ERSTES CAPITEL.

DIE SCHEINBARE HIMMELSKUGEL UND IHRE TÄGLICHE BEWEGUNG.

1. Von was immer für einem Puncte des Raumes wir das Himmelsgewölbe betrachten mögen, so erscheint uns dasselbe als eine hohle Kugel, in deren Mittelpuncte sich das Auge des Beobachters befindet, und an welcher wir die Gestirne gleichsam projicirt erblicken. Man nennt dieselbe die scheinbare Himmelskugel und ihr Halbmesser kann beliebig gross angenommen werden.

Die Oerter der Gestirne an der scheinbaren Himmelskugel werden durch die Richtungen bestimmt, in welchen uns dieselben erscheinen und man sieht leicht ein, dass nur diese Richtungen Gegenstand unmittelbarer Beobachtung sein können, wobei ihre Entfernungen vom Beobachter sowohl, als untereinander noch unbestimmt bleiben.

Die Richtungen der Himmelskörper, also ihre Oerter an der scheinbaren Himmelskugel, sind aber in beständiger Aenderung begriffen, weil der Standpunct des Beobachters sich fortwährend ändert, sowohl in Folge der täglichen Bewegung der Erde um ihre Axe, als auch ihrer jährlichen Bewegung um die Sonne. So wie die Erde, in Folge der letztgenannten Bewegung, ändern aber auch die übrigen Gestirne ihren absoluten Ort im Raume; die Lehre von diesen Bewegungen und ihren Gesetzen bildet die theorische Astronomie; die Erkenntniss dieser Bewegungen kann aber offenbar nur aus der Kenntniss der scheinbaren Oerter hervorgehen, welche dieselben zu verschiedenen Zeiten an der Himmelskugel einnehmen.

Die Bestimmung der Oerter der Gestirne an der scheinbaren Himmelskugel, so wie die Betrachtung aller an diese scheinbaren Oerter sich knüpfenden Erscheinungen und Aufgaben bildet den Inhalt der sphärischen Astronomie.

Die aus der täglichen Bewegung der Erde um ihre Axe entstehenden Aenderungen in den Richtungen der Gestirne sind verschieden für Beobachter auf verschiedenen Puncten der Erde; hiedurch bieten sich die Mittel dar, den Ort des Beobachters auf der Oberfläche der Erde zu bestimmen. Die hierauf bezüglichen Aufgaben der sphärischen Astronomie pflegt man häufig unter der Bezeichnung „geographische Ortsbestimmung“ zusammenzufassen, und diese sind es, mit welchen wir uns, dem Zwecke des Buches entsprechend, vorzugsweise beschäftigen werden.

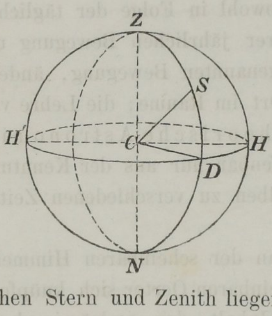
Puncte und Kreise an der scheinbaren Himmelskugel.

2. Für jeden Punct auf der Oberfläche der Erde ist die Richtung der Schwerkraft eine bestimmte und unveränderliche; sie wird durch einen, mit einem Gewichte beschwerten, frei hängenden Faden (Bleiloth) dargestellt und heisst die Vertical- oder lothrechte Richtung. Denkt man sich dieselbe nach beiden Seiten bis an die Himmelskugel verlängert, so wird sie dieselbe in zwei entgegengesetzten Puncten treffen, von welchen der obere (der höchste Punct der Himmelskugel) der Scheitelpunct oder das Zenith, der untere uns unsichtbare das Nadir genannt wird.

Eine Ebene, senkrecht auf die Vertical-Richtung des Beobachtungsortes gelegt, welche demnach die Erdkugel in diesem Orte berührt, schneidet die Himmelskugel in einem grössten Kreise, welcher der Horizont heisst. Da der Halbmesser der scheinbaren Himmelskugel als unendlich gross zu betrachten ist im Vergleich zu jenem der Erde, so wird eine mit der vorerwähnten parallele, durch den Mittelpunct der Erde gelegte Ebene die Himmelskugel in demselben grössten Kreise schneiden. Ueberhaupt muss festgehalten werden, dass irgend zwei parallele Ebenen von endlichem Abstande die scheinbare Himmelskugel in demselben grössten Kreise, und zwei parallele Gerade von endlichem Abstande die Himmelskugel in demselben Puncte schneiden.

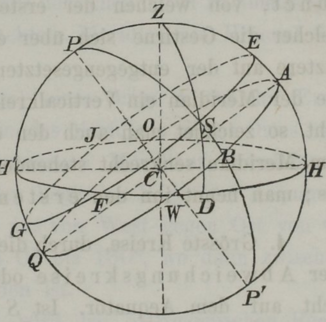
Zenith und Nadir sind die Pole des Horizontes; alle durch diese beiden Puncte gelegten grössten Kreise stehen daher auf dem Horizonte senkrecht; man nennt sie Verticalkreise oder Höhenkreise. In Fig. 3 sei CZ die Vertical-Richtung im Beobachtungsorte C, so ist HDH' der Horizont, und der grösste Kreis $ZSDN$ stellt einen durch irgend einen Punct (Stern) S an der scheinbaren Himmelskugel gelegten Verticalkreis vor. Der Bogen DS des Verticalkreises zwischen Stern und Horizont heisst die Höhe des Sternes, und misst den Winkel DCS, welchen die Richtung CS mit der Ebene des Horizontes einschliesst. Der zwischen Stern und Zenith liegende Bogen SZ des Höhenkreises heisst die Zenithdistanz des Sternes, und misst den Neigungswinkel SCZ der Richtung CS gegen die Vertical-Richtung CZ. Wir werden die Höhe mit h, die Zenithdistanz mit z bezeichnen. Da das Zenith, als Pol des Horizontes, von allen Puncten desselben um 90^0 entfernt ist, so ist immer: $h + z = 90^0$.

Fig. 3.



3. Schon eine kurze durch wenige Stunden einer heiteren Nacht fortgesetzte Beobachtung des Himmels zeigt, dass die Gestirne, während sie ihre gegenseitige Lage nicht ändern, in beständiger Bewegung gegen unseren Horizont begriffen sind, und eine aufmerksamere Betrachtung lehrt bald, dass alle Erscheinungen dieser Bewegung vollständig durch die Annahme erklärt werden, dass die Himmelskugel, an welcher die Sterne gleichsam angeheftet erscheinen, sich im Laufe eines Tages in der Richtung von Ost nach West um die Erde dreht, um eine Axe *PP'* (Fig. 4), welche gegen die Ebene unseres Horizontes unter einem gewissen Winkel geneigt ist. Man nennt diese Bewegung die tägliche Bewegung des Himmels. Bekanntlich ist jedoch diese Bewegung nur eine scheinbare, hervorgerufen durch die tägliche Umdrehung der Erde um ihre Axe in einer der scheinbaren Bewegung des Himmels entgegengesetzten Richtung von West nach Ost. Die beiden Puncte der Himmelskugel *P* und *P'*, in welchen dieselbe von der verlängerten Erdaxe, oder irgend einer in endlichem Abstande zu derselben parallelen Geraden, geschnitten wird, heissen die Weltpole; der auf Seite des Nordpoles der Erde gelegene wird gleichfalls Nordpol, der andere Südpol genannt.

Fig. 4.



Der grösste Kreis *AWQO* der Himmelskugel, dessen Pole die beiden Weltpole sind, heisst Aequator; seine Ebene steht daher senkrecht auf der Erdaxe und fällt mit der Ebene des Erdäquators zusammen. Der Aequator theilt die Himmelskugel in zwei gleiche Hälften, die nördliche und südliche Halbkugel, deren erste den Nordpol, die zweite den Südpol enthält.

Die Höhe des Poles über dem Horizonte des Beobachters, d. i. der Winkel *PCH'*, welchen eine parallel zur Erdaxe durch den Beobachtungsort gelegte Gerade mit der Ebene des Horizontes einschliesst oder der Bogen *H'P*, heisst die Polhöhe dieses Ortes; sie ist für jeden Ort eine constante Grösse, da die Lage der Erdaxe in Bezug auf den Erdkörper eine unveränderliche ist. Die Polhöhe ist offenbar auch gleich dem Abstande *AZ* des Zeniths vom Aequator, oder dem Winkel *ACZ*, welchen die Vertical-Richtung des Beobachtungsortes mit der Ebene des Aequators bildet, d. i. der geographischen Breite des Ortes. Das Complement der Polhöhe zu 90^0 heisst die Aequatorhöhe und ist die Neigung der beiden Ebenen des Aequators und Horizontes, oder die Höhe *AH* des höchsten Punctes des Aequators über dem Horizonte.

Die Ebene, welche durch die Weltpole und das Zenith gelegt wird, heisst Meridian- oder Mittags-Ebene; sie schneidet die Himmelskugel in einem grössten Kreise *HZPH'P'*, welcher der Meridian- oder Mittagskreis des Beobachtungsortes genannt wird und offenbar auf dem Horizont und dem Aequator senkrecht steht, da er die Pole dieser grössten Kreise enthält. Der Meridian schneidet den Horizont in zwei Puncten, von welchen der dem Nordpol nähere *H'* der Nordpunct, der gegenüberliegende *H* der Südpunct heisst. Die gerade Linie *HH'* im Horizonte, welche den Südpunct mit dem Nordpuncte verbindet, führt den Namen Mittagslinie. Die Durchschnittspuncte O und W des Horizontes und des Aequators, welche zu beiden Seiten des Meridians vom Süd- und Nordpuncte um 90° entfernt sind, heissen der Ost- und Westpunct, von welchen der erstere auf jener Seite des Meridians liegt, auf welcher die Gestirne sich über den Horizont erheben, d. i. aufgehen, der letztere auf der entgegengesetzten Seite, wo die Gestirne untergehen. So wie der Meridian ein Verticalkreis ist, welcher durch den Nord- und Südpunct geht, so zeichnet man auch den durch den Ost- und Westpunct gelegten, auf dem Meridian senkrecht stehenden Verticalkreis mit einem besonderen Namen aus; man nennt ihn den ersten Vertical.

4. Grösste Kreise, durch die beiden Pole gelegt, heissen Declinations- oder Abweichungskreise oder auch Stundenkreise. Sie stehen senkrecht auf dem Aequator. Ist S (Fig. 4) irgend ein Punct (Stern) an der Himmelskugel und legen wir durch denselben einen Declinations- oder Stundenkreis PSP', so heisst der zwischen diesem Puncte und dem Aequator liegende Bogen SB des Declinationskreises die Declination oder Abweichung des Punctes S. Sie wird vom Aequator gegen die beiden Pole hin von 0° bis 90° gezählt und heisst nördlich oder südlich, je nachdem der Stern in der nördlichen oder südlichen Hemisphäre liegt. In den Rechnungen wird die erstere positiv, die letztere negativ genommen. Der zwischen Nordpol und Stern liegende Bogen PS des Declinationskreises heisst die Poldistanz des Sternes. Sie wird vom Nordpole aus von 0° bis 180° gezählt. Declination und Poldistanz eines Sternes ergänzen sich immer zu 90°, wobei südliche Declinationen, wie schon bemerkt, negativ zu nehmen sind. Wir werden die Declinationen gewöhnlich mit δ bezeichnen.

Der sphärische Winkel am Pol, ZPS, zwischen Stundenkreis und Meridian heisst der Stundenwinkel des Sternes; er hat das zwischenliegende Stück AB des Aequators zum Maasse.

Der sphärische Winkel am Zenith, HZS, welchen der durch einen Stern S gelegte Höhenkreis mit dem Meridiane bildet, heisst das Azimuth des Sternes, und hat den zwischen Meridian und Höhenkreis liegenden Bogen HD des Horizontes zum Maasse.

Azimuth und Stundenwinkel werden beide in der Regel vom südlichen Theile des Meridians in der Richtung von Süd über West, d. i. in der Richtung der täglichen Bewegung des Himmels von 0° bis 360° gezählt; in Fällen, wo es zweckmässig erscheint, kann auch eine andere Zählweise angewendet werden, z. B. vom südlichen Theile des Meridianes aus nach Ost und West, von 0° bis 180°, oder vom nördlichen Theile des Meridians nach beiden Seiten, wo dann zwischen östlichem und westlichem Azimuth oder Stundenwinkel unterschieden werden muss.

5. Eine Ebene durch die Erdaxe und irgend einen Punct C auf der

Oberfläche der Erde gelegt, schneidet diese Oberfläche in einer krummen Linie, welche bekanntlich der Meridian des Ortes C genannt wird. Diese Ebene, bis an die Himmelskugel erweitert, geht nothwendig durch die Weltpole und das Zenith des Punctes C, und ihr Durchschnitt mit der scheinbaren Himmelskugel ist daher nichts anderes als der oben betrachtete Meridian am Himmel des Beobachtungsortes C.

Die Länge (oder geographische Länge) eines Ortes A auf der Erde ist bekanntlich der Winkel, welchen die Ebene des Meridians dieses Ortes mit der Ebene eines andern, als ersten angenommenen Meridians einschliesst; sie wird durch den zwischen beiden Meridianen liegenden Bogen des Aequators gemessen. Man zählt sie vom ersten Meridiane aus von West gegen Ost von 0^0 bis 360^0, oder auch nach Ost und West von 0^0 bis 180^0, wo dann zwischen östlicher und westlicher Länge zu unterscheiden ist.

Der erste Meridian ist willkürlich und wird bei astronomischen Rechnungen gewöhnlich durch eine der Sternwarten (z. B. Berlin, Greenwich, Paris) gelegt, von welchen jährlich astronomische Ephemeriden publicirt werden. In der Geographie, bei Landkarten und Globen nimmt man gewöhnlich den genau 20^0 westlich von Paris liegenden Meridian als ersten an und nennt ihn den Meridian von Ferro, wiewohl er etwas westlich von Ferro, eine der canarischen Inseln, fällt.

Unter Längenunterschied zweier Orte auf der Erde versteht man den Neigungswinkel der Meridianebenen beider Orte, gleich dem zwischen den beiden Meridianen liegenden Bogen des Aequators.

6. In Folge der täglichen Bewegung beschreibt jeder Stern S (Fig. 4) in einem Tage einen Kreis $ESFGJ$ am Himmel, welcher zum Aequator parallel ist, und dessen Halbmesser um so kleiner sein wird, je näher der Stern dem Pole liegt; man nennt diese Kreise Parallelkreise. Das über dem Horizonte liegende uns sichtbare Stück JEF des Parallelkreises, welches der Stern vom Aufgange bis zum Untergange beschreibt, heisst der Tagbogen, das unter dem Horizonte liegende der Nachtbogen. Man sieht leicht, dass für alle Sterne von nördlicher Declination der Tagbogen grösser ist als der Nachtbogen, daher sie länger über unserem Horizonte verweilen als unter demselben; das umgekehrte gilt für Sterne von südlicher Declination. Der Aequator ist, als grösster Kreis, der einzige Parallelkreis, welcher vom Horizont halbirt wird; ein Stern im Aequator, dessen Declination $= 0$ ist, verweilt daher eben so lange über dem Horizonte, als unter demselben.

Eben so leicht wird man erkennen, dass die Gestirne ihre grösste und kleinste Höhe im Meridiane erreichen; die erstere — man nennt sie die obere Culmination — bei dem Durchgange (in E) durch jene von den Polen begrenzte Hälfte des Meridians, in welcher das Zenith liegt; die kleinste Höhe aber (untere Culmination) bei dem Durchgange durch die andere

Hälfte im Puncte G. Letztere ist für alle Sterne unsichtbar, deren Poldistanz grösser ist als die Polhöhe; solche Sterne hingegen, deren Poldistanz kleiner, oder deren Declination grösser ist als die Polhöhe, bleiben stets über dem Horizonte, daher dann beide Culminationen sichtbar sind. Man nennt solche Sterne Circumpolarsterne.

7. Die Beobachtungen zeigen, dass die tägliche Bewegung des Himmels, oder die Umdrehung der Erde um ihre Axe mit vollkommen gleichförmiger Winkelgeschwindigkeit stattfindet; die Dauer einer vollen Umdrehung um 360^0 wird ein Sterntag genannt; er ist, wie wir später sehen werden, um nahe vier Minuten kürzer als der gewöhnliche bürgerliche Tag. Man theilt den Sterntag (so wie den bürgerlichen Tag) in 24 Stunden (Sternzeitstunden), die Stunde in 60 Minuten, die Minute in 60 Secunden. Aus dem Gesagten erhellt, dass in einem Sterntage $=24$ Sternzeitstunden die 360 Grade des Aequators durch den Meridian gehen, somit — in Folge der Gleichförmigkeit der Bewegung — in einer Stunde $\frac{360}{24}=15$ Grade. Um daher die Zeit zu finden, welche der Stern braucht, um vermöge der täglichen Bewegung des Himmels aus dem Meridiane von E (Fig. 4) nach S zu kommen, hat man nur die Anzahl Grade, welche der Stundenwinkel EPS enthält, durch 15 zu dividiren. Der Quotient gibt die gesuchte Zeit in Stunden. Hiedurch erklärt sich die Benennung Stundenwinkel, welcher sehr häufig in Zeit, d. i. in Stunden, Zeitminuten und Zeitsecunden ausgedrückt wird.

Die Verwandlung von Bogen in Zeit und umgekehrt kommt sehr häufig vor und geschieht durch Division, beziehungsweise Multiplication mit 15, da, dem Gesagten zufolge:

$$1^h=15^0,\ 1^m=15',\ 1^s=15'' \text{ *)}$$

ist. Hieraus folgen noch die Relationen:

$$1^0=4^m,\ 1'=4^s,$$

durch deren Anwendung sich die Rechnung vereinfacht. So ist z. B.:

$$\begin{aligned}7^h\,37^m\,55^s.156 &= (7\times 15+9)^0+(1\times 15+13)'+(3.156\times 15)''\\ &= 114^0\,28'\,47''.34.\end{aligned}$$

und umgekehrt:

$$\begin{aligned}114^0\,28'\,47''.34 &= 7^h+(9\times 4+1)^m+\left(13\times 4+\frac{47.34}{15}\right)^s\\ &= 7^h\,37^m\,55^s.156\end{aligned}$$

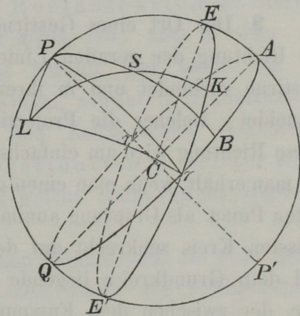
wobei, wie man leicht sieht, eine geringe Uebung hinreicht, um das Anschreiben der eingeklammerten Grössen ganz entbehren zu können.

---

*) Man pflegt die Zeitminuten mit m, die Zeitsecunden mit s zu bezeichnen, um sie von Bogenminuten (′) und Bogensecunden (″) zu unterscheiden. Das Zeichen für die Stunden ist h.

8. Bekanntlich bewegt sich die Erde im Laufe eines Jahres um die Sonne von West nach Ost; von der Erde aus gesehen, wird sich daher die Sonne in derselben Richtung an der Himmelskugel unter den Fixsternen fort zu bewegen scheinen. Da nun die Bahn der Erde in einer durch den Mittelpunct der Sonne gehenden Ebene liegt, und diese die Himmelskugel nothwendig in einem grössten Kreise schneidet, so wird uns auch die scheinbare Sonnenbahn an der Himmelskugel als ein grösster Kreis erscheinen. Dieser grösste Kreis $E\gamma E'\gamma'$ (Fig. 5), heisst die *Ekliptik*. Der Aequator ist gegen die Ekliptik unter einem Winkel $A\gamma E$ von nahe $23\frac{1}{2}^0$ geneigt, welcher die *Schiefe der Ekliptik* genannt wird. Beide grösste Kreise schneiden sich in zwei einander gegenüber liegenden Puncten γ und γ', welche man die *Tag- und Nachtgleichen* — oder *Aequinoctialpuncte* nennt, weil, wenn die Sonne in diesen Puncten ihrer scheinbaren Bahn steht (am 21. März und 23. September eines jeden Jahres) auf der ganzen Erde Tag und Nacht gleich lang sind. Die Durchschnittslinie der Ebenen des Aequators und der Ekliptik, wird die *Tag- und Nachtgleichen* — oder *Aequinoctiallinie* genannt.

Fig. 5.



Ekliptik und Aequator halbiren sich gegenseitig als grösste Kreise; die eine Hälfte der Ekliptik liegt daher südlich, die andere nördlich vom Aequator. Jener von den beiden Aequinoctialpuncten (γ in Fig. 5), durch welchen die Sonne geht, wenn sie sich aus der südlichen Hälfte der Himmelskugel in die nördliche erhebt, heisst der *Frühlings-Tag- und Nachtgleichenpunct*, der andere γ' der *Herbst-Tag- und Nachtgleichenpunct*, oder kürzer: der Frühlings- und Herbstpunct.

Die beiden Puncte der Ekliptik, welche von den Aequinoctialpuncten um 90^0 entfernt sind, heissen die *Sonnenwende-* oder *Solstitialpuncte*, und zwar der in der nördlichen Halbkugel liegende der *Sommersolstitialpunct*, der andere der *Wintersolstitialpunct*. Die beiden Parallelkreise (zum Aequator), welche durch diese Puncte gehen, heissen *Wendekreise* und zwar beziehungsweise des Krebses (in der nördlichen) und des Steinbockes (in der südlichen Halbkugel).

So wie jeder grösste Kreis, hat auch die Ekliptik ihre Pole, von welchen der eine L in der nördlichen Halbkugel gelegene der Nordpol der Ekliptik, der andere der Südpol derselben genannt wird. Grösste Kreise LK, welche durch die Pole der Ekliptik gehen, also senkrecht auf derselben stehen, heissen *Breitenkreise*. Der Bogen KS des durch irgend ein Gestirn S gelegten Breitenkreises, welcher zwischen der Ekliptik und dem Gestirne enthalten ist, heisst die *Breite* des Gestirnes. Sie wird von der Ekliptik aus gezählt und man hat daher zwischen nördlicher und südlicher Breite zu unterscheiden, je nachdem das Gestirn in der nördlichen oder südlichen der beiden von der Ekliptik gebildeten Halbkugeln liegt. In der Rechnung wird erstere positiv, letztere negativ genommen. Der durch die beiden Aequinoctialpuncte gehende Breitenkreis wird Colur der Nachtgleichen, der durch die beiden Solstitialpuncte gehende Colur der Sonnenwenden genannt.

Sphärische Coordinaten.

9. Der Ort eines Gestirnes an der scheinbaren Himmelskugel wird durch die Richtung der geraden Linie gegeben, welche den Beobachtungsort mit dem Gestirne verbindet und in ihrer Verlängerung die Sphäre in einem Puncte schneidet, welcher die Projection des Gestirnes auf die Himmelskugel bildet. Diese Richtung wird am einfachsten durch zwei sphärische Coordinaten bestimmt, die man erhält, wenn man einen grössten Kreis als Grundkreis und in diesem einen festen Punct als Ursprung annimmt und ferner durch das Gestirn einen zweiten grössten Kreis senkrecht auf den Grundkreis legt. Der zwischen dem Gestirne und dem Grundkreise liegende Bogen des zweiten grössten Kreises bildet die eine, der zwischen dem Fusspuncte dieses sphärischen Prependikels und dem Ursprunge liegende Bogen des Grundkreises die zweite sphärische Coordinate. Als Grundkreis dient entweder der Horizont, der Aequator oder die Ekliptik, wodurch wir verschiedene Coordinatensysteme erhalten.

10. System des Horizonts. In diesem bildet der Horizont den Grundkreis; legt man demnach durch den Stern S (Fig. 3 u. 4) einen Höhenkreis, und nimmt den Südpunct H als Ursprung, so sind die Höhe ($h = DS$) und das Azimuth ($A = DH =$ dem sphärischen Winkel DZH) die beiden auf den Horizont sich beziehenden Coordinaten. In Folge der täglichen Bewegung des Himmels ändern sich diese Coordinaten in jedem Augenblicke und sind überdies in demselben Augenblicke an verschiedenen Orten auf der Erde verschieden; soll daher der Ort eines Gestirnes durch Azimuth und Höhe bestimmt sein, so wird nebst der Angabe des Beobachtungsortes noch die Angabe der Zeit erfordert, für welche dieselben gelten. Statt der Höhe kann selbstverständlich auch die Zenithdistanz angewendet werden.

11. System des Aequators. Wählt man den Aequator AQ (Fig. 4) als Grundkreis und den Durchschnittspunct A desselben mit dem über dem Horizonte liegenden Theile des Meridians als Ursprung, so bilden die Declination ($\delta = BS$) und der Stundenwinkel ($\angle APB =$ arc. AB) eines Punctes die entsprechenden Coordinaten desselben, wie aus dem in §. 4 Gesagten unmittelbar erhellt. In diesem Coordinatensysteme ist die eine Coordinate, die Declination, unabhängig von der täglichen Bewegung und in Bezug auf diese constant, während sich der Stundenwinkel in jedem Augenblicke ändert, weil er von einem Puncte des Aequators aus gezählt wird, welcher an der täglichen Bewegung des Himmels nicht theilnimmt, von jenem nämlich, welcher sich eben im Meridiane befindet oder culminirt, dieser aber in jedem Augenblicke ein anderer ist.

Um nebst der Declination noch eine zweite constante, von der Zeit unabhängige Coordinate zu erhalten, wählt man für diese einen festen Punct des Aequators als Ursprung und zwar den Frühlingspunct. Ist (Fig. 5) EE' die Ekliptik, γ der Frühlingspunct, so heisst der Bogen γB des Aequators vom Frühlingspuncte bis zum Fusspuncte des durch den Stern gelegten Declinationskreises die gerade Aufsteigung oder Rectascension des Sternes. Sie wird vom Frühlingspuncte aus von West gegen Ost, also in einer der täglichen Bewegung entgegengesetzten Richtung gezählt und kann, als ein Bogen des Aequators, ähnlich wie die Stundenwinkel, sowohl in Gradmaass als auch in Zeit d. i. in Stunden, Zeitminuten und Zeitsecunden ausgedrückt werden. Rectascension ($\alpha = \gamma B$) und Declination ($\delta = BS$), bilden also ein drittes System sphärischer Coordinaten, welche beide von der täglichen Bewegung unabhängig sind.

Die Rectascension ist auch dem sphärischen Winkel γPB am Pole gleich, welchen der Declinationskreis des Sternes mit dem durch den Frühlingspunct gelegten Declinationskreise einschliesst.

Um aus der Rectascension und Declination eines Sternes den Ort desselben an der Himmelskugel für einen gegebenen Augenblick zu erhalten, muss noch der Ort des Frühlingspunctes in diesem Augenblicke bekannt sein. Dieser Ort wird durch den Stundenwinkel des Frühlingspunctes bestimmt, welcher die Sternzeit genannt wird.

Schon in §. 7 wurde bemerkt, dass man die Dauer einer vollen Umdrehung der Erde um ihre Axe einen Sterntag nennt und es ist dies offenbar die Zeit, welche zwischen zwei aufeinanderfolgenden Durchgängen eines festen Punctes am Himmel durch den Meridian des Beobachtungsortes verfliesst. Es ist aus mehrfachen Gründen zweckmässig, den Beginn des Sterntages von dem Augenblicke der Culmination desjenigen Punctes an zu zählen, von welchem aus die Rectascensionen gezählt werden, d. i. des Frühlingspunctes; es ist demnach 0^h Sternzeit in dem Momente, wenn der Frühlingspunct durch den Meridian geht; es ist $1^h, 2^h, 3^h$, u. s. w. Sternzeit, wenn der Stundenwinkel des Frühlingspunctes beziehungsweise $1, 2, 3, \ldots$ Stunden, oder $15, 30, 45, \ldots$ Grade beträgt. In (Fig. 5) bedeutet daher der Winkel γPA, gleich dem Bogen γA des Aequators, die Sternzeit $= \theta$, und da $\gamma B = \alpha$ die Rectascension, $AB = t$ der Stundenwinkel des Sternes ist, so hat man:

$$\begin{aligned} \theta &= \alpha + t, \\ t &= \theta - \alpha, \end{aligned} \qquad (1)$$

welche Relation ganz allgemein gilt, wenn die Stundenwinkel von Süd über West von 0^0 bis 360^0 (0^h bis 24^h) gezählt werden. Z. B. Man sucht den

Stundenwinkel eines Sternes, dessen Rectascension $\alpha = 7^h\ 32^m 28^s.7$ ist, zur Sternzeit $\theta = 13^h 0^m 0^s$; man findet $t = 5^h\ 27^m 31^s.3$, woraus man sofort erkennt, dass der Stern um diese Zeit westlich vom Meridiane steht. Ebenso erhält man für einen Stern, dessen Rectascension $\alpha = 17^h\ 46^m\ 18^s.9$ ist, für die Sternzeit $\theta = 2^h\ 12^m 51^s.8$ den Stundenwinkel $t = -15^h\ 33^m\ 27^s.1$; durch das negative Zeichen wird angezeigt, dass dieser Stundenwinkel vom südlichen Meridian aus gegen Ost gezählt werden muss; der Stundenwinkel nach der gewöhnlichen Zählweise von Süd über West wird also die Ergänzung zu 24^h d. i.

$$24^h - (15^h\ 33^m\ 27^s.1) = 8^h\ 26^m\ 32^s.9$$

sein; man erhält aber diesen Werth unmittelbar, indem man, sobald $\theta < \alpha$, 24^h zu θ hinzulegt und dann die Differenz $\theta - \alpha$ bildet.

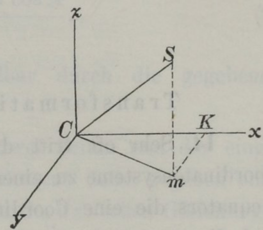
Aus der Gleichung (1) folgt für $t = 0$: $\theta = \alpha$; d. i. im Augenblicke der Culmination irgend eines Gestirnes ist die Sternzeit gleich der Rectascension desselben. Beobachtet man daher mittelst eines geeigneten Instrumentes an einer Uhr den Moment, in welchem ein Stern von bekannter Rectascension durch den Meridian geht, so kennt man auch die Sternzeit dieses Augenblickes, durch deren Vergleichung mit der beobachteten Uhrzeit sofort bekannt wird, um wieviel die Uhr gegen Sternzeit in diesem Augenblicke abweicht.

12. S y s t e m d e r E k l i p t i k. Nimmt man die Ekliptik als Grundkreis und legt durch das Gestirn S einen Breitenkreis LSK (Fig. 5), so ist die B r e i t e SK des Sternes die eine sphärische Coordinate; die andere wird durch den Bogen γK der Ekliptik zwischen dem Frühlingspuncte und dem Fusspuncte des Breitenkreises gebildet; sie wird die L ä n g e des Gestirnes genannt und vom Frühlingspuncte aus von 0^0 bis 360^0 von West gegen Ost, also in derselben Richtung wie die gerade Aufsteigung gezählt. Wir werden die Länge und Breite mit λ und β bezeichnen.

13. Die sphärischen Coordinaten bestimmen nur die Richtung, in welcher uns das Gestirn erscheint, wobei jener Punct der Richtung, in welchem sich dasselbe thatsächlich befindet, ganz unbestimmt bleibt. Soll auch dieser Punct, also der Ort des Gestirnes im Raume bestimmt sein, so muss noch eine Coordinate, nämlich die Entfernung hinzutreten und diese drei Bestimmungsstücke sind dann, wie man sieht, nichts anderes als die aus der analytischen Geometrie bekannten Polarcoordinaten eines Punctes im Raume. Es ist häufig von Vortheil, den Ort des Gestirnes im Raume durch rechtwinkelige Coordinaten auszudrücken, wobei immer eine der coordinirten Ebenen — etwa jene der xy — mit einer der drei Grundebenen des Horizontes, des Aequators oder der Ekliptik zusammenfallend angenommen wird; es ist dann leicht, die rechtwinkeligen Coordinaten durch die sphärischen in Verbindung mit der Distanz auszudrücken.

Sei (Fig. 6) durch den Punct C ein rechtwinkeliges Coordinatensystem gelegt, dessen positive Halbaxen Cx, Cy, Cz sein mögen; S ein Punct im Raume, m dessen Projection auf die Ebene der xy, und mK senkrecht auf Cx. Die rechtwinkeligen Coordinaten des Punctes M sind dann: $CK = x$, $mK = y$, $Sm = z$. Setzt man nun die Entfernung des Punctes S vom Ursprunge $CS = \Delta$, $\angle KCm = \omega$, $\angle SCm = \eta$, so ist in dem rechtwinkeligen Dreiecke SCm:

Fig. 6.



$$Sm = z = \Delta \sin\eta\,,\quad Cm = \Delta \cos\eta\,;$$

ferner in dem rechtwinkeligen Dreiecke KCm:

$$CK = x = Cm\,.\cos\omega\,,\quad mK = y = Cm\,.\sin\omega\,;$$

man hat daher:

$$\begin{aligned} x &= \Delta \cos\eta \cos\omega \\ y &= \Delta \cos\eta \sin\omega \\ z &= \Delta \sin\eta. \end{aligned}$$

Dies vorausgesetzt, lassen wir

a) die Ebene der xy mit dem Horizonte zusammenfallen und die Cx gegen den Südpunct, die Cy gegen den Westpunct gerichtet sein, so ist der Winkel $SCm = \eta$ die Höhe $= h$, der Winkel $KCm = \omega$ das Azimuth $= A$; man hat daher für das System des Horizontes:

$$\begin{aligned} x &= \Delta \cos h \cos A \\ y &= \Delta \cos h \sin A \\ z &= \Delta \sin h. \end{aligned} \tag{2}$$

b) Nimmt man den Aequator als Ebene der xy und legt die positive Halbaxe Cx in die Ebene des Meridians gegen Süd, Cy in die Richtung gegen West, so bedeutet der Winkel η die Declination $= \delta$, der Winkel ω den Stundenwinkel $= t$, und wir haben:

$$\begin{aligned} x &= \Delta \cos\delta \cos t \\ y &= \Delta \cos\delta \sin t \\ z &= \Delta \sin\delta. \end{aligned} \tag{3}$$

c) Lassen wir wieder die Ebene der xy mit jener des Aequators zusammenfallen, die Axe des x aber nach dem Frühlingspuncte, jene der y nach dem 90ten Grade der Rectascension gerichtet sein, so bedeutet der Winkel η wieder die Declination $= \delta$, der Winkel ω die Rectascension $= \alpha$, und wir haben

$$\begin{aligned} x &= \Delta \cos\delta \cos\alpha \\ y &= \Delta \cos\delta \sin\alpha \\ z &= \Delta \sin\delta. \end{aligned} \tag{4}$$

d) Wenn endlich die Ebene der xy mit jener der Ekliptik zusammenfällt, die Axe der x nach dem Frühlingspunct, jene der y nach dem 90ten

Grade der Länge gerichtet wird, so ist $\eta = \beta =$ der Breite und $\omega = \lambda =$ der Länge des Sternes und wir haben:

$$\begin{aligned} x &= \Delta \cos\beta \cos\lambda \\ y &= \Delta \cos\beta \sin\lambda \\ z &= \Delta \sin\beta. \end{aligned} \tag{5}$$

Transformation der sphärischen Coordinaten.

14. Sehr oft tritt die Nothwendigkeit ein, von einem der sphärischen Coordinatensysteme zu einem anderen überzugehen. Da die beiden Systeme des Aequators die eine Coordinate, nämlich die Declination gemeinschaftlich haben und die zwei anderen Coordinaten, der Stundenwinkel t in dem einen, die Rectascension α in dem andern Systeme durch die einfache Gleichung $t = \theta - \alpha$ zusammenhängen, wenn θ die Sternzeit bezeichnet, so haben wir uns nur mit folgenden Aufgaben zu beschäftigen: 1) Höhe und Azimuth in Stundenwinkel und Declinationen zu verwandeln und umgekehrt; 2) Rectascension und Declination in Länge und Breite zu verwandeln und umgekehrt. Zur Vollständigkeit würde zwar noch die Lösung der Aufgabe erfordert werden, aus Höhe und Azimuth Länge und Breite zu finden; aber abgesehen davon, dass diese Aufgabe in der Praxis nicht vorkommt, würde es bei der grösseren Complication der dieselbe lösenden Formeln immer vorzuziehen sein, sie durch successive Anwendung der Aufgaben 1) und 2) aufzulösen.

Die Auflösung dieser beiden Aufgaben geschieht durch die Auflösung eines sphärischen Dreieckes, welches durch die beiden Pole der Grundkreise der zwei in Betracht gezogenen Coordinatensysteme und durch den Stern gebildet wird. Da die Formeln der sphärischen Trigonometrie fortwährend zur Anwendung kommen, so wird es zweckmässig sein, die wichtigsten derselben kurz zusammen zu stellen.

15. Bezeichnet man mit a, b, c die drei Seiten, mit A, B, C die gegenüberliegenden Winkel eines sphärischen Dreieckes, so sind bekanntlich die Grundformeln desselben:

$$\begin{aligned} \cos a &= \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A \\ \sin a \cos B &= \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A \\ \sin a \sin B &= \sin b \sin A, \end{aligned} \tag{6}$$

mittelst welcher sofort a und B berechnet werden können, wenn die zwei Seiten b und c nebst dem eingeschlossenen Winkel A gegeben sind. Durch Vertauschung der Buchstaben B, b mit C, c verwandeln sich die zwei letzten Gleichungen in:

$$\begin{aligned} \sin a \cos C &= \cos c \sin b - \sin c \cos b \cos A \\ \sin a \sin C &= \sin c \sin A, \end{aligned} \tag{7}$$

welche zur Bestimmung des dritten Winkels C dienen. Durch Division der zwei letzten der Glgn. (6), so wie der Glgn. (7) folgt noch:

$$\operatorname{cotg} B = \frac{\operatorname{cotg} b \sin c - \cos c \cos A}{\sin A}, \tag{8}$$

$$\operatorname{cotg} C = \frac{\operatorname{cotg} c \sin b - \cos b \cos A}{\sin A}, \tag{9}$$

welche Gleichungen die Winkel B und C unmittelbar durch die gegebenen Stücke ausdrücken.

Werden übrigens in den beiden Fällen, wo zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel, oder zwei Seiten und die eingeschlossene Seite gegeben sind, alle drei unbekannte Stücke verlangt, so gewähren die Gauss'schen Gleichungen eine bequeme Rechnung; sie sind folgende:

$$\left.\begin{aligned}
\sin \tfrac{1}{2} a \cos \tfrac{1}{2}(B - C) &= \sin \tfrac{1}{2} A \sin \tfrac{1}{2}(b + c) \\
\cos \tfrac{1}{2} a \cos \tfrac{1}{2}(B + C) &= \sin \tfrac{1}{2} A \cos \tfrac{1}{2}(b + c) \\
\sin \tfrac{1}{2} a \sin \tfrac{1}{2}(B - C) &= \cos \tfrac{1}{2} A \sin \tfrac{1}{2}(b - c) \\
\cos \tfrac{1}{2} a \sin \tfrac{1}{2}(B + C) &= \cos \tfrac{1}{2} A \cos \tfrac{1}{2}(b - c).
\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Durch Division je zweier dieser Gleichungen ergeben sich die Neper'schen Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(B + C) &= \frac{\cos \frac{1}{2}(b - c)}{\cos \frac{1}{2}(b + c)} \operatorname{cotg} A \\
\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(B - C) &= \frac{\sin \frac{1}{2}(b - c)}{\sin \frac{1}{2}(b + c)} \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} A
\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

$$\left.\begin{aligned}
\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(b + c) &= \frac{\cos \frac{1}{2}(B - C)}{\cos \frac{1}{2}(B + C)} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} a \\
\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(b - c) &= \frac{\sin \frac{1}{2}(B - C)}{\sin \frac{1}{2}(B + C)} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} a,
\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

von welchen die ersteren (11) zur Anwendung kommen, wenn zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel, die letzteren (12), wenn zwei Winkel und die eingeschlossene Seite gegeben sind.

Drei grösste Kreise der Kugel, deren Pole die Eckpuncte unseres Dreieckes ABC sind, erzeugen ein sphärisches Dreieck $A'B'C'$, dessen Eckpuncte wieder die Pole des Dreieckes ABC sind. Von diesen Dreiecken heisst das eine das Polar- oder Supplementardreieck des anderen und sie besitzen bekanntlich die Eigenschaft, dass die Seiten und Winkel des einen beziehungsweise die Winkel und Seiten des andern zu 180^0 ergänzen. Durch Anwendung dieses Satzes erhält man aus obigen Formeln (6) bis (9), indem man:

$$180^0 - a, \quad 180^0 - b, \quad 180^0 - c, \quad 180^0 - A, \quad 180^0 - B, \quad 180^0 - C$$

an die Stelle von

$$A, \quad B, \quad C, \quad a, \quad b, \quad c$$

treten lässt, die folgenden:

$$\begin{aligned}\cos A &= -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a \\ \sin A \cos b &= \cos B \sin C + \sin B \sin C \cos a \\ \sin A \sin b &= \sin B \sin a ,\end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned}\sin A \cos c &= \cos C \sin B + \sin C \cos B \cos a \\ \sin A \sin c &= \sin C \sin a ,\end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned}\sin a \operatorname{cotg} b &= \operatorname{cotg} B \sin C + \cos C \cos a \\ \sin a \operatorname{cotg} c &= \operatorname{cotg} C \sin B + \cos B \cos a ,\end{aligned} \tag{15}$$

welche an Stelle der Seiten die Winkel und umgekehrt enthalten, und unmittelbar dem Falle entsprechen, wenn zwei Winkel und die eingeschlossene Seite gegeben sind.

Sind in einem Dreiecke die drei Seiten oder die drei Winkel gegeben, so findet man beziehungsweise die Winkel und Seiten mittelst der Formeln:

$$\left.\begin{aligned}\sin \tfrac{1}{2} A^2 &= \frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b \sin c} \\ \cos \tfrac{1}{2} A^2 &= \frac{\sin s \sin(s-a)}{\sin b \sin c}\end{aligned}\right\} \text{ wo } s = \tfrac{1}{2}(a+b+c), \tag{16}$$

$$\left.\begin{aligned}\sin \tfrac{1}{2} a^2 &= \frac{-\cos S \cos(S-A)}{\sin B \sin C} \\ \cos \tfrac{1}{2} a^2 &= \frac{\cos(S-B)\cos(S-C)}{\sin B \sin C}\end{aligned}\right\} \text{ wo } S = \tfrac{1}{2}(A+B+C). \tag{17}$$

Sind endlich in einem sphärischen Dreiecke zwei Seiten und ein opponirter Winkel, oder zwei Winkel und eine opponirte Seite gegeben, so suche man zunächst das andere opponirte Stück mit Hilfe der Sinusgleichung:

$$\sin a \sin B = \sin b \sin A ,$$

und die beiden noch fehlenden Stücke ergeben sich dann mittelst der Neper'schen Analogien.

Für das rechtwinkelige sphärische Dreieck hat man, wenn die Hypotenuse mit h, die Katheten mit a, b, die gegenüberliegenden Winkel mit A, B bezeichnet werden:

$$\begin{aligned}\cos h &= \cos a \cos b , \\ \cos h &= \operatorname{cotg} A \operatorname{cotg} B , \\ \sin a &= \sin h \sin A , \\ \operatorname{tg} a &= \operatorname{tg} h \cos B , \\ \operatorname{tg} a &= \sin b \operatorname{tg} A , \\ \cos A &= \cos a \sin B .\end{aligned} \tag{18}$$

Mit Ausnahme der Gleichung: $\sin a \sin B = \sin b \sin A$ und der durch Vertauschung der Buchstaben daraus hervorgehenden analogen, enthalten die übrigen Grundformeln des sphärischen Dreieckes einen zweigliedrigen Ausdruck, welcher zur logarithmischen Berechnung nicht unmittelbar geeignet ist, aber immer die Eigenschaft besitzt, mindestens von einem Stücke in dem einem

Gliede den Sinus, im andern den Cosinus zu führen. In Folge dieser Eigenschaft erhalten diese Binome die logarithmische Form, indem man die zwei Factoren dieses Sinus und Cosinus dem Sinus und Cosinus (oder umgekehrt) eines Hülfswinkels proportional setzt, was immer möglich ist.

Ist nämlich

$$A = P \sin u + Q \cos u,$$

und man setzt:

$$P = m \sin M, \quad Q = m \cos M,$$

so wird:

$$A = m \cos (M - u),$$

und

$$\operatorname{tg} M = \frac{P}{Q}, \quad m = \sqrt{P^2 + Q^2},$$

welche zwei Gleichungen offenbar jederzeit mögliche Werthe von M und m darbieten.

Bedient man sich jedoch der Gauss'schen Additions- und Subtractions-Logarithmen, so ist die Rechnung nach den ursprünglichen Formeln bequemer *).

Ein Blick in die trigonometrischen Tafeln zeigt, dass ein Winkel oder Bogen durch den Sinus oder durch den Cosinus genauer bestimmt wird, je nachdem derselbe, auf den ersten Quadranten reducirt, kleiner oder grösser ist als 45^0. Am vortheilhaftesten ist aber immer die Bestimmung durch die Tangente, weil dieselbe, wie leicht einzusehen, den Winkel bei jeder Grösse so scharf gibt, als es die angewendeten Tafeln überhaupt gestatten.

In der sphärischen Astronomie werden die sphärischen Dreiecke ohne Einschränkung bezüglich der Grösse der Seiten und Winkel betrachtet, welche demnach jeden Werth von 0^0 bis 360^0 haben, oder in jedem der vier Quadranten liegen können. Wird demnach ein Stück nur durch eine trigonometrische Function bestimmt, so hat man die Wahl zwischen zwei Quadranten, in welchen dasselbe genommen werden kann. Diese Unbestimmtheit entfällt, wenn zwei Functionen, etwa der Sinus und Cosinus, berechnet werden, wodurch auch gleichzeitig der Werth der Tangente bekannt, und somit der Bogen auf die vortheilhafteste Weise bestimmt wird. In den in der Praxis vorkommenden Fällen weiss man übrigens gewöhnlich schon aus anderen Umständen, in welchem Quadranten der gesuchte Winkel liegt.

---

*) Sehr zu empfehlende Tafeln der Additions- und Subtractions-Logarithmen sind in neuerer Zeit von Prof. Wittstein herausgegeben worden:

Fünfstellige logarithmisch-trigonometrische Tafeln von Dr. Th. Wittstein. 2 Aufl. Hannover 1865.

Siebenstellige Gauss'sche Logarithmen von Dr. Th. Wittstein. Hannover 1866.

Die letzte Auflage (1869) von Dr. Bremiker's sechsstelligen logarithmisch-trigonometrischen Tafeln enthält eine sechsstellige Tafel der Additions- und Subtractions-Logarithmen.

16. Aus dem Stundenwinkel $= t$ und der Declination $= \delta$ eines Gestirnes dessen Azimuth $= A$ und Höhe $= h$ zu finden.

In dem vom Nordpole, dem Zenith und Gestirne gebildeten Dreiecke PZS (Fig. 4) ist $PZ = 90^0 - \varphi$, wenn φ die Polhöhe bedeutet, welche die gegenseitige Lage der Grundebenen der beiden Coordinatensysteme bestimmt und daher bekannt sein muss; es sind demnach folgende Stücke gegeben:

$$PZ = 90^0 - \varphi, \quad PS = 90^0 - \delta, \quad \angle ZPS = t.$$

Die gesuchten Stücke sind: $SZ = 90^0 - h$ und $\angle PZS = 180^0 - A$; setzt man daher in den Formeln (6) [§. 15] an die Stelle von

$$\begin{array}{ccccc} a\ , & b\ , & c\ , & A, & B\ , \\ 90^0 - h, & 90^0 - \delta, & 90^0 - \varphi, & t\ , & 180^0 - A, \end{array}$$

so erhält man:

$$\begin{aligned} \sin h &= \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos t \\ \cos h \cos A &= -\cos\varphi \sin\delta + \sin\varphi \cos\delta \cos t \\ \cos h \sin A &= \cos\delta \sin t. \end{aligned} \tag{19}$$

Die erste dieser beiden Formeln gibt sofort h, die beiden andern geben $\log.\cos h \cos A$ und $\log.\cos h \sin A$. Die Zeichen dieser beiden Logarithmen bestimmen (da $\cos h$ immer positiv) den Quadranten, in welchem A zu nehmen, ihre Differenz gibt $\log \operatorname{tg} A$.

Um die Formeln für die logarithmische Rechnung einzurichten, setze man:

$$\left.\begin{aligned} \sin\delta &= m \sin M \\ \cos\delta \cos t &= m \cos M, \\ \text{so wird durch Substitution:}& \\ \sin h &= m \cos(\varphi - M) \\ \cos h \cos A &= m \sin(\varphi - M) \\ \cos h \sin A &= \cos\delta \sin t. \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Die beiden ersten dieser Formeln bestimmen die Grösse m (immer positiv zu nehmen) und den Hilfswinkel M.

Statt dieser Gleichungen kann man sich auch der folgenden bedienen:

$$\left.\begin{gathered} \operatorname{tg} M = \frac{\operatorname{tg}\delta}{\cos t}, \\ \operatorname{tg} A = \frac{\operatorname{tg} t \cos M}{\sin(\varphi - M)}, \quad \operatorname{tg} h = \frac{\cos A}{\operatorname{tg}(\varphi - M)}, \end{gathered}\right. \tag{21}$$

von welchen die erste durch Division der zwei ersten, die zweite durch Division der zwei letzten der Glgn. (20) und Substitution des aus der 2ten folgenden Werthes von m, die dritte durch Division der 3ten und 4ten entsteht. Ein Zweifel über den Quadranten, in welchem A zu nehmen, kann bei dem Gebrauche der Glgn. (21) nicht entstehen, da das Azimuth A immer auf derselben Seite des Meridians liegt, wie der gegebene Stundenwinkel t. Den Hilfswinkel M kann man hiebei immer im 1ten Quadranten nehmen, positiv oder negativ, je nach dem Zeichen von $\operatorname{tg} M$.

Zur Prüfung der Rechnung kann die Gleichung

$$\frac{\sin(\varphi - M)}{\cos M} = \frac{\cos h \cos A}{\cos \delta \cos t}$$

dienen, welche aus der Division der 2^{ten} und 4^{ten} der Gleichungen (20) hervorgeht.

Beispiel. Es sei gegeben:

$$\delta = +6^\circ 59' 47''.2\,;\; t = 20^h 29^m 8^s.22 = 307^\circ 17' 3''.3\,;\; \varphi = 51^\circ 28' 38''.0.$$

Die Rechnung nach den Formeln (21) ist folgende:

$\log \operatorname{tg} \delta = 9.0889209$		
$\log \cos t = 9.7823075$		Prüfung:
$\log \operatorname{tg} M = 9.3066134$	$M = 11^\circ 27' \; 8''.75$	$\log \cos h = 9.9458549$
$\log \cos M = 9.9912659$	$\varphi - M = 40 \;\; 1 \;\; 29 \;.25$	$\log \sin A = 9.9516157_n$
$\log \operatorname{tg} t = 0.1184091_n$		9.8974706_n
$\log \sin(\varphi - M) = 9.8082913$		$\log \cos \delta = 9.9967540$
0.1096750		$\log \sin t = 9.9007166_n$
$\log \operatorname{tg} A = 0.3013837_n$	$A = -63^\circ 27' 13''.00$	9.8974706_n
$\log \cos A = 9.6502320$	$= 296 \;\; 32 \;\; 47 \;.00$	
$\log \operatorname{tg}(\varphi - M) = 9.9241951$		
$\log \operatorname{tg} h = 9.7260369$	$h = 28^\circ \; 1' 11''.40$	

Verlangt man bloss das Azimuth, so ergibt sich dasselbe mittelst der Formel:

$$\operatorname{cotg} A = \frac{\sin\varphi \cos t - \operatorname{tg}\delta \cos\varphi}{\sin t}. \tag{22}$$

Der dritte Winkel PSZ in unserem Dreiecke, der Winkel am Sterne, welcher von dem Declinations- und Höhenkreise gebildet wird, heisst der parallaktische Winkel. Wir werden ihn mit q bezeichnen; er ergibt sich mittelst der Formel:

$$\sin q = \frac{\cos\varphi \sin A}{\cos\delta} = \frac{\cos\varphi \sin t}{\cos h}, \tag{23}$$

sobald A oder h bekannt geworden. Unmittelbar aus den gegebenen Stücken findet man ihn aus den Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \cos h \cos q &= \sin\varphi \cos\delta - \cos\varphi \sin\delta \cos t \\ \cos h \sin q &= \cos\varphi \sin t, \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

welche durch Anwendung der Glgn. (7) [§. 15] auf unser Dreieck sich ergeben.

Werden übrigens alle drei Stücke, Höhe, Azimuth und parallaktischer Winkel gefordert, so rechnet man auch bequem nach den Gauss'schen Formeln, welche auf unser Dreieck angewendet, folgende Form annehmen, wenn wir für $90 - h$ die Zenithdistanz z einführen:

$$\left.\begin{aligned} \cos\tfrac{1}{2}z \sin\tfrac{1}{2}(A - q) &= \sin\tfrac{1}{2}t \sin\tfrac{1}{2}(\varphi + \delta) \\ \cos\tfrac{1}{2}z \cos\tfrac{1}{2}(A - q) &= \cos\tfrac{1}{2}t \cos\tfrac{1}{2}(\varphi - \delta) \\ \sin\tfrac{1}{2}z \sin\tfrac{1}{2}(A + q) &= \sin\tfrac{1}{2}t \cos\tfrac{1}{2}(\varphi + \delta) \\ \sin\tfrac{1}{2}z \cos\tfrac{1}{2}(A + q) &= \cos\tfrac{1}{2}t \sin\tfrac{1}{2}(\varphi - \delta). \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

17. Aus Azimuth und Höhe, Stundenwinkel und Declination eines Gestirnes zu finden. Die Aufgabe wird wieder mittelst des vom Pole, dem Zenith und Sterne gebildeten sphärischen Dreieckes gelöst. Setzen wir in den Formeln (6) des §. 15 an die Stelle von:

$$\begin{array}{cccccc} a\,, & b\,, & c\,, & A\,, & B, & C, \\ 90^0-\delta, & 90^0-h, & 90^0-\varphi, & 180^0-A, & t, & q, \end{array}$$

so folgt:

$$\begin{aligned} \sin\delta &= \sin h\ \sin\varphi - \cos h\ \cos\varphi\ \cos A \\ \cos\delta\ \cos t &= \sin h\ \cos\varphi + \cos h\ \sin\varphi\ \cos A \\ \cos\delta\ \sin t &= \cos h\ \sin A. \end{aligned} \tag{26}$$

Um diese Formeln logarithmisch zu machen, setze man:

$$\begin{aligned} \sin h &= m\cos M \\ \cos h\ \cos A &= m\sin M, \end{aligned}$$

so wird: (27)

$$\begin{aligned} \sin\delta &= m\sin(\varphi - M) \\ \cos\delta\ \cos t &= m\cos(\varphi - M) \\ \cos\delta\ \sin t &= \cos h\ \sin A\,, \end{aligned}$$

statt welcher Gleichungen man sich auch der folgenden bedienen kann:

$$\operatorname{tg} M = \operatorname{cotg} h\cos A,$$

$$\operatorname{tg} t = \frac{\operatorname{tg} A\ \sin M}{\cos(\varphi - M)},\quad \operatorname{tg}\delta = \cos t\ \operatorname{tg}(\varphi - M). \tag{28}$$

Für den parallaktischen Winkel hat man:

$$\sin q = \frac{\cos\varphi\sin A}{\cos\delta} = \frac{\cos\varphi\ \sin t}{\cos h}, \tag{29}$$

oder vermöge der Glgn. (7) [§. 15]:

$$\begin{aligned} \cos\delta\cos q &= \sin\varphi\cos h + \cos\varphi\ \sin h\cos A, \\ \cos\delta\ \sin q &= \cos\varphi\ \sin A, \end{aligned}$$

deren Quotient einen Ausdruck für $\operatorname{tg} q$ gibt.

Eben so kann man zur Auflösung dieser Aufgabe die Gauss'schen Formeln benützen. Da dieselbe jedoch in der Praxis selten vorkommt, so wollen wir dabei nicht länger verweilen.

18. Aus der Rectascension α und Declination δ eines Gestirnes seine Länge λ und Breite β zu finden. Die Auflösung dieser Aufgabe liefert das von den beiden Polen des Aequators und der Ekliptik und dem Sterne gebildete Dreieck. Es seien in Fig. 5 AQ der Aequator, EE' die Ekliptik, P und L die Pole dieser grössten Kreise, S das Gestirn, γ der Frühlingspunct. Dann ist: $\gamma B = \angle\gamma PB = \alpha$, $\gamma K = \angle\gamma LK = \lambda$; $BS = \delta$, $KS = \beta$. Der grösste Kreisbogen PL zwischen den Polen des Aequators und der Ekliptik ist gleich dem Neigungswinkel $A\gamma E$ dieser beiden grössten Kreise, d. i. der Schiefe der Ekliptik, welche wir mit ε bezeichnen. Da ferner der Punct γ, als Durchschnittspunct des Aequators und der Ekliptik, von den Polen P, L dieser grössten Kreise um 90^0 entfernt ist, so ist der Frühlingspunct γ der Pol des grössten Kreisbogens PL.

Grösste Kreise, durch γ gelegt, wie $P\gamma$ und $L\gamma$, werden daher auf PL senkrecht stehen, d. i. es ist $\angle LP\gamma = PL\gamma = 90^0$.

Somit ist im Dreiecke PLS:

$$PS = 90^0 - \delta, \qquad LS = 90^0 - \beta, \qquad PL = \varepsilon,$$
$$\angle LPS = 90^0 + \alpha, \qquad \angle PLS = 90^0 - \lambda.$$

Durch Anwendung der Formeln (6) [§. 15] auf das vorliegende Dreieck ($a = 90^0 - \beta$, $B = 90^0 - \lambda$ setzend), erhält man demnach:

$$\begin{aligned} \sin\beta &= \sin\delta\cos\varepsilon - \cos\delta\sin\varepsilon\sin\alpha, \\ \cos\beta\sin\lambda &= \sin\delta\sin\varepsilon + \cos\delta\cos\varepsilon\sin\alpha, \\ \cos\beta\cos\lambda &= \cos\delta\cos\alpha. \end{aligned} \tag{30}$$

Um dieselben zur logarithmischen Rechnung umzuformen, setze man:

$$\left.\begin{aligned} m\sin M &= \sin\delta \\ m\cos M &= \cos\delta\sin\alpha, \end{aligned}\right.$$

so wird

$$\left.\begin{aligned} \sin\beta &= m\sin(M-\varepsilon) \\ \cos\beta\sin\lambda &= m\cos(M-\varepsilon) \\ \cos\beta\cos\lambda &= \cos\delta\cos\alpha, \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

statt welcher Gleichungen man sich wieder der folgenden, leicht abzuleitenden bedienen kann:

$$\begin{gathered} \operatorname{tg} M = \frac{\operatorname{tg}\delta}{\sin\alpha}, \\ \operatorname{tg}\lambda = \frac{\cos(M-\varepsilon)}{\cos M}\operatorname{tg}\alpha, \quad \operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}(M-\varepsilon)\sin\lambda. \end{gathered} \tag{32}$$

Bei Anwendung der Formeln (31) bestimmt sich der Quadrant, in welchem λ zu nehmen ist, ohne Zweideutigkeit aus den Zeichen von $\sin\lambda$ und $\cos\lambda$, da $\cos\beta$ immer positiv; beim Gebrauche der Formeln (32) behebt sich der Zweifel durch die Bemerkung, dass λ in jenem Quadranten liegen muss, welcher einerseits dem Zeichen von $\operatorname{tg}\lambda$ entspricht, anderseits dem $\cos\lambda$ das Zeichen von $\cos\alpha$ verleiht, letzteres vermöge der 3^{ten} der Glgn. (30), da $\cos\delta$ und $\cos\beta$ immer positiv sind.

Zur Prüfung der Rechnung kann die Gleichung

$$\frac{\cos(M-\varepsilon)}{\cos M} = \frac{\cos\beta\sin\lambda}{\cos\delta\sin\alpha}$$

benützt werden, welche durch Division der 2^{ten} und 4^{ten} der Glgn. (31) erhalten wird.

Beispiel. Es sei gegeben: $\alpha = 194^0\,12'\,23''.7$; $\delta = 62^0\,12'\,21''.0$; $\varepsilon = 23^0\,27'\,15''.06$

Prüfung:

$$
\begin{array}{llll}
\lg \operatorname{tg} \delta & = 0.2780987 & & \lg \cos \delta = 9.6686622 \\
\lg \sin \alpha & = 9.3899078_n & & \lg \cos \beta = 9.7119516 \\
\lg \operatorname{tg} \alpha & = \underline{9.4033970} & & \lg \cos \beta \sin \lambda = 9.3928956 \\
\lg \operatorname{tg} M & = 0.8881909_n & M = -\ 82^\circ 37' 44''.39 & \lg \cos \delta \sin \alpha = \underline{9.0585700_n} \\
\lg \cos M & = 9.1082053 & M - \varepsilon = -\ 106\ \ 4\ 59\ .45 & 0.3343256_n \\
\lg \cos (M - \varepsilon) & = 9.4425309_n & & \\
\lg \operatorname{tg}\ (M - \varepsilon) & = 0.5401294 & & \\
\lg \dfrac{\cos (M - \varepsilon)}{\cos M} & = 0.3343256_n & & \\
\lg \operatorname{tg} \lambda & = 9.7377226_n & \lambda = 151^\circ 20'\ \ 9''.76 & \\
\lg \sin \lambda & = 9.6809440 & & \\
\lg \operatorname{tg} \beta & = 0.2210734 & \beta = \ \ 58\ \ 59\ \ 27\ .94 &
\end{array}
$$

Den Winkel $LSP = \eta$ am Sterne zwischen Declinations- und Breitenkreis findet man aus den Gleichungen:

$$\sin \eta = \frac{\cos \alpha \sin \varepsilon}{\cos \beta} = \frac{\cos \lambda \sin \varepsilon}{\cos \delta}, \tag{33}$$

oder:

$$\begin{aligned} \cos \beta \cos \eta &= \cos \varepsilon \cos \delta + \sin \varepsilon \sin \delta \sin \alpha, \\ \cos \beta \sin \eta &= \sin \varepsilon \cos \alpha. \end{aligned} \tag{34}$$

Endlich kann man sich noch der Gauss'schen Formeln bedienen, namentlich in dem Falle, wenn nebst λ und β auch η verlangt wird. Setzt man $90^\circ - \eta = E$, so sind dieselben, auf unser Dreieck angewendet, folgende:

$$\begin{aligned} \sin (45 - \tfrac{1}{2}\beta) \sin \tfrac{1}{2}(E - \lambda) &= \cos (45 + \tfrac{1}{2}\alpha) \sin [45 - \tfrac{1}{2}(\varepsilon + \delta)] \\ \sin (45 - \tfrac{1}{2}\beta) \cos \tfrac{1}{2}(E - \lambda) &= \sin (45 + \tfrac{1}{2}\alpha) \cos [45 - \tfrac{1}{2}(\varepsilon - \delta)] \\ \cos (45 - \tfrac{1}{2}\beta) \sin \tfrac{1}{2}(E + \lambda) &= \sin (45 + \tfrac{1}{2}\alpha) \sin [45 - \tfrac{1}{2}(\varepsilon - \delta)] \\ \cos (45 - \tfrac{1}{2}\beta) \cos \tfrac{1}{2}(E + \lambda) &= \cos (45 + \tfrac{1}{2}\alpha) \cos [45 - \tfrac{1}{2}(\varepsilon + \delta)] \end{aligned} \tag{35}$$

19. Aus der Länge und Breite eines Gestirnes dessen Declination und Rectascension zu finden.

Aus demselben Dreiecke *LPS* (Fig. 5) erhalten wir auf dem in §. 18 betretenen Wege:

$$\begin{aligned} \sin \delta &= \sin \beta \cos \varepsilon + \cos \beta \sin \varepsilon \sin \lambda \\ \cos \delta \sin \alpha &= -\sin \beta \sin \varepsilon + \cos \beta \cos \varepsilon \sin \lambda \\ \cos \delta \cos \alpha &= \cos \beta \cos \lambda, \end{aligned} \tag{36}$$

oder, für logarithmische Rechnung umgeformt:

$$\begin{aligned} m \sin M &= \sin \beta \\ m \cos M &= \cos \beta \sin \lambda \\ \sin \delta &= m \sin (M + \varepsilon) \\ \cos \delta \sin \alpha &= m \cos (M + \varepsilon) \\ \cos \delta \cos \alpha &= \cos \beta \cos \lambda, \end{aligned} \tag{37}$$

oder

$$\operatorname{tg} M = \frac{\operatorname{tg}\beta}{\sin\lambda},$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\cos(M+\varepsilon)}{\cos M}\operatorname{tg}\lambda, \quad \operatorname{tg}\delta = \operatorname{tg}(M+\varepsilon)\sin\alpha, \tag{38}$$

und zur Prüfung der Rechnung:

$$\frac{\cos(M+\varepsilon)}{\cos M} = \frac{\cos\delta \sin\alpha}{\cos\beta \sin\lambda}.$$

Für den Winkel am Sterne η hat man wieder entweder die Ausdrücke (33) des vorhergehenden §., oder die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} \cos\delta \cos\eta &= \cos\varepsilon \cos\beta - \sin\varepsilon \sin\beta \sin\lambda, \\ \cos\delta \sin\eta &= \sin\varepsilon \cos\lambda. \end{aligned} \tag{39}$$

20. Die Sonne bewegt sich in der Ekliptik, und es ist daher, von einer kleinen 1″ nicht überschreitenden Störung abgesehen, ihre Breite $\beta = 0$. Handelt es sich also darum, aus der Rectascension und Declination der Sonne ihre Länge, oder umgekehrt aus letzterer die beiden erstgenannten Coordinaten zu finden, so hat man unmittelbar aus dem rechtwinkeligen Dreiecke γBG (Fig. 5), in welchem, wenn die Sonne in G sich befindet, $\gamma B = \alpha$, $BG = \delta$ und $\gamma G = \lambda$ ist:

$$\begin{aligned} \cos\lambda &= \cos\alpha \cos\delta \\ \sin\lambda &= \frac{\sin\delta}{\sin\varepsilon} \\ \operatorname{tg}\lambda &= \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\cos\varepsilon}, \end{aligned} \tag{40}$$

und

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\alpha &= \operatorname{tg}\lambda \cos\varepsilon \\ \sin\delta &= \sin\lambda \sin\varepsilon \\ \operatorname{tg}\delta &= \operatorname{tg}\varepsilon \sin\alpha. \end{aligned} \tag{41}$$

Diese Formeln folgen natürlich auch aus den Gleichungen der beiden vorhergehenden Paragraphe, wenn man $\beta = 0$ setzt.

Besondere Erscheinungen der täglichen Bewegung.

21. In dem sphärischen Dreiecke, welches irgend ein Gestirn mit dem Nordpole und dem Zenith des Beobachters bildet, besteht die Gleichung [§. 16]:

$$\sin h = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos t,$$

wo h die Höhe, δ die Declination, t den Stundenwinkel des Gestirnes, φ die Polhöhe bedeutet. Das Gestirn ist im Horizonte, wenn $h = 0$; bezeichnen wir den für diese Stellung stattfindenden Stundenwinkel mit t_0, so ist:

$$0 = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos t_0,$$

woraus folgt:

$$\cos t_0 = -\operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\delta. \tag{42}$$

Diese Gleichung gibt also den Stundenwinkel des Gestirnes beim Auf- und Untergange, dessen Werth, absolut genommen, dem halben Tagbogen [§. 6] gleich ist. Bekanntlich ist die Sternzeit der oberen Culmination eines Gestirnes gleich der Rectascension α desselben [§. 11]; drückt man daher α und t_0 in Zeit aus, so ist $\alpha - t_0$ die Sternzeit des Aufganges, $\alpha + t_0$ jene des Unterganges des Gestirnes.

Beispiel. Man berechne die Sternzeit des Auf- und Unterganges des Sternes Aldebaran (α Tauri) für Wien. Für diesen Stern ist für 1868, 0:

$$\alpha = 4^h\, 28^m\, 20^s.9\,, \quad \delta = +16^0\, 14'\, 30'';$$

ferner ist für Wien: $\varphi = 48^0\, 12'$; hiemit findet man:

$$\begin{aligned} \log \operatorname{tg} \varphi &= 0.048612 \\ \log \operatorname{tg} \delta &= 9.464364 \\ \log \cos t_0 &= 9.512976_n, \quad t_0 = 109^0\, 0'\, 54'' = 7^h\, 16^m\, 3^s.6\,; \end{aligned}$$

somit Sternzeit des Aufganges $= 21^h\, 12^m\, 17^s.3$,

„ „ „ Unterganges $= 11\ 44\ \ 24.5$.

Aus Gl. (42) erhellt, dass, wenn δ positiv, d. i. wenn das Gestirn nördlich vom Aequator steht, $\cos t_0$ negativ, also t_0 oder der halbe Tagbogen grösser als 90^0 ist, d. h. das Gestirn verweilt länger über unserem Horizonte als unter demselben. Es wird $\cos t_0$ unmöglich, wenn $\operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \delta > 1$, d. i. $\operatorname{tg} \delta > \operatorname{cotg} \varphi$ oder $\operatorname{tg} \delta > \operatorname{tg}(90^0 - \varphi)$, also $\delta > 90^0 - \varphi$ wird; Sterne, deren nördliche Declination grösser ist als $90^0 - \varphi$, treten daher nicht unter den Horizont (Circumpolarsterne). Für $\delta = 0$ wird $t_0 = 90^0$; ein Gestirn im Aequator verweilt daher eben so lange über dem Horizonte, als unter demselben. Für Gestirne von südlicher Declination ist δ negativ; es wird daher $\cos t_0$ positiv und t_0 kleiner als 90^0; solche Gestirne verweilen daher kürzere Zeit über unserem Horizonte, als unter demselben. Ein Gestirn, dessen südliche Declination grösser als $90^0 - \varphi$, steigt über den Horizont nicht mehr empor. Für Orte auf der südlichen Halbkugel hat man in Gl. (42) nur φ negativ zu nehmen, um zu den analogen Resultaten zu gelangen.

22. Setzt man in der Gleichung:

$$\sin \delta = \sin \varphi \sin h - \cos \varphi \cos h \cos A$$

[§. 17] $h = 0$, so erhält man das Azimuth $A = A_0$ des Punctes des Horizontes, in welchem ein Stern auf- und untergeht; es wird:

$$\cos A_0 = -\frac{\sin \delta}{\cos \varphi}.$$

Der diesem Cosinus entsprechende negative Werth des Winkels A_0 ist das östliche Azimuth des Gestirnes bei seinem Aufgange, der positive Werth das westliche Azimuth bei seinem Untergange. Die Entfernung des in Rede stehenden Punctes im Horizonte vom Ost- beziehungsweise Westpuncte nennt man die Morgen- und Abendweite des Gestirnes; bezeichnet man diese mit A', so ist $A_0 = 90^0 + A'$, somit:

$$\sin A' = \frac{\sin\delta}{\cos\varphi},$$

wo A' positiv ist, wenn der Punct des Auf- und Unterganges vom Ost- und Westpuncte gegen Norden liegt, negativ im entgegengesetzten Falle.

Für den Stern Aldebaran wird mit den in §. 21 angegebenen Werthen das östliche, beziehungsweise westliche Azimuth beim Auf- und Untergange $A_0 = 114^0\,48'\,36''$; die Morgen- oder Abendweite $A' = 24^0\,48'\,36''$ gegen Nord.

23. Aus der Gleichung:

$$\sin h = \sin\varphi\sin\delta + \cos\varphi\cos\delta\cos t \qquad (a)$$

folgt, dass für $t = 0$ d. i. bei der oberen Culmination, $\sin h$, also auch die Höhe h den grössten Werth erreicht. Man nennt die Höhe im Augenblicke der Culmination die Meridianhöhe, ihre Ergänzung zu 90^0 die Meridian-Zenithdistanz. Setzt man in obiger Gleichung $t = 0$, und $h = 90^0 - Z$, so erhält man für die Meridian-Zenithdistanz in der oberen Culmination: $\cos Z = \cos(\varphi - \delta)$, d. i.

$$Z = \varphi - \delta,$$

$$\text{oder} \qquad Z = \delta - \varphi,$$

von welchen Gleichungen die erste oder zweite gilt, je nachdem das Gestirn südlich oder nördlich vom Zenith culminirt.

Für $t = 180^0$ erhält in der Gl. (a) $\cos t$ seinen grössten negativen, also $\sin h$ seinen kleinsten Werth. Die Höhe ist also in der unteren Culmination ein Minimum. Für die Meridian-Zenithdistanz in der unteren Culmination folgt aus Gl. (a) für $t = 180^0$: $\cos Z = \sin\varphi\sin\delta - \cos\varphi\cos\delta = -\cos(\varphi + \delta) = \cos[180^0 - (\varphi + \delta)]$, somit

$$Z = 180^0 - (\varphi + \delta).$$

Da ferner bekanntlich $\cos t = \cos(-t)$, so folgt aus Gl. (a), dass gleichen östlichen und westlichen Stundenwinkeln gleiche Höhen entsprechen und umgekehrt.

24. Die im vorhergehenden §. aus der Gl. (a) gezogenen Folgerungen, dass das Gestirn im Meridiane seine grösste Höhe erreiche und zu gleichen Stundenwinkeln zu beiden Seiten des Meridians gleiche Höhen gehören, gelten jedoch nur dann, wenn die Declination des Gestirnes sich nicht ändert. Ist diese veränderlich, so findet die grösste Höhe ausserhalb des Meridians statt. Differenzirt man die Gleichung:

$$\cos z = \sin\varphi\sin\delta + \cos\varphi\cos\delta\cos t,$$

indem man nebst t und z auch δ als veränderlich betrachtet, so erhält man:

$$-\sin z\frac{dz}{dt} = (\sin\varphi\cos\delta - \cos\varphi\sin\delta\cos t)\frac{d\delta}{dt} - \cos\varphi\cos\delta\sin t.$$

Soll nun z ein Maximum oder Minimum werden, so muss $\frac{dz}{dt}=0$ sein; für diesen Werth folgt aus der letzten Gleichung:

$$\sin t = \frac{d\delta}{dt}(\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\delta\cos t),$$

welche Gleichung den Stundenwinkel des Gestirnes im Augenblicke der grössten Höhe gibt. Hiebei bedeutet $\frac{d\delta}{dt}$ das Verhältniss der Aenderung der Declination zur Aenderung des Stundenwinkels; da dieses, und somit auch $\sin t$, immer sehr klein ist, so kann man $\sin t = t$ und $\cos t = 1$ setzen und hat dann;

$$t = \frac{d\delta}{dt}(\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\delta).$$

Lässt man nun $d\delta$ die Aenderung der Declination in 1 Zeitsecunde, ausgedrückt in Bogensecunden, bedeuten, so hat man $dt = 1^s = 15''$ zu setzen, und um t in Zeitsecunden zu erhalten, die rechte Seite der Gleichung mit $\frac{206265}{15}$ zu multipliciren; hiedurch wird:

$$t^s = \frac{206265}{15} \cdot \frac{d\delta}{dt}(\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\delta). \tag{43}$$

Bewegt sich das Gestirn gegen Nord, so ist $d\delta$, also, wenn die Declination des Mondes südlich, oder seine nördliche Declination nicht grösser ist als φ, auch t positiv, und das Gestirn erreicht seine grösste Höhe t Sec. nach der Culmination; im Gegenfalle, wenn $d\delta$ negativ, also das Gestirn gegen Süd geht, vor derselben.

Beispiel. 1866, Juni 23, ist die stündliche Bewegung des Mondes in Declination zur Zeit seiner Culmination in Greenwich $= -395''.55$; $\delta = -13^0 22' 11''$; man sucht die Zeit der grössten Höhe für Greenwich ($\varphi = 51^0 28' 38''$). Man hat nun, da $1^h = 3600$ Zeitsecunden:

$$d\delta = -\frac{395.55}{3600},\quad \frac{d\delta}{dt} = -\frac{1}{15}\cdot\frac{395.55}{3600} = -0.0073250;$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg}\varphi &= 1.25615 \\
\operatorname{tg}\delta &= -0.23767 \\
\hline
&1.49382 \ldots\ldots\ldots\ldots \log . 0.17430 \\
&\qquad\qquad\qquad \log\frac{d\delta}{dt} = 7.86481_n \\
&\qquad\qquad\qquad \log 206265 = 5.31443 \\
&\qquad\qquad\qquad \text{lg Compl. } 15 = 8.82391 \\
&\qquad\qquad\qquad \log t^s = 2.17745;\quad t^s = -150^s.47 \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = -2^m 30^s.47.
\end{aligned}$$

Der Mond erreicht also an diesem Tage zu Greenwich $2^m 30^s.47$ vor der Culmination seine grösste Höhe.

25. Differenzirt man die Gleichung:

$$\sin h = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos t \qquad (a)$$

in Bezug auf h und t, so kommt:

$$\cos h \frac{dh}{dt} = -\cos\varphi \cos\delta \sin t,$$

oder, da $\cos\varphi \sin t = \cos h \sin p$, und $\cos\delta \sin t = \cos h \sin A$ ist, wenn p den parallactischen Winkel und A das Azimuth bedeutet:

$$\frac{dh}{dt} = -\cos\delta \sin p, \qquad (44)$$

$$\frac{dh}{dt} = -\cos\varphi \sin A. \qquad (45)$$

Diese Gleichungen geben das Verhältniss der Aenderung der Höhe zur Aenderung des Stundenwinkels, also die Geschwindigkeit, mit welcher das Gestirn in irgend einem Puncte seiner täglichen Bahn seine Höhe ändert. Wie man sieht, ist dieselbe $= 0$ im Meridiane, wo das Azimuth $A = 0$, und erreicht ein Maximum für $A = \pm 90^0$; die Höhe ändert sich also am raschesten, wenn das Gestirn sich im ersten Vertical befindet. Für diese Stellung des Sternes im ersten Vertical erhält man aus der Gleichung:

$$\sin\delta = \sin\varphi \sin h - \cos\varphi \cos\delta \cos A,$$

$A = \pm 90^0$ setzend:

$$\sin h = \frac{\sin\delta}{\sin\varphi}, \qquad (46)$$

und mit diesem Werthe gibt die Gl. (a):

$$\cos t = \frac{\operatorname{tg}\delta}{\operatorname{tg}\varphi}. \qquad (47)$$

Diese Gleichungen geben Höhe und Stundenwinkel eines Sternes im ersten Vertical, und durch Verbindung des letzteren mit der Rectascension des Sternes ergibt sich dann die Sternzeit des Durchganges durch den ersten Vertical. Beide Formeln zeigen, dass, wenn $\delta > \varphi$, der Stern den ersten Vertical nicht mehr erreicht, weil er in der That in diesem Falle nördlich vom Zenith culminirt. Man sieht übrigens leicht, dass, wenn der Stern im ersten Vertical steht, das Dreieck zwischen Pol, Zenith und Stern am Zenith rechtwinkelig ist, und somit obige Formeln aus diesem Dreiecke unmittelbar sich ergeben. Ist δ wenig von φ verschieden, so wird $\sin h$ und $\cos t$ nahe $= 1$, und diese Formeln geben dann h und t nur mit geringer Genauigkeit. Bildet man aber aus der Gl. (47) die folgenden:

$$1 + \cos t = 1 + \frac{\operatorname{tg}\delta}{\operatorname{tg}\varphi},$$

$$1 - \cos t = 1 - \frac{\operatorname{tg}\delta}{\operatorname{tg}\varphi},$$

so erhält man durch Division dieser beiden Gleichungen, da $1 + \cos t = 2 \cos \frac{1}{2} t^2$, $1 - \cos t = 2 \sin \frac{1}{2} t^2$:

$$\frac{\sin \frac{1}{2} t^2}{\cos \frac{1}{2} t^2} = \frac{\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \delta}{\operatorname{tg} \varphi + \operatorname{tg} \delta},$$

d. i.

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} t^2 = \frac{\sin(\varphi - \delta)}{\sin(\varphi + \delta)}, \tag{48}$$

welche Gleichung den Stundenwinkel mit aller Schärfe gibt. Durch Anwendung der 5^{ten} der Glgn. (18) in §. 15 auf das erwähnte rechtwinkelige Dreieck erhält man dann die Höhe mittelst der Formel:

$$\operatorname{cotg} h = \operatorname{tg} t \cos \varphi. \tag{49}$$

26. Zufolge der Gl. (22) [§. 16] hat man:

$$\operatorname{cotg} A \sin t = \sin \varphi \cos t - \operatorname{tg} \delta \cos \varphi;$$

hieraus folgt durch Differenziation nach t und A:

$$-\frac{dA}{\sin A^2} . \sin t + \operatorname{cotg} A \cos t\, dt = -\sin \varphi \sin t\, dt,$$

oder

$$\frac{dA}{dt} . \frac{\sin t}{\sin A} = \cos A \cos t + \sin A \sin t \sin \varphi;$$

der zweite Theil dieser Gleichung ist, wie aus der Anwendung der ersten der Glgn. (13) in §. 15 auf unser sphärisches Dreieck folgt, $= \cos p$; man hat daher:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\sin A \cos p}{\sin t} = \frac{\cos \delta \cos p}{\cos h}. \tag{50}$$

Diese Gleichung gibt das Verhältniss der Aenderung des Azimuthes zur Aenderung des Stundenwinkels. Der letztere Ausdruck zeigt, dass diese Aenderung ihren grössten Werth im Meridiane erreicht, wo der parallactische Winkel $p = 0$ ist.

Für $p = 90^0$ wird $\frac{dA}{dt} = 0$, d. i. die Bewegung eines Sternes im Azimuth wird $= 0$, und das (östliche oder westliche) Azimuth selbst ein Maximum, wenn der parallactische Winkel $= 90^0$ ist. Um den Punct im Parallel des Sternes zu finden, wo dies stattfindet, setzen wir in der Gleichung:

$$\sin \varphi = \sin \delta \sin h + \cos \delta \cos h \cos p$$

$p = 90^0$, und erhalten:

$$\sin h = \frac{\sin \varphi}{\sin \delta}, \tag{51}$$

welcher Werth, in die Gl. (a), §. 25, substituirt, gibt:

$$\cos t = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\operatorname{tg} \delta}. \tag{52}$$

Endlich folgt aus der Gl.: $\cos\delta \sin p = \cos\varphi \sin A$, für $p = 90^0$:

$$\sin A = \frac{\cos\delta}{\cos\varphi}. \tag{53}$$

Aus diesen Gleichungen folgt, dass überhaupt nur für solche Sterne $p = 90^0$ werden kann, für welche $\delta > \varphi$ ist, d. i. welche nördlich vom Zenith culminiren; dies findet ferner statt in jenem Puncte des Parallels, in welchem derselbe vom Verticalkreise berührt wird, weil nur in diesem Puncte der Declinationskreis, welcher den Parallel stets senkrecht schneidet, auch auf dem Verticalkreis des Sternes senkrecht steht. Man sagt dann, der Stern sei in seiner grössten (östlichen oder westlichen) Digression. Auch bei dieser Stellung ist das Dreieck zwischen Zenith, Pol und Stern ein rechtwinkeliges, nur liegt der rechte Winkel am Sterne. Die Formeln (51), (52) und (53) geben Höhe, Stundenwinkel und Azimuth des Sternes zur Zeit der grössten Digression.

Beispiel. Für den Polarstern hat man für 1866, 0: $\alpha = 1^h\, 9^m\, 58^s$, $\delta = 88^0\, 35'\, 42''$; hiemit findet man für die Polhöhe von Wien ($\varphi = 48^0\, 12'$):

$$t = \pm 88^0\, 25'\, 41'' = \pm 5^h\, 53^m\, 43^s,$$

somit die Sternzeit der grössten Digression nach Gl. (1) in Ost $= 19^h\, 16^m\, 15^s$, in West $= 7^h\, 3^m\, 41^s$; für die Höhe und das Azimuth des Sternes um diese Zeiten erhält man: $h = 48^0\, 13'\, 10''$; $A = \pm 2^0\, 6'\, 29''$, von Nord gezählt. Man sieht hieraus, dass so lange φ nicht sehr gross ist, das Azimuth des Polarsternes immer sehr klein bleibt.

ZWEITES CAPITEL.

DIE ASTRONOMISCHEN EPHEMERIDEN UND DIE INTERPOLATIONSRECHNUNG.

27. Bei astronomischen Rechnungen ist man immer genöthigt, von den astronomischen Ephemeriden Gebrauch zu machen. Es sind dies Tafeln, welche die numerischen Werthe gewisser von der Zeit abhängiger Grössen, deren man bei astronomischen Rechnungen bedarf, wie z. B. der Coordinaten der vorzüglichsten Gestirne, bezogen auf den Aequator oder die Ekliptik, ihrer Parallaxen und scheinbaren Halbmesser, u. s. w. für bestimmte Zeitmomente berechnet enthalten. Solche Ephemeriden werden von mehreren Sternwarten (Berlin, Greenwich, Paris, Washington) jährlich, und zwar um mehrere Jahre im Voraus veröffentlicht. Ihre Einrichtung lernt man aus den denselben beigefügten Erläuterungen kennen.

Bei den meisten der in den Ephemeriden enthaltenen Tafeln ist das Zeitmoment, auf welches sich die angeführten Tafelgrössen beziehen, der wahre oder mittlere Mittag des Meridians der Sternwarte, von welcher die Ephemeride veröffentlicht wird. Die Tafelgrössen erscheinen demnach als Functionen der Zeit, welch' letztere als unabhängig Veränderliche das sogenannte Argument