Vergleicht man diese Gleichungen mit (90), so hat man

für die erstere: $k_1 = \frac{x}{r}$, $k_2 = \frac{y}{r}$, $k_3 = k_4 = 0$,

" " zweite: $k_1 = -\frac{y}{r^2}$, $k_2 = \frac{x}{r^2}$, $k_3 = k_4 = 0$,

somit, vermöge der Gl. (92):

für das Gewicht von r: $\frac{1}{P_r} = [\alpha\alpha]\frac{x^2}{r^2} + [\beta\beta]\frac{y^2}{r^2} + 2[\alpha\beta]\frac{xy}{r^2}$,

" " " " u: $\frac{1}{P_u} = [\alpha\alpha]\frac{y^2}{r^4} + [\beta\beta]\frac{x^2}{r^4} - 2[\alpha\beta]\frac{xy}{r^4}$.

Substituirt man nun in diesen Ausdrücken für x, y, r, $[\alpha\alpha]$, $[\alpha\beta]$, $[\beta\beta]$ die in §. 34 erhaltenen Werthe, so folgt:

Gewicht von r: $P_r = 0.4252$, Gewicht von u: $P_u = 0.8833$,

somit der mittlere Fehler

von r: $\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{\sqrt{P_r}} = \pm 85.7$; von u: $\varepsilon_u = \frac{\varepsilon}{\sqrt{P_u}} = \pm 20.2$;

durch Multiplication mit 0.6745 erhält man die wahrscheinlichen Fehler:

± 57.8, bez. ± 13.6.

Diese Fehler sind noch in Einheiten der 5ten Decimalstelle ausgedrückt, also durch 100000 zu dividiren; ferner liegt ersterem 1 Schraubengang g, letzterem als Winkelfehler der Radius als Einheit zu Grunde. Es ist bei der benützten Schraube 1 Schraubengang $g = 0.163294$ Wiener Linien; multiplicirt man daher r und ε_r mit diesem Werthe von g, ε_u mit 3438, um diesen Fehler in Minuten zu erhalten, so kommt:

$r = 2.06647$ Wien. Linien m. d. wahrsch. Fehler $\pm$ 0.000094 Wien. Linien,

$u = 26^\circ\, 53'.0$ " " " " $\pm\, 0'.5$,

und die Gleichung des Fühlhebels ist:

$$e = 4'''.13294 \sin \tfrac{1}{2}\mu \cos\left(26^\circ\, 53'.0 - \tfrac{1}{2}\mu\right).$$

IV. Bestimmung der wahrscheinlichsten Werthe von Grössen, welche von einander nicht unabhängig sind.

36. Im vorhergehenden Abschnitte haben wir die Aufgabe, aus gegebenen Gleichungen:

$$M_1 = f_1(x, y, z, \ldots), \quad M_2 = f_2(x, y, z, \ldots), \text{ u. s. w.}, \qquad (a)$$

in welchen M_1, M_2, etc. die beobachteten Functionswerthe bedeuten, die wahrscheinlichsten Werthe der Unbekannten x, y, z, etc. zu finden, unter der Voraussetzung aufgelöst, dass die Unbekannten von einander völlig unabhängig seien.

Es kann aber der Fall eintreten, dass zwischen diesen Grössen gewisse theoretische Beziehungen existiren, die man immer durch Gleichungen:

$$\varphi_1(x, y, z, \ldots) = 0, \quad \varphi_2(x, y, z, \ldots) = 0, \quad \varphi_3(x, y, z, \ldots = 0) \qquad (b)$$

ausgedrückt denken kann, welchen demnach die gesuchten Werthe der Unbekannten jedenfalls Genüge leisten müssen. Die Anzahl dieser Bedingungsgleichungen muss offenbar kleiner sein, als jene der Unbekannten, weil letztere, im Falle einer gleichen Anzahl, schon durch die Bedingungsgleichungen selbst bestimmt wären, ohne dass es hiezu einer Beobachtung bedürfte. Die Aufgabe besteht dann offenbar darin, die Unbekannten so zu bestimmen, dass sie 1) den Bedingungsgleichungen (b) strenge, und 2) den Gleichungen (a) möglichst nahe Genüge leisten.

Zur Auflösung dieser Aufgabe bietet sich zunächst folgender Weg dar. Es sei m die Anzahl der Unbekannten, μ die Anzahl der Bedingungsgleichungen (b), wo $\mu < m$, so kann man mit Hilfe der letzteren μ Unbekannte durch die übrigen, $m - \mu$ an der Zahl, ausdrücken und aus den Gleichungen (a) eliminiren; letztere enthalten dann nur mehr $m - \mu$ Unbekannte, welche nunmehr als von einander unabhängig zu betrachten sind, und deren wahrscheinlichste Werthe daher nach der im vorhergehenden Abschnitte vorgetragenen Methode bestimmt werden können; durch Substitution derselben in die Bedingungsgleichungen ergeben sich dann auch die Werthe jener μ Unbekannten, welche früher eliminirt wurden.

Nehmen wir, um das Verfahren an einem einfachen Beispiele zu erläutern, an, es seien die Winkel zwischen den um einen Punkt A im Horizont liegenden Objecten 1, 2, 3, 4 gemessen worden, und man habe erhalten:

$$\begin{array}{lrrrl} 1.2 = & 75^0 & 28' & 26''.37, & \text{Gewicht} = 2 \\ 2.3 = & 112 & 15 & 54\ .03, & \quad " \quad = 4 \\ 3.4 = & 101 & 42 & 13\ .94, & \quad " \quad = 4 \\ 4.1 = & 70 & 33 & 28\ .15, & \quad " \quad = 1. \end{array}$$

Wir haben hier vier Unbekannte, welche der Bedingung unterworfen sind, dass ihre Summe $= 360^0$ sein muss. Nehmen wir zur Vereinfachung der Rechnung genäherte Werthe an, und setzen, mit x, y, z, w die gesuchten wahrscheinlichsten Correctionen der genäherten Werthe bezeichnend:

$$\begin{array}{rrrrl} 1.2 = & 75^0 & 28' & 26'' & +x \\ 2.3 = & 112 & 15 & 54 & +y \\ 3.4 = & 101 & 42 & 14 & +z \\ 4.1 = & 70 & 33 & 28 & +w \\ \hline \text{Summe} = 360^0 = & 360 & 0 & 2 & +x+y+z+w, \end{array}$$

so haben wir die Bedingungsgleichung:

$$x + y + z + w + 2'' = 0,$$

und erhalten durch Vergleichung der angenommenen Werthe mit den beobachteten folgende den obigen (a) entsprechende Gleichungen:

$$x - 0''.37 = 0$$
$$y - 0\ .03 = 0$$
$$z + 0\ .06 = 0$$
$$w - 0\ .15 = 0.$$

Mit Hilfe der Bedingungsgleichung eliminiren wir nun eine Unbekannte, etwa $w = -2 - x - y - z$, wodurch sich zwischen den drei übrigen unabhängigen Unbekannten folgende 4 Gleichungen ergeben:

$$\begin{array}{rll} x \qquad\qquad - 0.37 = 0, & \text{Gewicht} & = 2 \\ y \qquad - 0.03 = 0, & \quad „ & = 4 \\ z + 0.06 = 0, & \quad „ & = 4 \\ -x - y - z - 2.15 = 0, & \quad „ & = 1. \end{array}$$

Hieraus folgen die Normal-Gleichungen:

$$3x + y + z + 1.41 = 0,$$
$$x + 5y + z + 2.03 = 0,$$
$$x + y + 5z + 2.39 = 0,$$

und aus diesen die wahrscheinlichsten Werthe:

$$x = -0''.253, \quad y = -0''.281, \quad z = -0''.371,$$

mit welchen die Bedingungsgleichung den Werth $w = -1''.095$ liefert. Die wahrscheinlichsten Werthe der vier Winkel sind also:

1.2 =	75°	28′	25″.747
2.3 =	112	15	53 .719
3.4 =	101	42	13 .629
4.1 =	70	33	26 .905
Summe =	360	0	0 .000

37. Wir haben oben die Aufgabe in ihrer allgemeinsten Form betrachtet, dass die Unbekannten x, y, z, . . . nicht unmittelbar beobachtet, sondern zu deren Bestimmung die Glgn. (a) gegeben seien, wo die Functionswerthe M die unmittelbar beobachteten Grössen sind. In dieser allgemeinen Fassung hat aber die Aufgabe bisher keine Anwendung gefunden; bei den Anwendungen in der Geodäsie, bisher den einzigen, sind die Werthe der Grössen x, y, z, . . . immer unmittelbar durch Beobachtungen gegeben, in Folge dessen jede der Glgn. (a) nur eine dieser Grössen enthält, oder von der Form: $x = M_1$, $y = M_2$, u. s. w. ist. Das im vorhergehenden §. gegebene Beispiel ist, wie man sieht, von dieser Art.

Die beobachteten Werthe der Unbekannten werden nun, weil mit unvermeidlichen Fehlern behaftet, den zwischen denselben bestehenden Bedingungsgleichungen nicht Genüge leisten, und müssen demnach Verbesserungen erhalten, welche so beschaffen sind, dass die verbesserten Werthe die Bedingungsgleichungen strenge erfüllen. Dies kann aber immer auf unendlich vielfache Art geschehen und es wird daher darauf ankommen, unter allen möglichen Systemen von Verbesserungen das wahrscheinlichste zu finden. Offenbar sind die gesuchten

Verbesserungen, mit entgegengesetzten Zeichen genommen, als die Fehler der Beobachtungen zu betrachten, und es kann daher die Aufgabe folgendermassen ausgesprochen werden. Es sind die beobachteten Werthe der Unbekannten so zu verbessern, dass 1) die verbesserten Werthe den Bedingungsgleichungen strenge Genüge leisten, und 2) die Summe der Quadrate der Verbesserungen, multiplicirt in ihre respectiven Gewichte, ein Minimum werde.

38. Die im §. 36 vorgetragene und durch ein einfaches Beispiel erläuterte Auflösung der Aufgabe wird, in Folge der auszuführenden Eliminationen, weitläufig, wenn die Anzahl der Unbekannten und Bedingungsgleichungen beträchtlich ist; man bedient sich daher in der Praxis gewöhnlich des folgenden bequemeren Verfahrens.

Es seien $w_1, w_2, w_3, \ldots, w_m$ die wahren Werthe der Unbekannten, m an der Zahl; aus Beobachtungen habe man dafür die Werthe $o_1, o_2, o_3, \ldots, o_m$ mit den Gewichten $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_m$ erhalten; die zwischen diesen Grössen gegebenen Bedingungsgleichungen, μ an der Zahl (wo $\mu < m$), seien:

$$\begin{aligned} \varphi_1(w_1, w_2, \ldots, w_m) &= 0, \\ \varphi_2(w_1, w_2, \ldots, w_m) &= 0, \\ &\vdots \\ \varphi_\mu(w_1, w_2, \ldots, w_m) &= 0. \end{aligned} \tag{95}$$

Seien ferner $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m$ die noch unbekannten wahrscheinlichsten Verbesserungen, welche den beobachteten Werthen o hinzugefügt werden müssen, damit sie den Bedingungsgleichungen (95) Genüge leisten, so haben wir:

$$w_1 = o_1 + x_1, \quad w_2 = o_2 + x_2, \quad w_3 = o_3 + x_3, \ldots$$

zu setzen. Substituiren wir diese Werthe in die Bedingungsgleichungen (95), so erhalten diese die Form:

$$\begin{aligned} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \ldots + a_mx_m + n_1 &= 0, \\ b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + \ldots + b_mx_m + n_2 &= 0, \\ &\vdots \\ g_1x_1 + g_2x_2 + g_3x_3 + \ldots + g_mx_m + n_m &= 0, \end{aligned} \tag{96}$$

in welchen die $a, b, \ldots, g, n$ bekannte Zahlen sind*).

---

*) Sind die Bedingungsgleichungen (95) schon von linearer Form, so gehen sie durch einfache Substitution der Werthe $w_1 = o_1 + x_1$, $w_2 = o_2 + x_2$, u. s. w. in die Glgn. (96) über. Im andern Falle wird man wieder das in §. 22 befolgte Verfahren in Anwendung bringen. Durch die erwähnte Substitution verwandelt sich z. B. die 1te der Glgn. (95) in

$$\varphi_1(o_1 + x_1, o_2 + x_2, o_3 + x_3, \ldots) = 0;$$

da nun die gesuchten Correctionen x_1, x_2, u. s. w. immer so klein sein werden, dass man ihre Quadrate vernachlässigen kann, so hat man vermöge des Taylor'schen Satzes:

$$\varphi_1(o_1, o_2, o_3, \ldots) + \frac{d\varphi_1}{dw_1}x_1 + \frac{d\varphi_1}{dw_2}x_2 + \frac{d\varphi_1}{dw_3}x_3 + \ldots = 0,$$

Die Verbesserungen x_1, x_2, u. s. w. sind nun so zu bestimmen, dass sie den Bedingungsgleichungen (96) strenge Genüge leisten, und dass die Summe:

$$S = p_1 x_1^2 + p_2 x_2^2 + p_3 x_3^2 + \ldots + p_m x_m^2$$

ein Minimum werde. Die Bedingung des Minimums ist bekanntlich: $dS = 0$, d. i.

$$p_1 x_1 dx_1 + p_2 x_2 dx_2 + p_3 x_3 dx_3 + \ldots + p_m x_m dx_m = 0. \qquad (97)$$

Wären nun die Grössen x_1, x_2, u. s. w. also auch deren Differenzialien dx_1, $dx_2, \ldots$ von einander unabhängig, so würde zufolge der letzten Gleichung der Coefficient eines jeden Differenzials gleich Null zu setzen sein, woraus $x_1 = x_2 = \ldots = 0$ folgen würde, d. h. es würden die unmittelbar beobachteten Werthe o_1, o_2, etc. auch die wahrscheinlichsten sein. In Folge der zwischen diesen Grössen bestehenden Bedingungsgleichungen (96) müssen aber gleichzeitig mit (97) auch noch die Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 dx_1 + a_2 dx_2 + a_3 dx_3 + \ldots + a_m dx_m = 0, \\ b_1 dx_1 + b_2 dx_2 + b_3 dx_3 + \ldots + b_m dx_m = 0, \\ \quad\vdots \\ g_1 dx_1 + g_2 dx_2 + g_3 dx_3 + \ldots + g_m dx_m = 0, \end{array}\right\} \qquad (98)$$

bestehen, welche durch Differenziation der Glgn. (96) sich ergeben. Eliminiren wir daher mittelst dieser Glgn. (98) μ Differenzialien aus Gl. (97), so werden die übrigbleibenden von einander unabhängig, und ihre Coefficienten gleich Null zu setzen sein.

Diese Elimination bewerkstelligen wir nun mit Hilfe unbestimmter Multiplicatoren. Multipliciren wir die Glgn. (98) der Reihe nach mit den noch unbestimmten Factoren K_1, $K_2, \ldots K_\mu$, so erhalten wir:

$$\begin{array}{l} K_1 a_1 dx_1 + K_1 a_2 dx_2 + K_1 a_3 dx_3 + \ldots + K_1 a_m dx_m = 0, \\ K_2 b_1 dx_1 + K_2 b_2 dx_2 + K_2 b_3 dx_3 + \ldots + K_2 b_m dx_m = 0, \\ \quad\vdots \\ K_\mu g_1 dx_1 + K_\mu g_2 dx_2 + K_\mu g_3 dx_3 + \ldots + K_\mu g_m dx_m = 0. \end{array}$$

Addiren wir diese Gleichungen zur Gl. (97), und ordnen die Summe nach den Differenzialien, so sind die Coefficienten jener Differenzialien, μ an der Zahl, $= 0$ zu setzen, welche wir eliminiren wollen, wodurch sich die nöthigen μ Gleichungen zur Bestimmung der μ Factoren k ergeben; die übrigbleibenden Differenzialien werden hiedurch von einander unabhängig, und es sind daher zur Erfüllung der Bedingung des Minimums deren Coefficienten gleichfalls gleich 0 zu setzen, was offenbar darauf hinauskommt, in der besagten Summe

---

somit, wenn man die bekannten Grössen:

$$\varphi_1(o_1, o_2, o_3, \ldots) = n_1, \quad \frac{d\varphi_1}{dw_1} = a_1, \quad \frac{d\varphi_1}{dw_2} = a_2, \quad \frac{d\varphi_1}{dw_3} = a_3, \text{ u. s. w.,}$$

setzt:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + \ldots + n_1 = 0.$$

In gleicher Weise wird jede nicht lineare Bedingungsgleichung behandelt.

die Coefficienten sämmtlicher Differenzialien der Nulle gleich zu setzen. Hiedurch ergeben sich nun folgende Gleichungen:

$$
\begin{aligned}
p_1 x_1 + K_1 a_1 + K_2 b_1 + K_3 c_1 + \ldots + K_\mu g_1 &= 0, \\
p_2 x_2 + K_1 a_2 + K_2 b_2 + K_3 c_2 + \ldots + K_\mu g_2 &= 0, \\
p_3 x_3 + K_1 a_3 + K_2 b_3 + K_3 c_3 + \ldots + K_\mu g_3 &= 0, \\
&\vdots \\
p_m x_m + K_1 a_m + K_2 b_m + K_3 c_m + \ldots + K_\mu g_m &= 0.
\end{aligned}
\tag{99}
$$

Die Anzahl dieser Gleichungen ist nothwendig gleich jener der unbekannten Correctionen x_1, x_2, etc., deren nur e i n e in jeder Gleichung erscheint, und welche daher leicht aus diesen Gleichungen erhalten werden, sobald die Werthe der Factoren K_1, K_2, u. s. w., welche nach G a u s s den Namen C o r r e l a t e n d e r B e d i n g u n g s g l e i c h u n g e n führen, bekannt geworden sind.

Die zur Bestimmung der Correlaten erforderlichen Gleichungen ergeben sich aber auf folgende Art. Multiplicirt man die Glgn. (99) der Reihe nach mit $\frac{a_1}{p_1}$, $\frac{a_2}{p_2}$, $\frac{a_3}{p_3}$, u. s. w. und addirt die Producte, so erhält man mit Rücksicht auf die 1te der Glgn. (96):

$$\left[\frac{aa}{p}\right] K_1 + \left[\frac{ab}{p}\right] K_2 + \left[\frac{ac}{p}\right] K_3 + \ldots + \left[\frac{ag}{p}\right] K_\mu = n_1 ;$$

wiederholt man diese Operation, indem man zunächst die Glgn. (99) mit $\frac{b_1}{p_1}$, $\frac{b_2}{p_2}, \ldots$; dann mit $\frac{c_1}{p_1}$, $\frac{c_2}{p_2}, \ldots$, u. s. w., endlich mit $\frac{g_1}{p_1}$, $\frac{g_2}{p_2}, \ldots$, multiplicirt, so erhält man nothwendig μ solcher Gleichungen, deren vollständiges System somit sein wird:

$$
\begin{aligned}
\left[\frac{aa}{p}\right] K_1 + \left[\frac{ab}{p}\right] K_2 + \left[\frac{ac}{p}\right] K_3 + \ldots + \left[\frac{ag}{p}\right] K_\mu &= n_1 , \\
\left[\frac{ab}{p}\right] K_1 + \left[\frac{bb}{p}\right] K_2 + \left[\frac{bc}{p}\right] K_3 + \ldots + \left[\frac{bg}{p}\right] K_\mu &= n_2 , \\
\left[\frac{ac}{p}\right] K_1 + \left[\frac{bc}{p}\right] K_2 + \left[\frac{cc}{p}\right] K_3 + \ldots + \left[\frac{cg}{p}\right] K_\mu &= n_3 , \\
&\vdots \\
\left[\frac{ag}{p}\right] K_1 + \left[\frac{bg}{p}\right] K_2 + \left[\frac{cg}{p}\right] K_3 + \ldots + \left[\frac{gg}{p}\right] K_\mu &= n_\mu .
\end{aligned}
\tag{100}
$$

Aus diesen Gleichungen, welche hier wieder N o r m a l - G l e i c h u n g e n genannt werden, erhält man die Werthe der μ Correlaten, und endlich durch Substitution derselben in die Glgn. (99) die wahrscheinlichsten Werthe der Correctionen x_1, x_2, u. s. w.

Wenden wir dieses Verfahren auf das in §. 36 berechnete Beispiel an, so sind uns als beobachtete Grössen gegeben:

$$\begin{aligned} 1.2 &= o_1 = 75^0\,28'\,26''.37, & p_1 &= 2, \\ 2.3 &= o_2 = 112\ \ 15\ \ 54\ .03, & p_2 &= 4, \\ 3.4 &= o_3 = 101\ \ 42\ \ 13\ .94, & p_3 &= 4, \\ 4.1 &= o_4 = 70\ \ 33\ \ 28\ .15, & p_4 &= 1, \end{aligned}$$

mit der Bedingung:

$$w_1 + w_2 + w_3 + w_4 - 360^0 = 0.$$

Durch die Substitution: $w_1 = o_1 + x_1$, $w_2 = o_2 + x_2$, etc. verwandelt sich diese Gleichung in:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 2''.49 = 0.$$

Da nur eine Bedingungsgleichung, also auch nur eine Correlate K_1 vorhanden, und $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 1$ ist, so werden die Glgn. (99):

$$\begin{aligned} 2\,x_1 + K_1 &= 0, \\ 4\,x_2 + K_1 &= 0, \\ 4\,x_3 + K_1 &= 0, \\ x_4 + K_1 &= 0. \end{aligned}$$

Aus gleichem Grunde haben wir nur die eine Normal-Gleichung: $\left[\frac{aa}{p}\right] K_1 = n_1$,

also, da $\left[\frac{aa}{p}\right] = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{1} = 2$ ist:

$$\begin{aligned} 2\,K_1 &= 2''.49, \\ K_1 &= 1''.245; \end{aligned}$$

hiemit geben die vorhergehenden Gleichungen:

$$x_1 = -0''.623, \quad x_2 = -0''.311, \quad x_3 = -0''.311, \quad x_4 = -1''.245,$$

und die wahrscheinlichsten Werthe sind somit:

$$\begin{aligned} 1.2 &= o_1 + x_1 = 75^0\,28'\,25''.747 \\ 2.3 &= o_2 + x_2 = 112\ \ 15\ \ 53\ .719 \\ 3.4 &= o_3 + x_3 = 101\ \ 42\ \ 13\ .629 \\ 4.1 &= o_4 + x_4 = 70\ \ 33\ \ 26\ .905, \\ \hline & \ 360\ \ \ 0\ \ \ 0\ .000 \end{aligned}$$

übereinstimmend mit dem in §. 36 erhaltenen Resultate.

Weitere Ausführungen dieser Aufgabe bleiben dem geodätischen Theile dieses Buches vorbehalten.