$

wo z durch Berechnung der Gl. (77) bereits bekannt ist.

44. Für den Mond, dessen Aequatoreal-Horizontal-Parallaxe immer zwischen 54 und 61 Minuten beträgt, muss man sich, wenn die Rechnung scharf geführt werden soll, der im Vorhergehenden entwickelten strengen Formeln bedienen; für alle anderen Gestirne ist die Aequatoreal-Horizontal-Parallaxe p so klein, dass die Parallaxe in Azimuth immer unmerklich wird und für die Höhenparallaxe eine Näherungsformel ausreicht. Setzt man, da

$\varphi - \varphi'$ und γ die Grenze 11'.5 nicht überschreiten, in (77) die Cosinuse dieser Winkel = 1, so erhält man:

$$z' - z = \varrho p \sin [z' - (\varphi - \varphi') \cos A']; \quad (79)$$

vernachlässigt man noch die Abweichung der Erde von der Kugelgestalt, so hat man $\varrho = 1$, $\varphi - \varphi' = 0$, und

$$z' - z = p \sin z', \quad (80)$$

welche Formel, übereinstimmend mit Gl. (63), für die Sonne und die Planeten immer genügend genau ist.

Auch für den scheinbaren Halbmesser R' lässt sich leicht eine bequeme Näherungsformel entwickeln. Dividirt man die Glgn. (c) [§. 42] durch A , schreibt $\varrho \sin p$ für $\varrho : A$, und setzt Kürze halber:

$$\frac{\varrho \sin p \cos(\varphi - \varphi')}{\cos \gamma} = m,$$

so werden dieselben:

$$\frac{A'}{A} \sin(z' - z) = m \sin(z - \gamma), \quad \frac{A'}{A} \cos(z' - z) = 1 - m \cos(z - \gamma);$$

quadrirt man diese Gleichungen und addirt dieselben, so kommt:

$$\left(\frac{A'}{A}\right)^2 = 1 - 2m \cos(z - \gamma) + m^2.$$

Nimmt man nun die Erde als kugelförmig an, so wird $\varrho = 1$, $\varphi - \varphi' = \gamma = 0$, somit $m = \sin p$, und man erhält mit Vernachlässigung des Quadrates von $\sin p$:

$$\frac{A'}{A} = 1 - \sin p \cos z,$$

folglich:

$$\frac{R'}{R} = \frac{A}{A'} = \frac{1}{1 - \sin p \cos z} = 1 + \sin p \cos z,$$

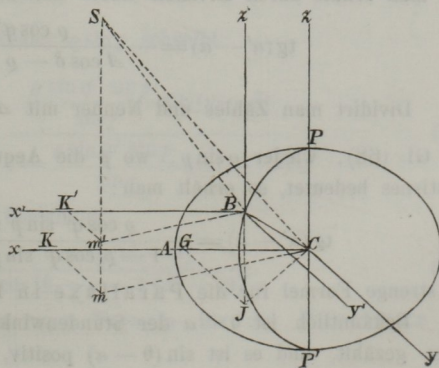
also:

$$R' = R + R \sin p \cos z. \quad (81)$$

In dem Beispiele des §. 42 erhält man nach dieser Formel $R' = 16' 54'' .54$.

45. Parallaxe in Rectascension und Declination. Legen wir durch den Mittelpunct C der Erde (Fig. 14) drei senkrechte Axen der x, y, z , so dass die positive Halbaxe der z nach dem Nordpole gerichtet sei, die beiden andern Axen daher in der Ebene des Aequators liegen, und zwar möge die positive Halbaxe der x nach dem Frühlingspuncte, jene der y nach

Fig. 14.



dem 90^{ten} Grade der Rectascension gerichtet sein. Drei mit diesen parallele Axen der x' , y' , z' seien durch den Beobachtungsort B gelegt, dessen Meridian PBP' ist. Fällt man das Perpendikel BJ auf die Ebene der xy , und zieht JG senkrecht auf Cx , so sind die Coordinaten von B , bezogen auf C :

$$X = CG, \quad Y = GJ, \quad Z = BJ.$$

Es ist aber der Winkel $G CJ$, gleich dem sphärischen Winkel APB , die Sternzeit $= \theta$ des Beobachtungsortes, und folglich, da $CB = \rho$, $\angle BCJ = \varphi'$, und $JC = \rho \cos \varphi'$:

$$X = \rho \cos \varphi' \cos \theta, \quad Y = \rho \cos \varphi' \sin \theta, \quad Z = \rho \sin \varphi'.$$

Ist ferner S das Gestirn, und bezeichnet man mit α , δ dessen geocentrische, mit α' , δ' dessen scheinbare Rectascension und Declination, so ist $\angle xCm = \alpha$, $SCm = \delta$, $x'Bm' = \alpha'$, $SBm' = \delta'$; setzt man nun wieder $CS = \mathcal{A}$, $BS = \mathcal{A}'$, so sind, zufolge der Glgn. (4) die Coordinaten von S bezogen auf C :

$$x = \mathcal{A} \cos \delta \cos \alpha, \quad y = \mathcal{A} \cos \delta \sin \alpha, \quad z = \mathcal{A} \sin \delta;$$

die Coordinaten von S bezogen auf B :

$$x' = \mathcal{A}' \cos \delta' \cos \alpha', \quad y' = \mathcal{A}' \cos \delta' \sin \alpha', \quad z' = \mathcal{A}' \sin \delta'.$$

Substituirt man diese Werthe in die Glgn. (70), so erhält man als Grundformeln der Parallaxe in Rectascension und Declination:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}' \cos \delta' \cos \alpha' &= \mathcal{A} \cos \delta \cos \alpha - \rho \cos \varphi' \cos \theta, \\ \mathcal{A}' \cos \delta' \sin \alpha' &= \mathcal{A} \cos \delta \sin \alpha - \rho \cos \varphi' \sin \theta, \\ \mathcal{A}' \sin \delta' &= \mathcal{A} \sin \delta - \rho \sin \varphi' \end{aligned} \quad (82)$$

Wenn man einmal die erste dieser Gleichungen mit $\sin \alpha$, die zweite mit $\cos \alpha$ multiplicirt und die Producte subtrahirt, dann die erste mit $\cos \alpha$, die zweite mit $\sin \alpha$ multiplicirt und die Producte addirt, so verwandeln sich dieselben in folgende:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}' \cos \delta' \sin(\alpha' - \alpha) &= -\rho \cos \varphi' \sin(\theta - \alpha) \\ \mathcal{A}' \cos \delta' \cos(\alpha' - \alpha) &= \mathcal{A} \cos \delta - \rho \cos \varphi' \cos(\theta - \alpha), \end{aligned} \quad (a)$$

und man erhält durch Division dieser Gleichungen:

$$\operatorname{tg}(\alpha' - \alpha) = -\frac{\rho \cos \varphi' \sin(\theta - \alpha)}{\mathcal{A} \cos \delta - \rho \cos \varphi' \cos(\theta - \alpha)}.$$

Dividirt man Zähler und Nenner mit $\mathcal{A} \cos \delta$, und setzt für $\frac{\rho}{\mathcal{A}}$, gemäss der Gl. (68), wieder $\rho \sin p$, wo p die Aequatoreal-Horizontal-Parallaxe des Gestirnes bedeutet, so erhält man:

$$\operatorname{tg}(\alpha' - \alpha) = -\frac{\rho \cos \varphi' \sin p \sec \delta \sin(\theta - \alpha)}{1 - \rho \cos \varphi' \sin p \sec \delta \cos(\theta - \alpha)} \quad (83)$$

als strenge Formel für die Parallaxe in Rectascension.

Bekanntlich ist $\theta - \alpha$ der Stundenwinkel des Gestirnes, von Süd über West gezählt, und es ist $\sin(\theta - \alpha)$ positiv, wenn das Gestirn westlich vom

Meridian steht, negativ wenn östlich. Die Parallaxe vermindert daher die Rectascension der Gestirne, wenn sie auf der Westseite stehen und vergrößert sie auf der Ostseite.

Um eine ähnliche Formel für $\delta' - \delta$ zu erhalten, setzen wir in der zweiten der Gln. (a): $1 - 2 \sin \frac{1}{2} (\alpha' - \alpha)^2$ für $\cos (\alpha' - \alpha)$, so kommt:

$$\mathcal{A} \cos \delta' = \mathcal{A} \cos \delta - \rho \cos \varphi' \cos (\theta - \alpha) + 2 \mathcal{A} \cos \delta' \sin \frac{1}{2} (\alpha' - \alpha)^2,$$

oder, wenn man das letzte Glied mit $\cos \frac{1}{2} (\alpha' - \alpha)$ multiplicirt und dividirt:

$$\mathcal{A} \cos \delta' = \mathcal{A} \cos \delta - \rho \cos \varphi' \cos (\theta - \alpha) + \mathcal{A} \cos \delta' \sin (\alpha' - \alpha) \frac{\sin \frac{1}{2} (\alpha' - \alpha)}{\cos \frac{1}{2} (\alpha' - \alpha)},$$

welche Gleichung, wenn man für $\mathcal{A} \cos \delta' \sin (\alpha' - \alpha)$ den Werth aus der ersten der Gln. (a) substituirt, in folgende übergeht:

$$\mathcal{A} \cos \delta' = \mathcal{A} \cos \delta - \rho \cos \varphi' \frac{\cos [\theta - \frac{1}{2} (\alpha' + \alpha)]}{\cos \frac{1}{2} (\alpha' - \alpha)}.$$

Diese Gleichung verbinden wir nun mit der 3^{ten} der Gln. (82); beide erhalten durch Einführung der Hilfsgrößen β und γ , welche durch die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \beta \sin \gamma &= \sin \varphi' \\ \beta \cos \gamma &= \frac{\cos \varphi' \cos [\theta - \frac{1}{2} (\alpha' + \alpha)]}{\cos \frac{1}{2} (\alpha' - \alpha)} \end{aligned}$$

bestimmt werden, die Form:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \cos \delta' &= \mathcal{A} \cos \delta - \rho \beta \cos \gamma, \\ \mathcal{A} \sin \delta' &= \mathcal{A} \sin \delta - \rho \beta \sin \gamma, \end{aligned} \quad (b)$$

aus welchen wieder, durch das schon mehrmals angewendete Verfahren, die folgenden sich ergeben:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \sin (\delta' - \delta) &= -\rho \beta \sin (\gamma - \delta), \\ \mathcal{A} \cos (\delta' - \delta) &= \mathcal{A} - \rho \beta \cos (\gamma - \delta). \end{aligned}$$

Hieraus folgt:

$$\operatorname{tg} (\delta' - \delta) = -\frac{\rho \beta \sin (\gamma - \delta)}{\mathcal{A} - \rho \beta \cos (\gamma - \delta)},$$

oder, wenn man Zähler und Nenner durch \mathcal{A} dividirt, für β seinen Werth

$\frac{\sin \varphi'}{\sin \gamma}$ einführt, und statt $\frac{\rho}{\mathcal{A}}$ wieder $\rho \sin p$ schreibt:

$$\operatorname{tg} (\delta' - \delta) = -\frac{\rho \sin \varphi' \sin p \sin (\gamma - \delta)}{1 - \frac{\rho \sin \varphi' \sin p}{\sin \gamma} \cos (\gamma - \delta)}, \quad (84)$$

wo der Hilfswinkel γ durch die Gleichung:

$$\operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} \varphi' \frac{\cos \frac{1}{2} (\alpha' - \alpha)}{\cos [\theta - \alpha - \frac{1}{2} (\alpha' - \alpha)]} \quad (85)$$

bestimmt ist. Dies sind die strengen Formeln für die Parallaxe in Declination.

Subtrahirt man endlich die beiden Gleichungen (b), nachdem die erste mit $\sin \gamma$, die zweite mit $\cos \gamma$ multiplicirt worden, so kommt: $\mathcal{A} \sin(\gamma - \delta) = \mathcal{A} \sin(\gamma - \delta)$, somit:

$$\mathcal{A} = \mathcal{A} \frac{\sin(\gamma - \delta)}{\sin(\gamma - \delta)}, \quad (86)$$

und

$$R' = R \frac{\sin(\gamma - \delta')}{\sin(\gamma - \delta)}, \quad (86^*)$$

wodurch die scheinbare Entfernung \mathcal{A} des Gestirnes vom Beobachtungsorte, und dessen scheinbarer Halbmesser R' bestimmt sind.

Beispiel. Man suche die Parallaxe des Mondes in Rectascension und Declination für Greenwich, 1860, März 6, 8^h mittlere Zeit.

Mit den in dem Beispiele §. 42 angeführten Werthen ist die Rechnung folgende, wobei der Kürze wegen $\theta - \alpha = t$ gesetzt ist:

$$\begin{array}{llll} \frac{1}{2} (\alpha' - \alpha) = & + 15' 27''.71 & & \\ t = -52^{\circ} 42' 56''.70 & t - \frac{1}{2} (\alpha' - \alpha) = -52^{\circ} 58' 24''.41 & \lg \rho = & 9.999113 \\ \lg \rho = & 9.999113 & \lg \cos \frac{1}{2} (\alpha' - \alpha) = & 9.999996 & \lg \sin \varphi' = & 9.892276 \\ \lg \cos \varphi' = & 9.796139 & \lg \cos [t - \frac{1}{2} (\alpha' - \alpha)] = & 9.779730 & \lg \sin p = & 8.251848 \\ \lg \sin p = & 8.251848 & & 0.220266 & & 8.143237 \\ \lg \sec \delta = & 0.003246 & \lg \sin \gamma = & 9.954534 & & \\ & 8.050346 & \lg \sin \gamma = & 8.188703 & & \\ \lg \sin t = & 9.900717_n & \gamma = 64^{\circ} 14' 15''.0 & \lg \sin(\gamma - \delta) = & 9.924773 & \\ \lg \cos t = & 9.782307 & \gamma - \delta = 57^{\circ} 14' 27''.8 & \lg \cos(\gamma - \delta) = & 9.733282 & \\ \lg \text{Zähler} = & 7.951063_n & \gamma - \delta' = 57^{\circ} 59' 28''.8 & \lg \text{Zähler} = & 8.113476 & \\ & 7.832653 & \lg \sin(\gamma - \delta') = & 9.928379 & & 7.921985 \\ & 0.006802 & \lg \sin(\gamma - \delta) = & 9.924773 & & 0.008356 \\ & 0.993198 & & 0.003606 & & 0.991644 \\ \lg \text{Nenner} = & 9.997035 & \lg R = & 3.002641 & \lg \text{Nenner} = & 9.996356 \\ \lg \text{tg}(\alpha' - \alpha) = & 7.954028 & \lg R' = & 3.006247 & \lg \text{tg}(\delta' - \delta) = & 8.117120_n \\ \alpha' - \alpha = & + 30' 55''.42 & R' = & 1014''.49 & \delta' - \delta = & -45' 0''.98 \\ \alpha = & 157^{\circ} 59' 50''.17 & & 16' 54''.49 & \delta = & 6^{\circ} 14' 46''.22 \end{array}$$

46. Sind nicht, wie oben vorausgesetzt wurde, die geocentrischen Grössen α , δ , sondern die scheinbaren α' , δ' gegeben, so kann man sich der folgenden Formeln bedienen:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha' - \alpha) &= -\rho \cos \varphi' \sin p \frac{\sin(\theta - \alpha')}{\cos \delta}, \\ \text{tg} \gamma &= \text{tg} \varphi' \frac{\cos \frac{1}{2} (\alpha' - \alpha)}{\cos [\theta - \alpha' + \frac{1}{2} (\alpha' - \alpha)]}, \\ \sin(\delta' - \delta) &= -\rho \sin \varphi' \sin p \frac{\sin(\gamma - \delta')}{\sin \gamma}, \end{aligned} \quad (87)$$

von welchen die erstere entsteht, wenn man die 1^{te} der Glgn. (82) mit $\sin \alpha'$, die 2^{te} mit $\cos \alpha'$ multiplicirt und die Producte subtrahirt; die 3^{te} aus der Subtraction der beiden Glgn. (b) erhalten wird, nachdem die 1^{te} derselben mit $\sin \delta'$, die 2^{te} mit $\cos \delta'$ multiplicirt worden. Der Ausdruck von $\text{tg } \gamma$ ist mit jenem (85) identisch.

Bei Anwendung dieser Formeln erhält man zunächst aus der ersten, indem man im zweiten Theile δ' statt δ nimmt, einen genäherten Werth von $\alpha' - \alpha$, mit welchem aus den beiden anderen γ und $\delta' - \delta$ hinreichend scharf gefunden wird; hiedurch wird δ bekannt und kann $\alpha' - \alpha$ corrigirt werden.

47. Auch hier wird aber der Gebrauch der strengen Formeln (83)—(87) nur bei dem Monde erfordert; für die Planeten und Cometen reichen Näherungsformeln aus, welche aus (87) hervorgehen, wenn man die Sinus der kleinen Bögen $\alpha' - \alpha$, $\delta' - \delta$ und p mit den Bögen vertauscht, und in dem Ausdrucke von $\text{tg } \gamma$ die für diese Gestirne immer sehr kleine Grösse $\frac{1}{2}(\alpha' - \alpha) = 0$ setzt. Ueberdies ist es für solche Gestirne bequemer, statt der Aequatoreal-Horizontal-Parallaxe p derselben ihre Entfernung \mathcal{A} vom Mittelpuncte der Erde mittelst der Gl. (69):

$$\sin p = \frac{\sin \pi}{\mathcal{A}} \quad \text{oder} \quad p = \frac{\pi}{\mathcal{A}}$$

einzuführen, wo $\pi = 8''.57116$ die mittlere Aequatoreal-Horizontal-Parallaxe der Sonne bedeutet. Man erhält auf diese Art als Näherungsformeln für die Parallaxe in Rectascension und Declination:

$$\begin{aligned} \alpha - \alpha' &= \pi \rho \cos \varphi' \frac{\sin(\theta - \alpha')}{\mathcal{A} \cos \delta'}, \\ \text{tg } \gamma &= \frac{\text{tg } \varphi'}{\cos(\theta - \alpha')}, \\ \delta - \delta' &= \pi \rho \sin \varphi' \frac{\sin(\gamma - \delta')}{\mathcal{A} \sin \gamma}, \end{aligned} \quad (88)$$

wo im zweiten Theile statt der scheinbaren Coordinaten α' , δ' ohne merklichen Fehler die geocentrischen α , δ gesetzt werden können, wenn letztere gegeben sind.

Beispiel. In Krakau wurde 1864, Januar 16, 6^h 49^m 49^s.5 mittlere Zeit die scheinbare Rectascension und Declination des Cometen V beobachtet:

$$\alpha' = 19^{\text{h}} 39^{\text{m}} 17^{\text{s}}.67, \quad \delta' = + 39^{\circ} 22' 19''.6;$$

der Logarithmus der Entfernung des Cometen von der Erde war um diese Zeit: $\log \mathcal{A} = 9.6128$. Man sucht den geocentrischen Ort.

Die Polhöhe von Krakau ist $\varphi = 50^{\circ} 3' 50''.0$; nach den Formeln (64) und (65) findet man $\varphi' = 49^{\circ} 52'.5$, $\log \rho = 9.9991$, womit sich die (für einen bestimmten Beobachtungsort constanten) Werthe: $\log \pi \rho \cos \varphi' = 0.7413$, $\log \pi \rho \sin \varphi' = 0.8156$ ergeben. Ferner ist die der gegebenen mittleren Zeit entsprechende Sternzeit: $\theta = 2^{\text{h}} 31^{\text{m}} 27^{\text{s}}.1$, somit $\theta - \alpha' = 6^{\text{h}} 52^{\text{m}} 9^{\text{s}}.4 =$

= 103° 2' 21". Man hat daher nach den Formeln (88):

$$\begin{array}{lll}
 \lg \pi \rho \cos \varphi' & = 0.7413 & \lg \operatorname{tg} \varphi' & = 0.0743 & \lg \pi \rho \sin \varphi' & = 0.8156 \\
 \lg \sin (\theta - \alpha') & = 9.9887 & \lg \cos (\theta - \alpha') & = 9.3534_n & \lg \sin (\gamma - \delta') & = 9.9435_n \\
 \lg \sec \delta' & = 0.1118 & \operatorname{tg} \gamma & = 0.7209_n & \lg \operatorname{cosec} \gamma & = 0.0077_n \\
 & 0.8418 & \gamma & = - 79^\circ 14'.0 & & 0.7668 \\
 \lg A & = 9.6128 & \gamma - \delta' & = - 118 \ 36.3 & \lg A & = 9.6128 \\
 \lg (\alpha - \alpha') & = 1.2290 & & & \lg (\delta - \delta') & = 1.1540 \\
 \alpha - \alpha' & = + 16''.94 & & & \delta - \delta' & = + 14''.3 \\
 & = + 1^s.13 & & & &
 \end{array}$$

der geocentrische Ort des Cometen ist daher:

$$\alpha = 19^h 39^m 18^s.80 \quad \delta = + 39^\circ 22' 33''.9.$$

48. Parallaxe in Länge und Breite. Für diesen Fall sind die beiden Coordinaten-Systeme so anzuordnen, dass die Ebenen der xy parallel werden zur Ebene der Ekliptik, die Axen der x , so wie im Vorhergehenden, nach dem Frühlingspunkte, jene der y nach dem 90^{ten} Grade der Länge gerichtet sind. In den Ausdrücken für x, y, z und x', y', z' treten dann offenbar, gemäss den Gln. (5), [§. 13] beziehungsweise λ, β und λ', β' an die Stelle von α, δ und α', δ' ; in den Ausdrücken von X, Y, Z des §. 45 sind ferner θ und φ' nichts anderes als die sphärischen auf den Aequator bezogenen Coordinaten jenes Punctes der scheinbaren Himmelskugel, in welchem dieselbe von dem verlängerten Erdhalbmesser CB (Fig. 14) getroffen wird, d. i. Rectascension und Declination dieses Punctes (oder des geocentrischen Zenithes); bezieht man daher diesen Punct auf die Ekliptik, indem man dessen Rectascension und Declination (θ, φ') nach den Formeln des §. 18, in Länge und Breite (l, b) verwandelt, so hat man in den Ausdrücken von X, Y, Z nur l, b an die Stelle von θ und φ' zu setzen. Hieraus folgt also, dass die Formeln der §§. 45, 46, 47, unmittelbar auf den vorliegenden Fall übertragen werden, wenn man an die Stelle von:

$$\begin{array}{l}
 \alpha, \delta, \alpha', \delta', \theta, \varphi': \\
 \lambda, \beta, \lambda', \beta', l, b
 \end{array}$$

setzt. Hiernach werden die genäherten Formeln für die Parallaxe in Länge und Breite:

$$\begin{aligned}
 \lambda - \lambda' &= \pi \rho \cos b \frac{\sin (l - \lambda)}{A \cos \beta}, \\
 \operatorname{tg} \gamma &= \frac{\operatorname{tg} b}{\cos (l - \lambda)}, \\
 \beta - \beta' &= \pi \rho \sin b \frac{\sin (\gamma - \beta)}{A \sin \gamma},
 \end{aligned} \tag{89}$$

wo l und b aus folgenden Gleichungen [§. 18] erhalten werden:

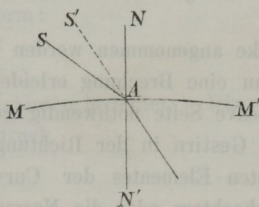
$$\begin{aligned} \operatorname{tg} M &= \frac{\operatorname{tg} \varphi'}{\sin \theta}, \\ \operatorname{tg} l &= \frac{\cos(M - \varepsilon)}{\cos M} \operatorname{tg} \theta, \quad \operatorname{tg} b = \operatorname{tg}(M - \varepsilon) \sin l. \end{aligned} \quad (90)$$

Hiebei ist l in jenem Quadranten zu nehmen, welcher dem Zeichen von $\operatorname{tg} l$ entspricht, und dem $\cos l$ gleiches Zeichen mit $\cos \theta$ verleiht.

Die Refraction.

49. Das Licht pflanzt sich nur so lange geradlinig fort, als dasselbe den leeren Raum oder ein Mittel von gleichförmiger Dichte durchläuft. Tritt jedoch ein Lichtstrahl aus dem leeren Raume oder irgend einem Mittel in schiefer Richtung in ein anderes von verschiedener Dichte, so wird derselbe an der Trennungsfläche beider Mittel von seiner Richtung abgelenkt, er wird gebrochen. Man nennt den Strahl vor seinem Eintritte in das zweite Mittel den einfallenden Strahl, nach demselben den gebrochenen Strahl. Sei (Fig. 15) MM' die (ebene oder krumme) Trennungsfläche zweier Mittel von

Fig. 15.



verschiedener Dichte, SA der einfallende, AB der gebrochene Strahl, NAN' die Normale der Trennungsfläche im Einfallspuncte A , welche das Einfallslothe genannt wird. Eine Ebene, durch den einfallenden Strahl und die Normale gelegt, heisst die Einfallsebene, der Winkel SAN , welchen der einfallende Strahl mit der Normale bildet, der Einfallswinkel, der Winkel BAN' des gebrochenen Strahles mit dem Einfallslothe der Brechungswinkel. Ist der Brechungswinkel (wie in der Figur) kleiner als der Einfallswinkel, so sagt man, der Strahl werde zum Einfallslothe gebrochen; es findet dies im allgemeinen statt, wenn das Licht aus einem dünneren in ein dichteres Mittel übergeht; im umgekehrten Falle sagt man, der Strahl werde vom Einfallslothe gebrochen. Ein Auge, welches sich in irgend einem Punkte des gebrochenen Strahles AB befindet, wird den leuchtenden Punct S , von welchem der Strahl ausgeht, in der Richtung BAS' , also nicht an seinem wahren Orte erblicken.

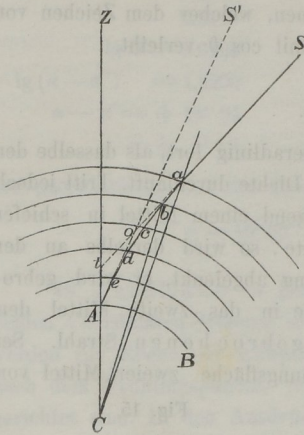
Diese Brechung des Lichtes erfolgt bekanntlich nach folgenden Gesetzen:

- 1) Der gebrochene Strahl liegt stets in der Einfallsebene.
- 2) Für zwei bestimmte brechende Mittel steht der Sinus des Einfallswinkels, bei jeder Grösse des letzteren, zum Sinus des Brechungswinkels in einem constanten Verhältniss, welches der Brechungsindex oder Brechungsexponent genannt wird.

50. Die Erde ist von einer Atmosphäre umgeben, deren Dichte an der Oberfläche der Erde am grössten ist und mit zunehmender Entfernung von derselben stetig abnimmt. Man kann sich dieselbe als aus concentrischen Schichten von sehr geringer Dicke und abnehmender Dichte bestehend vor-

stellen, so dass innerhalb jeder Schichte die Dichte der Luft als constant betrachtet werden darf. Sei, in Fig. 16, C der Mittelpunkt der Erde, welche

Fig. 16.



wir für die vorliegende Betrachtung ohne merklichen Fehler als kugelförmig annehmen können, AB die Oberfläche derselben. Gelangt nun ein Strahl von einem Gestirne S bei a in der Richtung Sa an die obere Grenze der Atmosphäre, d. i. an die erste Schichte, welche auf das Licht eine brechende Wirkung auszuüben vermag, so wird er daselbst gebrochen und zwar zum Einfallslothe Ca , gelangt in der Richtung ab an die nächste Schichte von grösserer Dichte, wird daselbst abermals zum Einfallslothe Cb gebrochen u. s. w., bis er nach einer Reihe von stets zum Einfallslothe erfolgenden Brechungen bei A in der Richtung eA das Auge des Beobachters trifft. Da nun die Dichte von oben nach unten stetig zunimmt, die Schichten also von unendlich kleiner

Dicke angenommen werden müssen, so wird der Strahl in jedem Punkte seiner Bahn eine Brechung erleiden, diese Bahn selbst somit eine Curve sein, deren concave Seite nothwendig gegen die Erde gekehrt ist; der Beobachter wird das Gestirn in der Richtung AeS' , d. i. in der Richtung der Tangente des letzten Elementes der Curve erblicken. Ist CAZ die Verticalrichtung des Beobachters oder die Normale im Punkte A , so muss, in Folge des ersten der beiden im vorhergehenden §. angeführten Gesetze, die durch diese Normale und das letzte Curvenelement Ae gelegte Verticalebene, in welcher somit die Richtung AS' nach dem scheinbaren Orte S' liegt, nothwendig die ganze Bahn des Lichtstrahles, also auch den wahren Ort S enthalten; durch die Refraction wird daher nur die Zenithdistanz eines Gestirnes vermindert, oder die Höhe vergrössert, das Azimuth desselben jedoch nicht geändert.

Der Winkel ZAS' , welchen die scheinbare mit der Wirkung der Refraction behaftete Richtung mit der Verticalrichtung einschliesst, heisst die scheinbare Zenithdistanz, während der Winkel ZAS , welchen eine vom Beobachter zum Sterne gezogene Gerade mit der Verticalrichtung bildet, die wahre Zenithdistanz ist. Der Unterschied beider Winkel $= SAS'$ ist die Refraction, welche zur scheinbaren Zenithdistanz addirt, die wahre Zenithdistanz ZAS gibt*).

*) Der analytische Ausdruck der Refraction, sowie die nach demselben berechnete Tafel gibt, strenge genommen, als Refraction den Winkel SoS' , welchen der ein-

51. Der Betrag der Refraction, d. i. der Winkel SAS' (Fig. 16), wird unter übrigens gleichen Umständen, offenbar um so grösser sein, je dichter die Luft an der Oberfläche der Erde ist. Die Dichte der Luft hängt aber vom Luftdrucke und der Temperatur der Luft ab, welche beide Elemente durch das Barometer und Thermometer angegeben werden. In Folge dieser Abhängigkeit der Refraction von dem jeweiligen Zustande der Atmosphäre berechnet man die Refraction zunächst für einen gewissen Normalzustand der Atmosphäre, d. i. für einen bestimmten Luftdruck und eine bestimmte Temperatur; die für diesen Normalzustand geltende Refraction wird die mittlere Refraction genannt. Diese bedarf dann noch einer von dem beobachteten Barometer- und Thermometerstande abhängigen Verbesserung, um die wahre Refraction zu erhalten, welche zur Zeit der Beobachtung stattfindet.

52. Bezüglich der Entwicklung des analytischen Ausdruckes der Refraction müssen wir in Anbetracht des grösseren Raumes, welchen dieselbe beansprucht, auf ausführlichere Werke verweisen*) und beschränken uns hier auf die Erklärung der Construction der darnach berechneten Tafeln. Die gebräuchlichsten sind die Bessel'schen Refractionstafeln. Bessel bringt den Ausdruck der wahren Refraction in folgende Form:

$$r = \alpha \operatorname{tg} z \cdot \beta^A \gamma^\lambda,$$

wo z die scheinbare Zenithdistanz, α einen Coefficienten bedeutet, welcher sich mit dieser, jedoch nur langsam, ändert; der Ausdruck

$$r_0 = \alpha \operatorname{tg} z$$

ist dann die mittlere Refraction. Eine Tafel gibt mit dem Argumente „scheinbare Zenithdistanz“ oder „scheinbare Höhe“ den $\log \alpha$. Der Factor β hängt vom Luftdrucke, also vom Barometerstande ab; da jedoch der durch das Barometer gemessene Luftdruck nicht allein von der Höhe der Quecksilbersäule, sondern auch von der Temperatur derselben abhängt, so setzt man

$$\beta = BT,$$

wo nun der Factor B von dem abgelesenen Barometerstande, der Factor T von der Temperatur der Quecksilbersäule, welche durch das am Barometer befestigte Thermometer (das sogenannte innere Thermometer) gemessen wird,

fallende Strahl Sa , gehörig verlängert, mit der scheinbaren Richtung AS' bildet; addirt man diesen Winkel zur scheinbaren Zenithdistanz, so erhält man als wahre Zenithdistanz den Winkel Zs , statt des Winkels ZAS ; der Unterschied beider Winkel ist der Winkel tSA und so klein, dass er nur beim Monde (in Folge seiner grossen Nähe), wenn derselbe nahe am Horizonte steht, merklich wird, in allen andern Fällen verschwindet.

*) Brünnow, Lehrbuch der sphärischen Astronomie, Berlin 1862. S. 164, ff. — Bruhns, die astronomische Strahlenbrechung. Leipzig, 1861.

abhängt. Zwei kleine Hilfstafeln geben mit dem Argumente: „Beobachteter Barometerstand“ den $\log B$ und mit dem Argumente: „Inneres Thermometer“ den $\log T$.

Der Factor γ hängt von der Temperatur der äusseren Luft ab, welche durch ein im Freien befindliches (das sogenannte äussere) Thermometer angegeben wird. Eine Hilfstafel gibt den $\log \gamma$.

Die Exponenten A und λ endlich sind Zahlen, welche von der Zenithdistanz abhängen und erst bei grösseren Zenithdistanzen von der Einheit merklich abweichen.

Schreibt man den obigen Ausdruck von r logarithmisch, und BT statt β , so erhält man für den Logarithmus der wahren Refraction r in Bogensekunden den Ausdruck:

$$\log r = \log \alpha + \log \operatorname{tg} z + A (\log B + \log T) + \lambda \log \gamma. \quad (91)$$

53. Von den folgenden Tafeln gibt:

Taf. I. den $\log \alpha$, ferner die Zahlen A und λ mit dem Argumente „scheinbare Zenithdistanz“;

Taf. II. den $\log B$ mit dem Argumente „Barometerstand in Millimetern“*), und den $\log T$ mit dem Argumente „Temperatur in Graden Cels. am inneren Thermometer“;

Taf. III. den $\log \gamma$ mit dem Argumente „Temperatur der Luft in Graden Celsius am äusseren Thermometer“;

Taf. IV. endlich gibt die mittlere Refraction $r_0 = \alpha \operatorname{tg} z$, mit dem Argumente „scheinbare Zenithdistanz“; diese mittlere Refraction entspricht einem normalen Zustand der Atmosphäre bei $+48^{\circ}.75$ Fahr. $= 7^{\circ}.44$ R. $= 9^{\circ}.31$ C. Temperatur der Luft und 29.644 engl. Zoll $= 333.78$ par. Linien $= 752.72$ Millimeter Barometerstand bei $+10^{\circ}$ C. am inneren Thermometer.

*) Die Tafel erstreckt sich von 720 bis 780 Millim., was für Beobachtungsorte in den gewöhnlichen Seehöhen hinreicht; fällt bei grösserer Meereshöhe des Beobachtungsortes das Barometer unter 720 Millim., so findet man den $\log b$ mittelst der Formel:

$$\log B = \log b - 2.875934,$$

wo b den Barometerstand in Millimetern ausgedrückt bedeutet.

Ist die Barometer-Scala nach Pariser oder englischem Maass getheilt, so findet man den $\log B$ mittelst der Formeln:

$$\log B = \log b^L - 2.522759 = \log b^E - 1.471244,$$

wo b^L die Ablesung in Pariser Linien, b^E die Ablesung in englischen Zollen bedeutet.

Endlich ist bekanntlich:

$$c^{\circ} = \frac{1}{8} r^{\circ} = \frac{1}{18} (f^{\circ} - 32^{\circ}),$$

wenn r° und f° die der Temperatur c° Cels. entsprechenden Lesungen an einem beziehungsweise nach Réaumur oder Fahrenheit getheilten Thermometer bedeuten.

Bessel's Refractions-Tafel.

Taf. I. Argument: Scheinbare Zenith-Distanz.

Zen.-Dist.	log α	λ	Zen.-Dist.	log α	A	λ	Zen.-Dist.	log α	A	λ
0°	1.76156		75° 0'	1.75457		1.0197	84° 0'	1.72346	1.0096	1.0951
10	1.76154		20	1.75425		1.0204	10	1.72160	1.0100	1.0992
20	1.76149		40	1.75391		1.0212	20	1.71961	1.0105	1.1036
30	1.76139		76 0	1.75355		1.0220	30	1.71749	1.0110	1.1082
35	1.76130		20	1.75316		1.0230	40	1.71522	1.0115	1.1130
40	1.76119		40	1.75274		1.0241	50	1.71279	1.0121	1.1178
45	1.76104	1.0018								
			77 0	1.75229	1.0026	1.0252	85 0	1.71020	1.0127	1.1229
50	1.76082	1.0023	20	1.75180	1.0027	1.0264	10	1.70772	1.0133	1.1283
52	1.76071	1.0026	40	1.75129	1.0028	1.0281	20	1.70505	1.0140	1.1342
54	1.76058	1.0029	78 0	1.75072	1.0030	1.0299	30	1.70188	1.0147	1.1408
56	1.76042	1.0034	20	1.75013	1.0031	1.0318	40	1.69816	1.0155	1.1478
58	1.76023	1.0040	40	1.74947	1.0033	1.0338	50	1.69384	1.0163	1.1549
			79 0	1.74876	1.0035	1.0357	86 0	1.68908	1.0172	1.1624
60	1.76001	1.0046	20	1.74799	1.0037	1.0377	10	1.68383	1.0182	1.1706
61	1.75988	1.0049	40	1.74714	1.0039	1.0398	20	1.67813	1.0192	1.1794
62	1.75973	1.0054	80 0	1.74623	1.0041	1.0420	30	1.67204	1.0204	1.1888
63	1.75957	1.0058	20	1.74521	1.0043	1.0442	40	1.66560	1.0216	1.1989
64	1.75939	1.0063	40	1.74412	1.0046	1.0466	50	1.65869	1.0230	1.2098
			81 0	1.74288	1.0049	1.0493	87 0	1.65114	1.0244	1.2215
65	1.75919	1.0068	20	1.74155	1.0052	1.0523	10	1.64286	1.0261	1.2341
66	1.75897	1.0075	40	1.74007	1.0056	1.0559	20	1.63353	1.0278	1.2477
67	1.75871	1.0083	82 0	1.73845	1.0060	1.0600	30	1.62278	1.0298	1.2624
68	1.75842	1.0092	20	1.73663	1.0065	1.0646	40	1.61041	1.0318	1.2783
69	1.75809	1.0101	40	1.73459	1.0070	1.0697	50	1.59618	1.0342	1.2955
			83 0	1.73229	1.0075	1.0754	88 0	1.57995	1.0368	1.3141
70	1.75771	1.0111	20	1.72974	1.0081	1.0815	30	1.51530	1.0465	1.3797
71	1.75726	1.0124	40	1.72681	1.0088	1.0879	89 0	1.40764	1.0593	1.4653
72	1.75675	1.0139	84 0	1.72346	1.0096	1.0951	30	1.18228	1.0780	1.5789
73	1.75615	1.0156								
74	1.75543	1.0175								
75	1.75457	1.0197								

Taf. II. Factor B, abhängig vom Barometer.

Factor T, abhängig vom inneren Thermometer.

Milli- meter	log B	Milli- met er	log B	Milli- meter	log B	Cent.- Grad	log T
720	- 0.01860	740	- 0.00670	760	+ 0.00488	- 20°	+ 0.00140
722	- 0.01740	742	- 0.00553	762	+ 0.00602	- 15	+ 0.00105
724	- 0.01619	744	- 0.00436	764	+ 0.00716	- 10	+ 0.00070
726	- 0.01500	746	- 0.00319	766	+ 0.00830	- 5	+ 0.00035
728	- 0.01380	748	- 0.00203	768	+ 0.00943	0	0.00000
730	- 0.01261	750	- 0.00087	770	+ 0.01056	+ 5	- 0.00035
732	- 0.01142	752	+ 0.00028	772	+ 0.01168	+ 10	- 0.00070
734	- 0.01024	754	+ 0.00144	774	+ 0.01281	+ 15	- 0.00105
736	- 0.00906	756	+ 0.00259	776	+ 0.01393	+ 20	- 0.00140
738	- 0.00788	758	+ 0.00374	778	+ 0.01505	+ 25	- 0.00175
740	- 0.00670	760	+ 0.00488	780	+ 0.01616	+ 30	- 0.00210

Taf. III. Factor γ , abhängig vom äussern Thermometer.

Cent.-Grad	log γ	Cent.-Grad	log γ	Cent.-Grad	log γ	Cent.-Grad	log γ
-20°	+0.04734	0°	+0.01448	+12°	-0.00410	+24°	-0.02192
-15	+0.03889	+1	+0.01290	+13	-0.00562	+25	-0.02338
-10	+0.03060	+2	+0.01133	+14	-0.00713	+26	-0.02483
-9	+0.02896	+3	+0.00976	+15	-0.00863	+27	-0.02627
-8	+0.02733	+4	+0.00820	+16	-0.01013	+28	-0.02771
-7	+0.02570	+5	+0.00664	+17	-0.01162	+29	-0.02914
-6	+0.02408	+6	+0.00509	+18	-0.01311	+30	-0.03057
-5	+0.02247	+7	+0.00354	+19	-0.01459	+31	-0.03200
-4	+0.02086	+8	+0.00200	+20	-0.01607	+32	-0.03342
-3	+0.01926	+9	+0.00047	+21	-0.01754	+33	-0.03483
-2	+0.01766	+10	-0.00106	+22	-0.01901	+34	-0.03624
-1	+0.01607	+11	-0.00259	+23	-0.02047	+35	-0.03765
0	+0.01448	+12	-0.00410	+24	-0.02192	+40	-0.04460

Taf. IV. Mittlere Refraction.

Scheinb. Zenith-Dist.	Mittlere Refr.	Scheinb. Zenith-Dist.	Mittlere Refr.	Scheinb. Zenith-Dist.	Mittlere Refr.	Scheinb. Zenith-Dist.	Mittlere Refr.	Scheinb. Zenith-Dist.	Mittlere Refr.
0°	0.0	38°	0' 45.1"	60°	1' 39.7"	76° 0'	3' 47.4"	83° 0'	7' 19.7"
5	5.1	39	0 46.7	61	1 43.8	20	3 52.9	20	7 39.2
10	10.2	40	0 48.4	62	1 48.2	40	3 58.8	40	8 0.3
15	15.5	41	0 50.2	63	1 52.8	77 0	4 4.9	84 0	8 23.3
20	21.0	42	0 51.9	64	1 57.8	20	4 11.2	20	8 48.4
21	22.2	43	0 53.8	65	2 3.2	40	4 18.0	40	9 16.0
22	23.3	44	0 55.7	66	2 8.9	78 0	4 25.0	85 0	9 46.5
23	24.5	45	0 57.7	67	2 15.2	20	4 32.4	20	10 21.2
24	25.7	46	0 59.7	68	2 21.9	40	4 40.2	40	10 58.6
25	26.9	47	1 1.8	69	2 29.3	79 0	4 48.5	86 0	11 38.9
26	28.2	48	1 4.0	70	2 37.3	20	4 57.2	20	12 23.7
27	29.4	49	1 6.3	70°30'	2 41.6	40	5 6.4	40	13 15.0
28	30.7	50	1 8.7	71 0	2 46.1	80 0	5 16.2	87 0	14 14.6
29	32.0	51	1 11.2	71 30	2 50.8	20	5 26.5	20	15 23.4
30	33.3	52	1 13.8	72 0	2 55.8	40	5 37.6	40	16 40.7
31	34.7	53	1 16.5	72 30	3 1.0	81 0	5 49.3	88 0	18 8.6
32	36.1	54	1 19.3	73 0	3 6.6	20	6 1.8	20	19 51.9
33	37.5	55	1 22.3	73 30	3 12.4	40	6 15.2	40	21 55.6
34	38.9	56	1 25.4	74 0	3 18.6	82 0	6 29.6	89 0	24 24.6
35	40.4	57	1 28.7	74 30	3 25.1	20	6 45.1	20	27 22.7
36	41.9	58	1 32.1	75 0	3 32.1	40	7 1.7	40	30 52.3
37	43.5	59	1 35.8	75 30	3 39.5	83 0	7 19.7	90 0	34 54.1
38	45.1	60	1 39.7	76 0	3 47.4				

Beispiel. Die beobachtete scheinbare Zenithdistanz sei $z = 78^\circ 4' 27''.3$;
Barom.: 746.3 Millim.; inn. Therm.: $+16^\circ.4$ C.; äusseres Therm.: $+14^\circ.8$.

Wir erhalten aus Taf. I. für $z = 78^\circ 4' 27''.3$:

$$\log \alpha = 1.75059, \quad A = 1.0030, \quad \lambda = 1.0303;$$

$$\text{aus Taf. II. für } 746.3 \text{ Millim.: } \log B = -0.00302$$

$$\text{für } +16^\circ.4 \text{ Cels.: } \log T = -0.00115$$

$$\log B + \log T = -0.00417$$

$$\text{aus Taf. III. für } +14^\circ.8 \text{ C.: } \log \gamma = -0.00833.$$

Hiernach ist die Rechnung folgende:

$$\log \alpha = 1.75059$$

$$\log \operatorname{tg} z = 0.67530$$

$$A(\log B + \log T) = -0.00418$$

$$\lambda \log \gamma = -0.00858$$

$$\log r = 2.41313, \quad r = 258''.90 = 4' 18''.90.$$

Die wahre Zenithdistanz ist daher $= 78^\circ 4' 27''.3 + 4' 18''.90 = 78^\circ 8' 46''.20$.

Ist die wahre Zenithdistanz gegeben, so wird man durch Anbringung der mittleren Refraction, welche man der Tafel IV. entnimmt, zunächst einen genäherten Werth der scheinbaren Zenithdistanz bilden, mit welchem man dann aus Taf. I. die Werthe von $\log \alpha$, A und λ erhält.

Beispiel. Es sei gegeben die wahre Zenithdistanz $= 78^\circ 8' 46''.20$;
Barometer, inneres und äusseres Thermometer wie im vorhergehenden Beispiel.

Man findet aus Taf. IV. in der Gegend von $78^\circ 8'$ die mittlere Refraction $= 4'.5$ und hat daher $78^\circ 4'.3$ als genäherte scheinbare Zenithdistanz, womit man aus Taf. I. erhält:

$$\log \alpha = 1.75059, \quad A = 1.0030, \quad \lambda = 1.0303,$$

welche Werthe mit den oben erhaltenen übereinstimmen, und daher in Verbindung mit den Werthen von B , T , γ wieder für die wahre Refraction den Werth $r = 4' 18''.90$ geben, womit die scheinbare Zenithdistanz

$$= 78^\circ 8' 46''.20 - 4' 18''.90 = 78^\circ 4' 27''.30$$

wird.

54. Aus Taf. I. ersieht man, dass die Exponenten A und λ erst bei grossen Zenithdistanzen sich merklich von der Einheit entfernen; ist daher die Zenithdistanz nicht zu gross, so kann man $A = \lambda = 1$ annehmen, und erhält dann, wenn man noch r_0 statt $\alpha \operatorname{tg} z$ schreibt, für die wahre Refraction den einfacheren Ausdruck: $r = r_0 \cdot BT\gamma$, oder:

$$\log r = \log r_0 + \log B + \log T + \log \gamma; \quad (92)$$

die mittlere Refraction r_0 kann aus Taf. IV. genommen werden, wenn die Hundertel der Secunden unbeachtet bleiben können; sollen jedoch diese in der Rechnung noch mitgenommen werden, so ist die mittlere Refraction mittelst Taf. I. nach dem Ausdrücke $r_0 = \alpha \operatorname{tg} z$ zu berechnen.

Beispiel. Scheinbare Zenithdistanz: $63^\circ 8' 15''.71$; Barometer 761.7 Mm.; inneres Thermometer $+5.4$ C.; äusseres Thermometer $+3.8^\circ$ C.

Taf. IV. gibt für $63^{\circ} 8' .3$, die mittlere Refraction $r_0 = 1' 53'' .5 = 113'' .5$; man erhält daher:

$$\begin{aligned} \log r_0 &= 2.05500 \\ \log B &= + 0.00585 \\ \log T &= - 0.00038 \\ \log r &= + 0.00851 \\ \log r &= \frac{2.06898}{}, \quad r = 117.2 = 1' 57'' .2. \end{aligned}$$

Nach der genaueren Formel (91) findet man $1' 57'' .22$.

Wie aus Taf. I. erhellt, ändert sich der Werth des Coefficienten α nur wenig mit der Zenithdistanz, oder, mit andern Worten, die mittlere Refraction ist der Tangente der scheinbaren Zenithdistanz nahe proportional, so lange diese nicht beträchtlich gross wird; bis $z = 65^{\circ}$ bis 70° kann $\alpha = 57'' .5$ als mittlerer Werth angenommen werden. Die einfache Formel:

$$r = 57'' .5 \operatorname{tg} z$$

gibt daher die mittlere Refraction für mässige Zenithdistanzen; bis zu $z = 65^{\circ}$ erreicht der Fehler derselben nicht $0'' .2$.

55. Bei der Entwicklung der Refractionsformeln geht man von der schon in §. 50 erwähnten Annahme aus, dass die Atmosphäre aus concentrischen Schichten bestehe, deren Dichte von unten nach oben nach einem bestimmten Gesetze abnimmt; der wirkliche Zustand der Atmosphäre wird aber in Folge der fortwährend vor sich gehenden Störungen des Gleichgewichtes dieser Annahme nie vollständig entsprechen und daher die nach den Formeln oder darauf beruhenden Tafeln berechnete Refraction von der wirklich stattfindenden mehr oder weniger verschieden sein. Durch Vergleichung der nach seinen Tafeln berechneten Refractionen mit den beobachteten hat Bessel folgende Werthe des wahrscheinlichen Fehlers der Tafeln für verschiedene Zenithdistanzen erhalten:

für $z = 45^{\circ}, 60^{\circ}, 75^{\circ}, 80^{\circ}, 85^{\circ}, 86^{\circ}, 87^{\circ}, 88^{\circ}, 89^{\circ}, 89^{\circ} 30'$
 w. F.: $= \pm 0'' .27 \quad 0'' .34 \quad 0'' .66 \quad 0'' .92 \quad 1'' .7 \quad 2'' .4 \quad 3'' .9 \quad 7'' .7 \quad 16'' .8 \quad 20'' .0$

Bei mässigen Zenithdistanzen wird daher die wahrscheinliche Unsicherheit der Refraction auf etwa $\frac{1}{4}$ Secunde anzunehmen sein, nimmt aber rasch zu, sobald die Zenithdistanz über 60° hinaus wächst. In der Nähe des Horizontes ist die Refraction immer einer beträchtlichen Unsicherheit unterworfen, in Folge der Länge des Weges, welchen die Lichtstrahlen in diesem Falle in den nahe an der Oberfläche der Erde befindlichen, dichteren Schichten der Atmosphäre zurückzulegen haben, deren meteorologischer Zustand in grösserer Entfernung vom Beobachtungsorte oft sehr beträchtlich von jenem abweichen kann, welcher durch das am Beobachtungsorte befindliche Barometer und Thermometer angegeben wird.

Es ist selbstverständlich, dass, wenn es sich um genaue Beobachtungen handelt, Barometer und Thermometer gehörig geprüft und untersucht sein

müssen, da die Angaben dieser Instrumente gewöhnlich mit einem grösseren oder geringeren Fehler behaftet sind. Ebenso ist klar, dass das äussere Thermometer im Freien so angebracht sein muss, dass es die Temperatur der Luft möglichst richtig angebe, also nicht nur vor den directen Sonnenstrahlen, sondern auch vor der strahlenden Wärme benachbarter Objecte gehörig geschützt sei.

56. Da wir in Folge der Refraction die Gestirne in einer grösseren Höhe erblicken, als dieselben wirklich einnehmen, so wird durch dieselbe auch der Aufgang der Gestirne beschleunigt, der Untergang verzögert. Differenzirt man die bekannte Gleichung

$$\cos z = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos t$$

nach z und t , so kommt:

$$\sin z \, dz = \cos \varphi \cos \delta \sin t \, dt,$$

somit für den Horizont, wo $z = 90^\circ$:

$$dt = \frac{dz}{\cos \varphi \cos \delta \sin t_0},$$

welche Gleichung die der Aenderung dz der Zenithdistanz entsprechende Aenderung des Stundenwinkels angibt. Nun beträgt die Refraction im Horizont nahe $35' = 140''$; die durch die Refraction bewirkte Beschleunigung, beziehungsweise Verzögerung des Auf- und Unterganges ist daher in Zeitsecunden:

$$dt = \frac{140''}{\cos \varphi \cos \delta \sin t_0}.$$

Beispiel. Für den Stern Aldebaran ($\alpha = 4^h 28^m 20^s.9$, $\delta = +16^\circ 14' 30''$) haben wir in §. 21 den Stundenwinkel des Auf- und Unterganges in Wien ($\varphi = 48^\circ 12'$) erhalten: $t_0 = 109^\circ 0' 54'' = 7^h 16^m 3^s.6$. Mit diesem Werthe findet man $dt = 231^s.4 = 3^m 51^s.4$; in Folge der Wirkung der Refraction geht also der Stern um $3^m 51^s.4$ früher auf und später unter.

Reduction beobachteter Zenithdistanzen.

57. Hat man mit irgend einem Instrumente, welches wir hier als fehlerfrei voraussetzen, die Zenithdistanz eines Gestirnes beobachtet, so ist dieselbe mit dem Einflusse der Refraction und Parallaxe behaftet; man hat daher in allen Fällen zunächst die Beobachtung von der Refraction zu befreien, und sodann durch Anbringung der Parallaxe auf den Mittelpunkt der Erde zu reduciren.

Sei Z die beobachtete Zenithdistanz, r die zugehörige nach der vorhergehenden Vorschrift berechnete Refraction, so ist:

1) im Falle eines Fixsternes

$$z = Z + r$$

die geocentrische Zenithdistanz, weil für Fixsterne, in Folge ihrer im Verhältniss zum Erdhalbmesser unendlich grossen Entfernung, die Parallaxe = 0 ist.

2) Im Falle des Mondes ist Z die beobachtete Zenithdistanz des obern oder untern Mondrandes. Bezeichnet man daher mit R' den durch die Parallaxe vergrösserten Mond-Halbmesser, so ist:

$$z' = Z + r \pm R' \tag{\alpha}$$

die von der Refraction befreite, vom Beobachtungsorte aus gesehene Zenithdistanz des Mondcentrums; ist nun z die geocentrische Zenithdistanz des Mondmittelpunctes, und $z' - z$ die Höhenparallaxe, so hat man:

$$z = z' - (z' - z) = Z + r \pm R' - (z' - z),$$

wo $z' - z$ nach Gl. (77) zu berechnen ist.

Weil aber, um R' zu finden, die Kenntniss von z' schon erfordert wird, so setze man zunächst: $z' = Z + r \pm R$, wo R den aus den Ephemeriden bekannten geocentrischen Mond-Halbmesser bedeutet, und berechne mit diesem Werthe von z' mittelst der Gl. (81) einen genäherten Werth von R' , womit man sofort einen genügend genauen Werth von z' erhält, um $(z' - z)$ und R' scharf berechnen zu können.

Beispiel. Gesetzt, man habe 1860, März 6, 8^h mittlere Zeit in Greenwich die scheinbare Zenithdistanz des untern Mondrandes beobachtet und erhalten:

$$Z = 63^\circ 8' 15''.71;$$

Barom. 761.7 Millim.; inneres Therm. +5 ^o .4; äuss. Therm. +3 ^o .8 C. Man hat nun:	
Beobachtete scheinb. Zenithdistanz	$Z = 63^\circ 8' 15''.71$
Refraction (vergl. Beisp. §. 54)	$r = + 1 57''.22$
Scheinbare, von der Refraction befreite Zenithdistanz des untern Mondrandes	$= 63^\circ 10' 12''.93$

Subtrahirt man hievon den geocentrischen Mondhalbmesser $R = 16' 46''.1$ *, so erhält man einen genäherten Werth $z' = 62^\circ 53'.5$ der scheinbaren Zenithdistanz des Mondcentrums, mit welchem man nach Gl. (81) den genäherten Werth $R' = 16' 54''.4$, und mit diesem den genaueren Werth $z' = 62^\circ 53' 18''.5$ findet. Hiemit ergibt sich nun nach Gl. (77):

die Parallaxe in Zenithdistanz: $-(z' - z) = - 54 29''.85$

Durch Verbindung der Parallaxe mit obigem Werthe von z' erhält man nun die genäherte geocentrische Zenithdistanz $z = 61^\circ 58' 48''.7$, und mit diesem Werthe und dem Werthe von z' , nach Gl. (76):

Den vergrösserten Mondhalbmesser	$R' = - 16 54 49$
Geocentrische Zenithdistanz	$= 61^\circ 58' 48''.59$

Wird, wie dies häufig der Fall ist, nicht die äusserste Schärfe der Rechnung erfordert, so werden, wie aus dem Beispiele selbst erhellt, oft schon

*) Siehe das Beispiel zu §. 42.

die genäherten Werthe genügen. Auch kann man in solchem Falle die Berechnung des vergrösserten Halbmessers umgehen, indem man die Parallaxe nach Gl. (77) unmittelbar für den beobachteten Mondrand sucht; durch Anbringung derselben an die beobachtete von der Refraction befreite Zenithdistanz ergibt sich die geocentrische Zenithdistanz des beobachteten Mondrandes, zu welcher nur noch der geocentrische Halbmesser mit seinem Zeichen hinzuzulegen kommt. Nach diesem Verfahren ist die Rechnung folgende:

Beobachtete Zenithdistanz	$Z = 63^{\circ} 8' 15''.71$
Refraction	$r = + 1 57.22$
Scheinbare, von der Refraction befreite Zenithdistanz des untern Mondrandes	$63^{\circ} 10' 12''.93$
Parallaxe [nach Gl. (77)]	$- 54 38.07$
Geocentrischer Halbmesser	$- 16 46.1$
Geocentrische Zenithdistanz	$61^{\circ} 58' 48''.76$

Der Unterschied gegen den oben erhaltenen Werth beträgt $0''.17$ und rührt davon her, dass bei letzterem Verfahren die offenbar nicht ganz richtige Annahme gemacht wird, als wäre die Horizontalparallaxe für den Mondrand dieselbe als für den Mittelpunkt; der hieraus hervorgehende Fehler kann jedoch $0''.2$ nicht überschreiten.

3) Im Falle die Zenithdistanz der Sonne oder eines Planeten beobachtet wurde, bleibt das Verfahren dasselbe wie beim Monde, nur vereinfacht durch den Umstand, dass für diese Gestirne die Vergrößerung des Halbmessers als verschwindend klein hinwegfällt. Die Berechnung der Parallaxe geschieht immer genügend genau nach Gl. (80).

FÜNFTES CAPITEL.

VON DEN ÄNDERUNGEN DER ÖRTER DER GESTIRNE AN DER SCHEINBAREN HIMMELSKUGEL, WELCHE AUS DEN ÄNDERUNGEN DER LAGE DER COORDINATEN-EBENEN, UND AUS DER JÄHRLICHEN BEWEGUNG DER ERDE ENTSPRINGEN.

58. Die Oerter der Gestirne an der scheinbaren Himmelskugel werden bekanntlich durch sphärische Coordinaten bestimmt, welche sich auf eine der beiden Grundebenen des Aequators oder der Ekliptik beziehen, und es bildet der eine der beiden Durchschnittspuncte dieser zwei grössten Kreise (der Frühlingspunct) in beiden Systemen den gemeinschaftlichen Ursprung je einer Coordinate, nämlich der Rectascension in dem einen, der Länge in dem andern Systeme. Die Lage dieser beiden Grundebenen im Raume ist aber keine unveränderliche; sowohl die Ebene des Aequators als der Ekliptik sind vielmehr in zwar sehr langsamen doch fortwährenden Bewegungen begriffen, in Folge welcher sich sowohl die gegenseitige Neigung beider Ebenen als auch die Richtung ihrer Durchschnittslinie, also der Ort des Frühlingspunctes am Himmel, beständig verändern. Die Längen und Breiten der Sterne, so wie