oder

$$\operatorname{tg} M = \frac{\operatorname{tg}\beta}{\sin\lambda},$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\cos(M+\varepsilon)}{\cos M}\operatorname{tg}\lambda, \quad \operatorname{tg}\delta = \operatorname{tg}(M+\varepsilon)\sin\alpha, \tag{38}$$

und zur Prüfung der Rechnung:

$$\frac{\cos(M+\varepsilon)}{\cos M} = \frac{\cos\delta\,\sin\alpha}{\cos\beta\,\sin\lambda}.$$

Für den Winkel am Sterne η hat man wieder entweder die Ausdrücke (33) des vorhergehenden §., oder die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned}\cos\delta\,\cos\eta &= \cos\varepsilon\,\cos\beta - \sin\varepsilon\,\sin\beta\,\sin\lambda,\\ \cos\delta\,\sin\eta &= \sin\varepsilon\,\cos\lambda.\end{aligned} \tag{39}$$

20. Die Sonne bewegt sich in der Ekliptik, und es ist daher, von einer kleinen 1'' nicht überschreitenden Störung abgesehen, ihre Breite $\beta = 0$. Handelt es sich also darum, aus der Rectascension und Declination der Sonne ihre Länge, oder umgekehrt aus letzterer die beiden erstgenannten Coordinaten zu finden, so hat man unmittelbar aus dem rechtwinkeligen Dreiecke γBG (Fig. 5), in welchem, wenn die Sonne in G sich befindet, $\gamma B = \alpha$, $BG = \delta$ und $\gamma G = \lambda$ ist:

$$\begin{aligned}\cos\lambda &= \cos\alpha\,\cos\delta\\ \sin\lambda &= \frac{\sin\delta}{\sin\varepsilon}\\ \operatorname{tg}\lambda &= \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\cos\varepsilon},\end{aligned} \tag{40}$$

und

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}\alpha &= \operatorname{tg}\lambda\,\cos\varepsilon\\ \sin\delta &= \sin\lambda\,\sin\varepsilon\\ \operatorname{tg}\delta &= \operatorname{tg}\varepsilon\,\sin\alpha.\end{aligned} \tag{41}$$

Diese Formeln folgen natürlich auch aus den Gleichungen der beiden vorhergehenden Paragraphe, wenn man $\beta = 0$ setzt.

Besondere Erscheinungen der täglichen Bewegung.

21. In dem sphärischen Dreiecke, welches irgend ein Gestirn mit dem Nordpole und dem Zenith des Beobachters bildet, besteht die Gleichung [§. 16]:

$$\sin h = \sin\varphi\,\sin\delta + \cos\varphi\,\cos\delta\,\cos t,$$

wo h die Höhe, δ die Declination, t den Stundenwinkel des Gestirnes, φ die Polhöhe bedeutet. Das Gestirn ist im Horizonte, wenn $h = 0$; bezeichnen wir den für diese Stellung stattfindenden Stundenwinkel mit t_0, so ist:

$$0 = \sin\varphi\,\sin\delta + \cos\varphi\,\cos\delta\,\cos t_0,$$

woraus folgt:

$$\cos t_0 = -\operatorname{tg}\varphi\,\operatorname{tg}\delta. \tag{42}$$

Diese Gleichung gibt also den Stundenwinkel des Gestirnes beim Auf- und Untergange, dessen Werth, absolut genommen, dem halben Tagbogen [§. 6] gleich ist. Bekanntlich ist die Sternzeit der oberen Culmination eines Gestirnes gleich der Rectascension α desselben [§. 11]; drückt man daher α und t_0 in Zeit aus, so ist $\alpha - t_0$ die Sternzeit des Aufganges, $\alpha + t_0$ jene des Unterganges des Gestirnes.

Beispiel. Man berechne die Sternzeit des Auf- und Unterganges des Sternes Aldebaran (α Tauri) für Wien. Für diesen Stern ist für 1868, 0:

$$\alpha = 4^h\ 28^m\ 20^s.9, \quad \delta = +16^0\ 14'\ 30'';$$

ferner ist für Wien: $\varphi = 48^0\ 12'$; hiemit findet man:

$$\log \operatorname{tg} \varphi = 0.048612$$
$$\log \operatorname{tg} \delta = 9.464364$$
$$\log \cos t_0 = 9.512976_n, \quad t_0 = 109^0\ 0'\ 54'' = 7^h\ 16^m\ 3^s.6;$$

somit Sternzeit des Aufganges $= 21^h\ 12^m\ 17^s.3$,
„ „ „ Unterganges $= 11\ 44\ \ 24.5$.

Aus Gl. (42) erhellt, dass, wenn δ positiv, d. i. wenn das Gestirn nördlich vom Aequator steht, $\cos t_0$ negativ, also t_0 oder der halbe Tagbogen grösser als 90^0 ist, d. h. das Gestirn verweilt länger über unserem Horizonte als unter demselben. Es wird $\cos t_0$ unmöglich, wenn $\operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\delta > 1$, d. i. $\operatorname{tg}\delta > \operatorname{cotg}\varphi$ oder $\operatorname{tg}\delta > \operatorname{tg}(90^0 - \varphi)$, also $\delta > 90^0 - \varphi$ wird; Sterne, deren nördliche Declination grösser ist als $90^0 - \varphi$, treten daher nicht unter den Horizont (Circumpolarsterne). Für $\delta = 0$ wird $t_0 = 90^0$; ein Gestirn im Aequator verweilt daher eben so lange über dem Horizonte, als unter demselben. Für Gestirne von südlicher Declination ist δ negativ; es wird daher $\cos t_0$ positiv und t_0 kleiner als 90^0; solche Gestirne verweilen daher kürzere Zeit über unserem Horizonte, als unter demselben. Ein Gestirn, dessen südliche Declination grösser als $90^0 - \varphi$, steigt über den Horizont nicht mehr empor. Für Orte auf der südlichen Halbkugel hat man in Gl. (42) nur φ negativ zu nehmen, um zu den analogen Resultaten zu gelangen.

22. Setzt man in der Gleichung:

$$\sin\delta = \sin\varphi\ \sin h - \cos\varphi\ \cos h\ \cos A$$

[§. 17] $h = 0$, so erhält man das Azimuth $A = A_0$ des Punctes des Horizontes, in welchem ein Stern auf- und untergeht; es wird:

$$\cos A_0 = -\frac{\sin\delta}{\cos\varphi}.$$

Der diesem Cosinus entsprechende negative Werth des Winkels A_0 ist das östliche Azimuth des Gestirnes bei seinem Aufgange, der positive Werth das westliche Azimuth bei seinem Untergange. Die Entfernung des in Rede stehenden Punctes im Horizonte vom Ost- beziehungsweise Westpuncte nennt man die Morgen- und Abendweite des Gestirnes; bezeichnet man diese mit A', so ist $A_0 = 90^0 + A'$, somit:

$$\sin A' = \frac{\sin\delta}{\cos\varphi},$$

wo A' positiv ist, wenn der Punct des Auf- und Unterganges vom Ost- und Westpuncte gegen Norden liegt, negativ im entgegengesetzten Falle.

Für den Stern Aldebaran wird mit den in §. 21 angegebenen Werthen das östliche, beziehungsweise westliche Azimuth beim Auf- und Untergange $A_0 = 114^0\,48'\,36''$; die Morgen- oder Abendweite $A' = 24^0\,48'\,36''$ gegen Nord.

23. Aus der Gleichung:

$$\sin h = \sin\varphi\sin\delta + \cos\varphi\cos\delta\cos t \qquad (a)$$

folgt, dass für $t = 0$ d. i. bei der oberen Culmination, $\sin h$, also auch die Höhe h den grössten Werth erreicht. Man nennt die Höhe im Augenblicke der Culmination die Meridianhöhe, ihre Ergänzung zu 90^0 die Meridian-Zenithdistanz. Setzt man in obiger Gleichung $t = 0$, und $h = 90^0 - Z$, so erhält man für die Meridian-Zenithdistanz in der oberen Culmination: $\cos Z = \cos(\varphi - \delta)$, d. i.

$$Z = \varphi - \delta,$$

$$\text{oder} \qquad Z = \delta - \varphi,$$

von welchen Gleichungen die erste oder zweite gilt, je nachdem das Gestirn südlich oder nördlich vom Zenith culminirt.

Für $t = 180^0$ erhält in der Gl. (a) $\cos t$ seinen grössten negativen, also $\sin h$ seinen kleinsten Werth. Die Höhe ist also in der unteren Culmination ein Minimum. Für die Meridian-Zenithdistanz in der unteren Culmination folgt aus Gl. (a) für $t = 180^0$: $\cos Z = \sin\varphi\sin\delta - \cos\varphi\cos\delta = -\cos(\varphi + \delta) = \cos[180^0 - (\varphi + \delta)]$, somit

$$Z = 180^0 - (\varphi + \delta).$$

Da ferner bekanntlich $\cos t = \cos(-t)$, so folgt aus Gl. (a), dass gleichen östlichen und westlichen Stundenwinkeln gleiche Höhen entsprechen und umgekehrt.

24. Die im vorhergehenden §. aus der Gl. (a) gezogenen Folgerungen, dass das Gestirn im Meridiane seine grösste Höhe erreiche und zu gleichen Stundenwinkeln zu beiden Seiten des Meridians gleiche Höhen gehören, gelten jedoch nur dann, wenn die Declination des Gestirnes sich nicht ändert. Ist diese veränderlich, so findet die grösste Höhe ausserhalb des Meridians statt. Differenzirt man die Gleichung:

$$\cos z = \sin\varphi\sin\delta + \cos\varphi\cos\delta\cos t,$$

indem man nebst t und z auch δ als veränderlich betrachtet, so erhält man:

$$-\sin z\frac{dz}{dt} = (\sin\varphi\cos\delta - \cos\varphi\sin\delta\cos t)\frac{d\delta}{dt} - \cos\varphi\cos\delta\sin t.$$

Soll nun z ein Maximum oder Minimum werden, so muss $\frac{dz}{dt} = 0$ sein; für diesen Werth folgt aus der letzten Gleichung:

$$\sin t = \frac{d\delta}{dt} (\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \delta \cos t),$$

welche Gleichung den Stundenwinkel des Gestirnes im Augenblicke der grössten Höhe gibt. Hiebei bedeutet $\frac{d\delta}{dt}$ das Verhältniss der Aenderung der Declination zur Aenderung des Stundenwinkels; da dieses, und somit auch $\sin t$, immer sehr klein ist, so kann man $\sin t = t$ und $\cos t = 1$ setzen und hat dann;

$$t = \frac{d\delta}{dt} (\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \delta).$$

Lässt man nun $d\delta$ die Aenderung der Declination in 1 Zeitsecunde, ausgedrückt in Bogensecunden, bedeuten, so hat man $dt = 1^s = 15''$ zu setzen, und um t in Zeitsecunden zu erhalten, die rechte Seite der Gleichung mit $\frac{206265}{15}$ zu multipliciren; hiedurch wird:

$$t^s = \frac{206265}{15} \cdot \frac{d\delta}{dt} (\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \delta). \tag{43}$$

Bewegt sich das Gestirn gegen Nord, so ist $d\delta$, also, wenn die Declination des Mondes südlich, oder seine nördliche Declination nicht grösser ist als φ, auch t positiv, und das Gestirn erreicht seine grösste Höhe t Sec. nach der Culmination; im Gegenfalle, wenn $d\delta$ negativ, also das Gestirn gegen Süd geht, vor derselben.

Beispiel. 1866, Juni 23, ist die stündliche Bewegung des Mondes in Declination zur Zeit seiner Culmination in Greenwich $= -395''.55$; $\delta = -13^0 22' 11''$; man sucht die Zeit der grössten Höhe für Greenwich ($\varphi = 51^0 28' 38''$). Man hat nun, da $1^h = 3600$ Zeitsecunden:

$$d\delta = -\frac{395 . 55}{3600}, \quad \frac{d\delta}{dt} = -\frac{1}{15} \cdot \frac{395 . 55}{3600} = -0.0073250;$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg} \varphi &= 1.25615 \\
\operatorname{tg} \delta &= \underline{-0.23767} \\
& 1.49382 \ldots\ldots\ldots\ldots \log . 0.17430 \\
& \qquad\qquad \log \frac{d\delta}{dt} = 7.86481_n \\
& \qquad\qquad \log 206265 = 5.31443 \\
& \qquad\qquad \lg \text{Compl.}\ 15 = \underline{8.82391} \\
& \qquad\qquad \log t^s = 2.17745; \quad t^s = -150^s.47 \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad = -2^m\, 30^s.47.
\end{aligned}$$

Der Mond erreicht also an diesem Tage zu Greenwich $2^m\, 30^s.47$ vor der Culmination seine grösste Höhe.

25. Differenzirt man die Gleichung:

$$\sin h = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos t \tag{a}$$

in Bezug auf h und t, so kommt:

$$\cos h \frac{dh}{dt} = -\cos\varphi \cos\delta \sin t,$$

oder, da $\cos\varphi \sin t = \cos h \sin p$, und $\cos\delta \sin t = \cos h \sin A$ ist, wenn p den parallactischen Winkel und A das Azimuth bedeutet:

$$\frac{dh}{dt} = -\cos\delta \sin p, \tag{44}$$

$$\frac{dh}{dt} = -\cos\varphi \sin A. \tag{45}$$

Diese Gleichungen geben das Verhältniss der Aenderung der Höhe zur Aenderung des Stundenwinkels, also die Geschwindigkeit, mit welcher das Gestirn in irgend einem Puncte seiner täglichen Bahn seine Höhe ändert. Wie man sieht, ist dieselbe $= 0$ im Meridiane, wo das Azimuth $A = 0$, und erreicht ein Maximum für $A = \pm 90^0$; die Höhe ändert sich also am raschesten, wenn das Gestirn sich im ersten Vertical befindet. Für diese Stellung des Sternes im ersten Vertical erhält man aus der Gleichung:

$$\sin\delta = \sin\varphi \sin h - \cos\varphi \cos\delta \cos A,$$

$A = \pm 90^0$ setzend:

$$\sin h = \frac{\sin\delta}{\sin\varphi}, \tag{46}$$

und mit diesem Werthe gibt die Gl. (a):

$$\cos t = \frac{\operatorname{tg}\delta}{\operatorname{tg}\varphi}. \tag{47}$$

Diese Gleichungen geben Höhe und Stundenwinkel eines Sternes im ersten Vertical, und durch Verbindung des letzteren mit der Rectascension des Sternes ergibt sich dann die Sternzeit des Durchganges durch den ersten Vertical. Beide Formeln zeigen, dass, wenn $\delta > \varphi$, der Stern den ersten Vertical nicht mehr erreicht, weil er in der That in diesem Falle nördlich vom Zenith culminirt. Man sieht übrigens leicht, dass, wenn der Stern im ersten Vertical steht, das Dreieck zwischen Pol, Zenith und Stern am Zenith rechtwinkelig ist, und somit obige Formeln aus diesem Dreiecke unmittelbar sich ergeben. Ist δ wenig von φ verschieden, so wird $\sin h$ und $\cos t$ nahe $= 1$, und diese Formeln geben dann h und t nur mit geringer Genauigkeit. Bildet man aber aus der Gl. (47) die folgenden:

$$1 + \cos t = 1 + \frac{\operatorname{tg}\delta}{\operatorname{tg}\varphi},$$

$$1 - \cos t = 1 - \frac{\operatorname{tg}\delta}{\operatorname{tg}\varphi},$$

so erhält man durch Division dieser beiden Gleichungen, da $1+\cos t = 2\cos\frac{1}{2}t^2$, $1-\cos t = 2\sin\frac{1}{2}t^2$:

$$\frac{\sin\frac{1}{2}t^2}{\cos\frac{1}{2}t^2} = \frac{\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\delta}{\operatorname{tg}\varphi + \operatorname{tg}\delta},$$

d. i.

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}t^2 = \frac{\sin(\varphi-\delta)}{\sin(\varphi+\delta)}, \tag{48}$$

welche Gleichung den Stundenwinkel mit aller Schärfe gibt. Durch Anwendung der 5ten der Glgn. (18) in §. 15 auf das erwähnte rechtwinkelige Dreieck erhält man dann die Höhe mittelst der Formel:

$$\operatorname{cotg} h = \operatorname{tg} t \cos\varphi. \tag{49}$$

26. Zufolge der Gl. (22) [§. 16] hat man:

$$\operatorname{cotg} A \sin t = \sin\varphi \cos t - \operatorname{tg}\delta \cos\varphi;$$

hieraus folgt durch Differenziation nach t und A:

$$-\frac{dA}{\sin A^2}.\sin t + \operatorname{cotg} A \cos t\, dt = -\sin\varphi \sin t\, dt,$$

oder

$$\frac{dA}{dt}.\frac{\sin t}{\sin A} = \cos A \cos t + \sin A \sin t \sin\varphi;$$

der zweite Theil dieser Gleichung ist, wie aus der Anwendung der ersten der Glgn. (13) in §. 15 auf unser sphärisches Dreieck folgt, $=\cos p$; man hat daher:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\sin A \cos p}{\sin t} = \frac{\cos\delta \cos p}{\cos h}. \tag{50}$$

Diese Gleichung gibt das Verhältniss der Aenderung des Azimuthes zur Aenderung des Stundenwinkels. Der letztere Ausdruck zeigt, dass diese Aenderung ihren grössten Werth im Meridiane erreicht, wo der parallactische Winkel $p=0$ ist.

Für $p=90^0$ wird $\frac{dA}{dt}=0$, d. i. die Bewegung eines Sternes im Azimuth wird $=0$, und das (östliche oder westliche) Azimuth selbst ein Maximum, wenn der parallactische Winkel $=90^0$ ist. Um den Punct im Parallel des Sternes zu finden, wo dies stattfindet, setzen wir in der Gleichung:

$$\sin\varphi = \sin\delta \sin h + \cos\delta \cos h \cos p$$

$p=90^0$, und erhalten:

$$\sin h = \frac{\sin\varphi}{\sin\delta}, \tag{51}$$

welcher Werth, in die Gl. (a), §. 25, substituirt, gibt:

$$\cos t = \frac{\operatorname{tg}\varphi}{\operatorname{tg}\delta}. \tag{52}$$

Endlich folgt aus der Gl.: $\cos\delta \sin p = \cos\varphi \sin A$, für $p = 90^0$:

$$\sin A = \frac{\cos\delta}{\cos\varphi}. \tag{53}$$

Aus diesen Gleichungen folgt, dass überhaupt nur für solche Sterne $p = 90^0$ werden kann, für welche $\delta > \varphi$ ist, d. i. welche nördlich vom Zenith culminiren; dies findet ferner statt in jenem Puncte des Parallels, in welchem derselbe vom Verticalkreise berührt wird, weil nur in diesem Puncte der Declinationskreis, welcher den Parallel stets senkrecht schneidet, auch auf dem Verticalkreis des Sternes senkrecht steht. Man sagt dann, der Stern sei in seiner grössten (östlichen oder westlichen) Digression. Auch bei dieser Stellung ist das Dreieck zwischen Zenith, Pol und Stern ein rechtwinkeliges, nur liegt der rechte Winkel am Sterne. Die Formeln (51), (52) und (53) geben Höhe, Stundenwinkel und Azimuth des Sternes zur Zeit der grössten Digression.

Beispiel. Für den Polarstern hat man für 1866, 0: $\alpha = 1^h\, 9^m\, 58^s$, $\delta = 88^0\, 35'\, 42''$; hiemit findet man für die Polhöhe von Wien ($\varphi = 48^0\, 12'$):

$$t = \pm 88^0\, 25'\, 41'' = \pm 5^h\, 53^m\, 43^s,$$

somit die Sternzeit der grössten Digression nach Gl. (1) in Ost $= 19^h\, 16^m\, 15^s$, in West $= 7^h\, 3^m\, 41^s$; für die Höhe und das Azimuth des Sternes um diese Zeiten erhält man: $h = 48^0\, 13'\, 10''$; $A = \pm 2^0\, 6'\, 29''$, von Nord gezählt. Man sieht hieraus, dass so lange φ nicht sehr gross ist, das Azimuth des Polarsternes immer sehr klein bleibt.

ZWEITES CAPITEL.

DIE ASTRONOMISCHEN EPHEMERIDEN UND DIE INTERPOLATIONSRECHNUNG.

27. Bei astronomischen Rechnungen ist man immer genöthigt, von den astronomischen Ephemeriden Gebrauch zu machen. Es sind dies Tafeln, welche die numerischen Werthe gewisser von der Zeit abhängiger Grössen, deren man bei astronomischen Rechnungen bedarf, wie z. B. der Coordinaten der vorzüglichsten Gestirne, bezogen auf den Aequator oder die Ekliptik, ihrer Parallaxen und scheinbaren Halbmesser, u. s. w. für bestimmte Zeitmomente berechnet enthalten. Solche Ephemeriden werden von mehreren Sternwarten (Berlin, Greenwich, Paris, Washington) jährlich, und zwar um mehrere Jahre im Voraus veröffentlicht. Ihre Einrichtung lernt man aus den denselben beigefügten Erläuterungen kennen.

Bei den meisten der in den Ephemeriden enthaltenen Tafeln ist das Zeitmoment, auf welches sich die angeführten Tafelgrössen beziehen, der wahre oder mittlere Mittag des Meridians der Sternwarte, von welcher die Ephemeride veröffentlicht wird. Die Tafelgrössen erscheinen demnach als Functionen der Zeit, welch' letztere als unabhängig Veränderliche das sogenannte Argument