man hat daher zwischen nördlicher und südlicher Breite zu unterscheiden, je nachdem das Gestirn in der nördlichen oder südlichen der beiden von der Ekliptik gebildeten Halbkugeln liegt. In der Rechnung wird erstere positiv, letztere negativ genommen. Der durch die beiden Aequinoctialpuncte gehende Breitenkreis wird Colur der Nachtgleichen, der durch die beiden Solstitialpuncte gehende Colur der Sonnenwenden genannt.

Sphärische Coordinaten.

9. Der Ort eines Gestirnes an der scheinbaren Himmelskugel wird durch die Richtung der geraden Linie gegeben, welche den Beobachtungsort mit dem Gestirne verbindet und in ihrer Verlängerung die Sphäre in einem Puncte schneidet, welcher die Projection des Gestirnes auf die Himmelskugel bildet. Diese Richtung wird am einfachsten durch zwei sphärische Coordinaten bestimmt, die man erhält, wenn man einen grössten Kreis als Grundkreis und in diesem einen festen Punct als Ursprung annimmt und ferner durch das Gestirn einen zweiten grössten Kreis senkrecht auf den Grundkreis legt. Der zwischen dem Gestirne und dem Grundkreise liegende Bogen des zweiten grössten Kreises bildet die eine, der zwischen dem Fusspuncte dieses sphärischen Prependikels und dem Ursprunge liegende Bogen des Grundkreises die zweite sphärische Coordinate. Als Grundkreis dient entweder der Horizont, der Aequator oder die Ekliptik, wodurch wir verschiedene Coordinatensysteme erhalten.

10. System des Horizonts. In diesem bildet der Horizont den Grundkreis; legt man demnach durch den Stern S (Fig. 3 u. 4) einen Höhenkreis, und nimmt den Südpunct H als Ursprung, so sind die Höhe ($h = DS$) und das Azimuth ($A = DH =$ dem sphärischen Winkel DZH) die beiden auf den Horizont sich beziehenden Coordinaten. In Folge der täglichen Bewegung des Himmels ändern sich diese Coordinaten in jedem Augenblicke und sind überdies in demselben Augenblicke an verschiedenen Orten auf der Erde verschieden; soll daher der Ort eines Gestirnes durch Azimuth und Höhe bestimmt sein, so wird nebst der Angabe des Beobachtungsortes noch die Angabe der Zeit erfordert, für welche dieselben gelten. Statt der Höhe kann selbstverständlich auch die Zenithdistanz angewendet werden.

11. System des Aequators. Wählt man den Aequator AQ (Fig. 4) als Grundkreis und den Durchschnittspunct A desselben mit dem über dem Horizonte liegenden Theile des Meridians als Ursprung, so bilden die Declination ($\delta = BS$) und der Stundenwinkel ($\angle APB = \text{arc.} AB$) eines Punctes die entsprechenden Coordinaten desselben, wie aus dem in §. 4 Gesagten unmittelbar erhellt. In diesem Coordinatensysteme ist die eine Coordinate, die Declination, unabhängig von der täglichen Bewegung und in Bezug auf diese constant, während sich der Stundenwinkel in jedem Augenblicke ändert, weil er von einem Puncte des Aequators aus gezählt wird, welcher an der täglichen Bewegung des Himmels nicht theilnimmt, von jenem nämlich, welcher sich eben im Meridiane befindet oder culminirt, dieser aber in jedem Augenblicke ein anderer ist.

Um nebst der Declination noch eine zweite constante, von der Zeit unabhängige Coordinate zu erhalten, wählt man für diese einen festen Punct des Aequators als Ursprung und zwar den Frühlingspunct. Ist (Fig. 5) EE' die Ekliptik, γ der Frühlingspunct, so heisst der Bogen γB des Aequators vom Frühlingspuncte bis zum Fusspuncte des durch den Stern gelegten Declinationskreises die gerade Aufsteigung oder Rectascension des Sternes. Sie wird vom Frühlingspuncte aus von West gegen Ost, also in einer der täglichen Bewegung entgegengesetzten Richtung gezählt und kann, als ein Bogen des Aequators, ähnlich wie die Stundenwinkel, sowohl in Gradmaass als auch in Zeit d. i. in Stunden, Zeitminuten und Zeitsecunden ausgedrückt werden. Rectascension ($\alpha = \gamma B$) und Declination ($\delta = BS$), bilden also ein drittes System sphärischer Coordinaten, welche beide von der täglichen Bewegung unabhängig sind.

Die Rectascension ist auch dem sphärischen Winkel γPB am Pole gleich, welchen der Declinationskreis des Sternes mit dem durch den Frühlingspunct gelegten Declinationskreise einschliesst.

Um aus der Rectascension und Declination eines Sternes den Ort desselben an der Himmelskugel für einen gegebenen Augenblick zu erhalten, muss noch der Ort des Frühlingspunctes in diesem Augenblicke bekannt sein. Dieser Ort wird durch den Stundenwinkel des Frühlingspunctes bestimmt, welcher die Sternzeit genannt wird.

Schon in §. 7 wurde bemerkt, dass man die Dauer einer vollen Umdrehung der Erde um ihre Axe einen Sterntag nennt und es ist dies offenbar die Zeit, welche zwischen zwei aufeinanderfolgenden Durchgängen eines festen Punctes am Himmel durch den Meridian des Beobachtungsortes verfliesst. Es ist aus mehrfachen Gründen zweckmässig, den Beginn des Sterntages von dem Augenblicke der Culmination desjenigen Punctes an zu zählen, von welchem aus die Rectascensionen gezählt werden, d. i. des Frühlingspunctes; es ist demnach 0^h Sternzeit in dem Momente, wenn der Frühlingspunct durch den Meridian geht; es ist $1^h, 2^h, 3^h$, u. s. w. Sternzeit, wenn der Stundenwinkel des Frühlingspunctes beziehungsweise $1, 2, 3, \ldots$ Stunden, oder $15, 30, 45, \ldots$ Grade beträgt. In (Fig. 5) bedeutet daher der Winkel γPA, gleich dem Bogen γA des Aequators, die Sternzeit $= \theta$, und da $\gamma B = \alpha$ die Rectascension, $AB = t$ der Stundenwinkel des Sternes ist, so hat man:

$$\begin{aligned} \theta &= \alpha + t, \\ t &= \theta - \alpha, \end{aligned} \tag{1}$$

welche Relation ganz allgemein gilt, wenn die Stundenwinkel von Süd über West von 0^0 bis 360^0 (0^h bis 24^h) gezählt werden. Z. B. Man sucht den

Stundenwinkel eines Sternes, dessen Rectascension $\alpha = 7^h\,32^m\,28^s.7$ ist, zur Sternzeit $\theta = 13^h\,0^m\,0^s$; man findet $t = 5^h\,27^m\,31^s.3$, woraus man sofort erkennt, dass der Stern um diese Zeit westlich vom Meridiane steht. Ebenso erhält man für einen Stern, dessen Rectascension $\alpha = 17^h\,46^m\,18^s.9$ ist, für die Sternzeit $\theta = 2^h\,12^m\,51^s.8$ den Stundenwinkel $t = -15^h\,33^m\,27^s.1$; durch das negative Zeichen wird angezeigt, dass dieser Stundenwinkel vom südlichen Meridian aus gegen Ost gezählt werden muss; der Stundenwinkel nach der gewöhnlichen Zählweise von Süd über West wird also die Ergänzung zu 24^h d. i.

$$24^h - (15^h\,33^m\,27^s.1) = 8^h\,26^m\,32^s.9$$

sein; man erhält aber diesen Werth unmittelbar, indem man, sobald $\theta < \alpha$, 24^h zu θ hinzulegt und dann die Differenz $\theta - \alpha$ bildet.

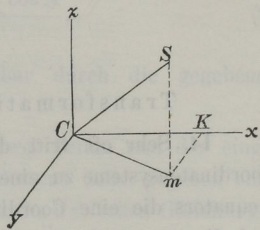
Aus der Gleichung (1) folgt für $t = 0$: $\theta = \alpha$; d. i. im Augenblicke der Culmination irgend eines Gestirnes ist die Sternzeit gleich der Rectascension desselben. Beobachtet man daher mittelst eines geeigneten Instrumentes an einer Uhr den Moment, in welchem ein Stern von bekannter Rectascension durch den Meridian geht, so kennt man auch die Sternzeit dieses Augenblickes, durch deren Vergleichung mit der beobachteten Uhrzeit sofort bekannt wird, um wieviel die Uhr gegen Sternzeit in diesem Augenblicke abweicht.

12. System der Ekliptik. Nimmt man die Ekliptik als Grundkreis und legt durch das Gestirn S einen Breitenkreis LSK (Fig. 5), so ist die Breite SK des Sternes die eine sphärische Coordinate; die andere wird durch den Bogen γK der Ekliptik zwischen dem Frühlingspuncte und dem Fusspuncte des Breitenkreises gebildet; sie wird die Länge des Gestirnes genannt und vom Frühlingspuncte aus von 0^0 bis 360^0 von West gegen Ost, also in derselben Richtung wie die gerade Aufsteigung gezählt. Wir werden die Länge und Breite mit λ und β bezeichnen.

13. Die sphärischen Coordinaten bestimmen nur die Richtung, in welcher uns das Gestirn erscheint, wobei jener Punct der Richtung, in welchem sich dasselbe thatsächlich befindet, ganz unbestimmt bleibt. Soll auch dieser Punct, also der Ort des Gestirnes im Raume bestimmt sein, so muss noch eine Coordinate, nämlich die Entfernung hinzutreten und diese drei Bestimmungsstücke sind dann, wie man sieht, nichts anderes als die aus der analytischen Geometrie bekannten Polarcoordinaten eines Punctes im Raume. Es ist häufig von Vortheil, den Ort des Gestirnes im Raume durch rechtwinkelige Coordinaten auszudrücken, wobei immer eine der coordinirten Ebenen — etwa jene der xy — mit einer der drei Grundebenen des Horizontes, des Aequators oder der Ekliptik zusammenfallend angenommen wird; es ist dann leicht, die rechtwinkeligen Coordinaten durch die sphärischen in Verbindung mit der Distanz auszudrücken.

Sei (Fig. 6) durch den Punct C ein rechtwinkeliges Coordinatensystem gelegt, dessen positive Halbaxen Cx, Cy, Cz sein mögen; S ein Punct im Raume, m dessen Projection auf die Ebene der xy, und mK senkrecht auf Cx. Die rechtwinkeligen Coordinaten des Punctes M sind dann: $CK = x$, $mK = y$, $Sm = z$. Setzt man nun die Entfernung des Punctes S vom Ursprunge $CS = \varDelta$, $\angle KCm = \omega$, $\angle SCm = \eta$, so ist in dem rechtwinkeligen Dreiecke SCm:

Fig. 6.



$$Sm = z = \varDelta \sin\eta\,, \quad Cm = \varDelta \cos\eta\,;$$

ferner in dem rechtwinkeligen Dreiecke KCm:

$$CK = x = Cm\,.\cos\omega\,, \quad mK = y = Cm\,.\sin\omega\,;$$

man hat daher:

$$\begin{aligned} x &= \varDelta \cos\eta \cos\omega \\ y &= \varDelta \cos\eta \sin\omega \\ z &= \varDelta \sin\eta. \end{aligned}$$

Dies vorausgesetzt, lassen wir

a) die Ebene der xy mit dem Horizonte zusammenfallen und die Cx gegen den Südpunct, die Cy gegen den Westpunct gerichtet sein, so ist der Winkel $SCm = \eta$ die Höhe $= h$, der Winkel $KCm = \omega$ das Azimuth $= A$; man hat daher für das System des Horizontes:

$$\begin{aligned} x &= \varDelta \cos h \cos A \\ y &= \varDelta \cos h \sin A \\ z &= \varDelta \sin h. \end{aligned} \tag{2}$$

b) Nimmt man den Aequator als Ebene der xy und legt die positive Halbaxe Cx in die Ebene des Meridians gegen Süd, Cy in die Richtung gegen West, so bedeutet der Winkel η die Declination $= \delta$, der Winkel ω den Stundenwinkel $= t$, und wir haben:

$$\begin{aligned} x &= \varDelta \cos\delta \cos t \\ y &= \varDelta \cos\delta \sin t \\ z &= \varDelta \sin\delta. \end{aligned} \tag{3}$$

c) Lassen wir wieder die Ebene der xy mit jener des Aequators zusammenfallen, die Axe des x aber nach dem Frühlingspuncte, jene der y nach dem 90ten Grade der Rectascension gerichtet sein, so bedeutet der Winkel η wieder die Declination $= \delta$, der Winkel ω die Rectascension $= \alpha$, und wir haben

$$\begin{aligned} x &= \varDelta \cos\delta \cos\alpha \\ y &= \varDelta \cos\delta \sin\alpha \\ z &= \varDelta \sin\delta. \end{aligned} \tag{4}$$

d) Wenn endlich die Ebene der xy mit jener der Ekliptik zusammenfällt, die Axe der x nach dem Frühlingspunct, jene der y nach dem 90ten

Grade der Länge gerichtet wird, so ist $\eta = \beta =$ der Breite und $\omega = \lambda =$ der Länge des Sternes und wir haben:

$$\begin{aligned} x &= \Delta \cos\beta \cos\lambda \\ y &= \Delta \cos\beta \sin\lambda \\ z &= \Delta \sin\beta. \end{aligned} \tag{5}$$

Transformation der sphärischen Coordinaten.

14. Sehr oft tritt die Nothwendigkeit ein, von einem der sphärischen Coordinatensysteme zu einem anderen überzugehen. Da die beiden Systeme des Aequators die eine Coordinate, nämlich die Declination gemeinschaftlich haben und die zwei anderen Coordinaten, der Stundenwinkel t in dem einen, die Rectascension α in dem andern Systeme durch die einfache Gleichung $t = \theta - \alpha$ zusammenhängen, wenn θ die Sternzeit bezeichnet, so haben wir uns nur mit folgenden Aufgaben zu beschäftigen: 1) Höhe und Azimuth in Stundenwinkel und Declinationen zu verwandeln und umgekehrt; 2) Rectascension und Declination in Länge und Breite zu verwandeln und umgekehrt. Zur Vollständigkeit würde zwar noch die Lösung der Aufgabe erfordert werden, aus Höhe und Azimuth Länge und Breite zu finden; aber abgesehen davon, dass diese Aufgabe in der Praxis nicht vorkommt, würde es bei der grösseren Complication der dieselbe lösenden Formeln immer vorzuziehen sein, sie durch successive Anwendung der Aufgaben 1) und 2) aufzulösen.

Die Auflösung dieser beiden Aufgaben geschieht durch die Auflösung eines sphärischen Dreieckes, welches durch die beiden Pole der Grundkreise der zwei in Betracht gezogenen Coordinatensysteme und durch den Stern gebildet wird. Da die Formeln der sphärischen Trigonometrie fortwährend zur Anwendung kommen, so wird es zweckmässig sein, die wichtigsten derselben kurz zusammen zu stellen.

15. Bezeichnet man mit a, b, c die drei Seiten, mit A, B, C die gegenüberliegenden Winkel eines sphärischen Dreieckes, so sind bekanntlich die Grundformeln desselben:

$$\begin{aligned} \cos a &= \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A \\ \sin a \cos B &= \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A \\ \sin a \sin B &= \sin b \sin A, \end{aligned} \tag{6}$$

mittelst welcher sofort a und B berechnet werden können, wenn die zwei Seiten b und c nebst dem eingeschlossenen Winkel A gegeben sind. Durch Vertauschung der Buchstaben B, b mit C, c verwandeln sich die zwei letzten Gleichungen in:

$$\begin{aligned} \sin a \cos C &= \cos c \sin b - \sin c \cos b \cos A \\ \sin a \sin C &= \sin c \sin A, \end{aligned} \tag{7}$$

welche zur Bestimmung des dritten Winkels C dienen. Durch Division der zwei letzten der Glgn. (6), so wie der Glgn. (7) folgt noch: