Es ist nun: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$, woraus sich $a = 112.866$ Meter ergibt; ferner findet man:

$$\frac{da}{db} = \frac{b - c\cos A}{a} = 0.988\,, \quad \frac{da}{dc} = \frac{c - b\cos A}{a} = 0.991\,,$$

$$\frac{da}{dA} = \frac{bc\sin A}{a} = 8.272.$$

Der Fehler des Winkels A, in Bogenmaass für den Halbmesser 1 ausgedrückt, ist $r_3 = 10'' \sin 1'' = 0.00004848$, und man erhält daher als wahrscheinlichen Fehler von a

$$R = \sqrt{\{(0.988 \times 0.0035)^2 + (0.991 \times 0.0040)^2 + (8.27 \times 10'' \sin 1'')^2\}}$$
$$= \pm\ 0.0053 \text{ Meter.}$$

II. Bestimmung der wahrscheinlichsten Werthe mehrerer von einander unabhängiger Grössen aus beobachteten Werthen von Functionen derselben.

21. Es seien x, y, z, u. s. w. unbekannte Grössen, k an der Zahl, und

$$V = f(x, y, z, \ldots a, b, c, \ldots)$$

eine beliebige Function derselben, deren analytischer Ausdruck bekannt ist. Aus Beobachtungen habe man einen Werth M_1 der Function V_1 erhalten, welcher den bekannten Werthen a_1, b_1, $c_1, \ldots$ der Coefficienten $a, b, c, \ldots$ entspricht, so folgt hieraus die Gleichung:

$$M_1 = f(x, y, z, \ldots a_1\,, b_1\,, c_1\,, \ldots).$$

Jede neu hinzukommende, unter anderen Umständen, d. h. bei geänderten Werthen von $a, b, c, \ldots$ angestellte Beobachtung liefert eine neue Gleichung:

$$M_2 = f(x, y, z, \ldots a_2\,, b_2\,, c_2\,, \ldots),$$
$$M_3 = f(x, y, z, \ldots a_3\,, b_3\,, c_3\,, \ldots),$$
u. s. w.

So lange die Anzahl der Beobachtungen, also auch der Gleichungen kleiner ist als die Anzahl der Unbekannten, ist es bekanntlich unmöglich, bestimmte Werthe der Unbekannten zu finden. Ist die Anzahl der Gleichungen gleich jener der Unbekannten, so lässt sich nichts thun, als die Gleichungen auf gewöhnliche Weise aufzulösen; übersteigt aber die Anzahl m der Gleichungen jene k der Unbekannten, so wird es, in Folge der den beobachteten Functionswerthen M_1, M_2, u. s. w, anhaftenden Beobachtungsfehler kein System von Werthen der Unbekannten geben, welches sämmtlichen Gleichungen strenge Genüge leistet, und es entsteht nun die Aufgabe, jenes System zu finden, welches sämmtliche Gleichungen möglichst nahe befriediget oder mit Rücksicht auf die vorliegenden Beobachtungen das wahrscheinlichste ist.

Hiebei sind zwei Classen von Aufgaben zu unterscheiden. Die unbekannten Grössen x, y, z, u. s. w. sind entweder von einander völlig unabhängig, so dass theoretisch jeder Werth irgend einer derselben mit jedem Werthe aller übrigen verträglich ist; oder es können gewisse Bedingungen existiren, welchen die zu findenden wahrscheinlichsten Werthe der Unbekannten jedenfalls genügen müssen; bedeuten z. B. drei derselben die Winkel eines Dreieckes, so sind offenbar nur solche Werthe zulässig, welche der geometrischen Bedingung, dass die Summe der Winkel in einem Dreiecke eine theoretisch bestimmte ist, Genüge leisten. Die Betrachtung des zweiten Falles dem folgenden Abschnitte vorbehaltend, beschäftigen wir uns im Folgenden mit den Aufgaben der ersten Classe, wenn die Unbekannten von einander unabhängig sind.

22. Es ist offenbar nicht nothwendig, dass, wie oben angenommen wurde, die verschiedenen Gleichungen aus derselben Function $V = f(x, y, z, \ldots)$ entspringen; dieselben können vielmehr aus verschiedenen Functionen:

$V = f(x, y, z, \ldots)$, $V' = \varphi(x, y, z, \ldots)$, $V'' = F(x, y, z, \ldots)$, u. s. w.

hervorgehen, für welche aus Beobachtungen die Werthe $V = M_1$, $V' = M_2$, $V'' = M_3$, u. s. w. erhalten wurden. Die weitere Behandlung der Aufgabe setzt jedoch wesentlich voraus, dass die Gleichungen von linearer Form seien; und es ist daher, wenn dies nicht der Fall ist, vor Allem nothwendig, sie auf diese Form zu bringen, was immer möglich ist. Zu diesem Zwecke seien $X, Y, Z, \ldots$ genäherte Werthe der Unbekannten, die man sich immer verschaffen kann, z. B. durch Auflösung von k Gleichungen, welche man aus den m vorhandenen zweckmässig auswählt. Setzt man dann:

$$x = X + \xi, \quad y = Y + \eta, \quad z = Z + \zeta, \ldots$$

so hat man es mit der Bestimmung der wahrscheinlichsten Werthe der Correctionen $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ zu thun, welche, wenn die genäherten Werthe mit gehöriger Sorgfalt bestimmt sind, immer so klein sein werden, dass die Quadrate und Producte derselben vernachlässiget werden können. Durch Substitution der obigen Werthe wird nun

$$V = f(X + \xi, \; Y + \eta, \; Z + \zeta, \ldots),$$

und hieraus folgt, zufolge des Taylor'schen Theorems und mit Vernachlässigung der höheren Glieder:

$$V = f(X, Y, Z, \ldots) + \frac{dV}{dx}\xi + \frac{dV}{dx}\eta + \frac{dV}{dz}\zeta + \ldots,$$

wo in den Differenzialquotienten $\frac{dV}{dx}$, u. s. w. für $x, y, z, \ldots$ die genäherten Werthe $X, Y, Z, \ldots$ zu substituiren sind, wodurch dieselben, eben so wie die Grösse $f(X, Y, Z, \ldots)$ bekannte Zahlen werden. Hat man nun durch die Beobachtung den Werth $V = M$ erhalten, und setzt die bekannten Grössen:

$$f(X, Y, Z, \ldots) - M = n, \quad \frac{dV}{dx} = a, \quad \frac{dV}{dy} = b, \quad \frac{dV}{dz} = c, \ldots,$$

so verwandelt sich die Gleichung in folgende:

$$a\xi + b\eta + c\zeta + \ldots + n = 0,$$

welche in Bezug auf die Unbekannten $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ linear ist. Hiedurch tritt noch der für die weitere Rechnung sehr erhebliche Vortheil ein, dass man es jetzt nur mit den kleinen Grössen $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ zu thun hat, zu deren Bestimmung die Anwendung von Logarithmen mit einer geringeren Anzahl von Decimalstellen ausreicht, als wenn die vollständigen Werthe der Grössen $x, y, z, \ldots$ aus der Rechnung hervorgehen sollten. Aus diesem Grunde ist sehr häufig die Einführung genäherter Werthe auch in dem Falle lohnend, wenn die gegebenen Gleichungen schon linear sind, wo dann selbstverständlich die Differenziation entfällt, und in den Gleichungen nur $X+\xi$, $Y+\eta$, etc. an die Stelle von x, y, etc. zu setzen ist.

23. Da der Rechnungsmechanismus, welchen die Auflösung unserer Aufgabe erfordert, derselbe bleibt, die Anzahl der Unbekannten mag welche immer sein, so wollen wir uns im folgenden auf vier Unbekannte beschränken. Die gegebenen Gleichungen, m an der Zahl, seien:

$$\begin{aligned} a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 w + n_1 &= 0, \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 w + n_2 &= 0, \\ &\vdots \\ a_m x + b_m y + c_m z + d_m w + n_m &= 0, \end{aligned} \tag{45}$$

in welchen die Grössen a, b, c, d, bekannte Coefficienten bedeuten und die Werthe der absoluten Glieder $n_1, n_2, \ldots.$ aus Beobachtungen hervorgegangen sind. Man pflegt diese Gleichungen gewöhnlich die Bedingungsgleichungen zu nennen.

Irgend ein System von Werthen der Unbekannten, in diese Gleichungen substituirt, erzeugt die Gleichungen:

$$\begin{aligned} a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 w + n_1 &= v_1, \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 w + n_2 &= v_2, \\ &\vdots \\ a_m x + b_m y + c_m z + d_m w + n_m &= v_m, \end{aligned} \tag{46}$$

wo $v_1, v_2, \ldots. v_m$ die Fehler der Beobachtungen $n_1, n_2, \ldots n_m$ bedeuten, welche dem angenommenen Systeme von Werthen der Unbekannten entsprechen. Sind nun $p_1, p_2, \ldots p_m$, die Gewichte der Beobachtungen $n_1, n_2, \ldots n_m$, oder der zugehörigen Gleichungen, und bezeichnet man mit h das Maass der Präcision der Gewichtseinheit, so sind bekanntlich $h_1 \sqrt{p_1}$, $h_2 \sqrt{p_2}$, u. s. w. die Maasse der Präcision der Beobachtungen n_1, n_2, u. s. w.; die Wahrscheinlichkeit des Zusammentreffens der Fehler $v_1, v_2, \ldots$ ist dann bekanntlich proportional der Grösse:

$$e^{-h^2(p_1 v_1^2 + p_2 v_2^2 + \ldots + p_m v_m^2)},$$

und es wird jenes Fehlersystem, also auch, vermöge des V. Satzes in §. 2, jenes System von Werthen der Unbekannten das wahrscheinlichste sein, welches diese Grösse zu einem Maximum, also die Summe:

$$S = p_1 v_1^2 + p_2 v_2^2 + \ldots + p_m v_m^2 = [pvv]$$

zu einem Minimum macht.

Man sieht leicht, dass diess Summe entsteht, wenn man jede der Glgn. (46) mit der Quadratwurzel aus ihrem Gewichte multiplicirt, sodann quadrirt und sämmtliche Quadrate addirt. Diese, im Falle einer ungleichen Genauigkeit der Bedingungsgleichungen erforderliche Multiplication derselben mit der Quadratwurzel aus den respectiven Gewichten, wodurch dieselben auf einerlei Genauigkeit, nämlich jene der Gewichtseinheit reducirt werden, wollen wir nun bereits an den Gleichungen (45) u. (46) ausgeführt denken, so dass im Folgenden die Buchstaben a, b, c, d, n, v nicht mehr die ursprünglichen, sondern die in die Quadratwurzeln der Gewichte multiplicirten Grössen bedeuten. Unter dieser Annahme ist nunmehr die Function:

$$S = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + \ldots + v_m^2 = [vv] \tag{47}$$

zu einem Minimum zu machen, unter welcher einfacheren Form übrigens diese Summe sofort erscheint, wenn sämmtliche Beobachtungen gleiche Genauigkeit haben und daher das Gewicht aller Gleichungen $= 1$ angenommen werden kann.

Vermöge der Voraussetzung, dass die Unbekannten von einander unabhängig sind, werden die Bedingungsgleichungen des Minimums:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{dS}{dx} &= v_1 \frac{dv_1}{dx} + v_2 \frac{dv_2}{dx} + v_3 \frac{dv_3}{dx} + \ldots + v_m \frac{dv_m}{dx} = 0\,, \\
\frac{1}{2}\frac{dS}{dy} &= v_1 \frac{dv_1}{dy} + v_2 \frac{dv_2}{dy} + v_3 \frac{dv_3}{dy} + \ldots + v_m \frac{dv_m}{dy} = 0\,, \\
\frac{1}{2}\frac{dS}{dz} &= v_1 \frac{dv_1}{dz} + v_2 \frac{dv_2}{dz} + v_3 \frac{dv_3}{dz} + \ldots + v_m \frac{dv_m}{dz} = 0\,, \\
\frac{1}{2}\frac{dS}{dw} &= v_1 \frac{dv_1}{dw} + v_2 \frac{dv_2}{dw} + v_3 \frac{dv_3}{dw} + \ldots + v_m \frac{dv_m}{dw} = 0.
\end{aligned}$$

Aus (46) folgt aber durch Differenziation:

$$\begin{aligned}
&\frac{dv_1}{dx} = a_1\,, \quad \frac{dv_2}{dx} = a_2\,, \ldots; \qquad \frac{dv_1}{dy} = b_1\,, \quad \frac{dv_2}{dy} = b_2\,, \ldots, \\
&\frac{dv_1}{dz} = c_1\,, \quad \frac{dv_2}{dz} = c_2\,, \ldots; \qquad \frac{dv_1}{dw} = d_1\,, \quad \frac{dv_2}{dw} = d_2\,, \ldots,
\end{aligned}$$

womit die Gleichungen des Minimums in Folgende übergehen:

$$\begin{aligned}
a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 + \ldots + a_m v_m &= [av] = 0\,, \\
b_1 v_1 + b_2 v_2 + b_3 v_3 + \ldots + b_m v_m &= [bv] = 0\,, \\
c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 + \ldots + c_m v_m &= [cv] = 0\,, \\
d_1 v_1 + d_2 v_2 + d_3 v_3 + \ldots + d_m v_m &= [dv] = 0\,,
\end{aligned} \tag{48}$$

deren Anzahl nothwendig jener der Unbekannten gleichkommt.

Substituirt man endlich in diese Gleichungen die Werthe von v_1, v_2, v_3, ... aus (46), und setzt der Kürze halber:

$$\begin{aligned} a_1 a_1 + a_2 a_2 + a_3 a_3 + \ldots + a_m a_m &= [aa], \\ a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + \ldots + a_m b_m &= [ab], \\ a_1 n_1 + a_2 n_2 + a_3 n_3 + \ldots + a_m b_m &= [an], \\ &\text{u. s. w.} \end{aligned}$$

so erhält man:

$$\begin{aligned} [aa]\,x + [ab]\,y + [ac]\,z + [ad]\,w + [an] &= 0, \\ [ab]\,x + [bb]\,y + [bc]\,z + [bd]\,w + [bn] &= 0, \\ [ac]\,x + [bc]\,y + [cc]\,z + [cd]\,w + [cn] &= 0, \\ [ad]\,x + [bd]\,y + [cd]\,z + [dd]\,w + [dn] &= 0, \end{aligned} \tag{49}$$

aus welchen Gleichungen, den sogenannten Normal-Gleichungen, die wahrscheinlichsten Werthe der Unbekannten folgen.

Man wird leicht bemerken, dass diese Gleichungen aus den Bedingungsgleichungen (45) auf folgende einfache Weise gebildet werden. Multiplicirt man letztere der Reihe nach mit a_1, a_2, a_3, u. s. w., und addirt die Producte, so entsteht die erste der Glgn. (49). Die zweite wird erhalten, wenn die Glgn. (45) mit b_1, b_2, b_3, u. s. w. multiplicirt und die Producte addirt werden; u. s. w. Hieraus folgt auch das leicht in die Augen springende Bildungsgesetz der Coefficienten der Normal-Gleichungen. Jede derselben enthält einen quadratischen Coefficienten, d. i. einen solchen, welcher eine Summe von Quadraten und daher nothwendig positiv ist; in der ersten, welche durch Differenziation von S nach x entsteht, ist x mit dem quadratischen Coefficienten $[aa]$ versehen, in der zweiten y, u. s. w. Nach diesem Merkmale pflegt man auch die einzelnen Normal-Gleichungen von einander zu unterscheiden und nennt die erste die Normal-Gl. für x, u. s. w. Von dem Gliede mit dem quadratischen Coefficienten in irgend einer Gleichung ausgehend, folgen die übrigen Coefficienten in horizontaler Richtung nach rechts und in verticaler Richtung nach abwärts in derselben Reihenfolge aufeinander, so dass jeder nicht quadratische Coefficient zweimal erscheint, und somit die Anzahl sämmtlicher von einander verschiedenen Summen-Coefficienten, mit Einschluss der absoluten Glieder, bei k Unbekannten $= \frac{1}{2} k(k+3)$ ist.

24. Bevor man an die Auflösung der Glgn. (49) schreitet, kann es wünschenswerth scheinen, die Richtigkeit der Summen-Coefficienten prüfen zu können. Zu diesem Zwecke bilde man die Summen der Coefficienten der einzelnen Bedingungsgleichungen (45):

$$\begin{aligned} a_1 + b_1 + c_1 + d_1 &= s_1, \\ a_2 + b_2 + c_2 + d_2 &= s_2, \\ a_3 + b_3 + c_3 + d_3 &= s_3, \\ &\text{u. s. w.} \end{aligned} \tag{50}$$

Multiplicirt man nun diese Gleichungen der Reihe nach mit n_1, n_2, n_3, ... und addirt die Producte, so folgt:

$$[an]+[bn]+[cn]+[dn]=[sn], \tag{51}$$

d. i. die Summe der absoluten Glieder der Normal-Gleichungen muss gleich $[sn]$ sein.

In gleicher Weise erhält man, wenn man die Glgn. (50) der Reihe nach mit a_1, a_2, a_3, ..., dann mit b_1, b_2, b_3, ... u. s. w. multiplicirt und jedesmal die Producte addirt:

$$\left.\begin{aligned}
&[aa]+[ab]+[ac]+[ad]=[as],\\
&[ab]+[bb]+[bc]+[bd]=[bs],\\
&[ac]+[bc]+[cc]+[cd]=[cs],\\
&[ad]+[bd]+[cd]+[dd]=[ds],
\end{aligned}\right\} \tag{52}$$

welchen Gleichungen die Coefficienten der Unbekannten der einzelnen Gleichungen Genüge leisten müssen. Bildet man also gleichzeitig mit der Berechnung der Coefficienten und absoluten Glieder der Normal-Gleichungen noch die Summen $[sn]$, $[as]$, $[bs]$, $[cs]$, $[ds]$, so werden durch diese sämmtliche Summengrössen der Normal-Gleichungen controlirt.

25. Die Auflösung der Normal-Gleichungen (49) wird am leichtesten mittelst der gewöhnlichen Substitutionsmethode bewerkstelliget, welche, nach den Vorschriften von G a u s s ausgeführt, den Vortheil eines gleichförmigen und durchsichtigen Rechnungsmechanismus gewährt. Die Normal-Gleichungen sind folgende:

$$\left.\begin{aligned}
&[aa]\,x+[ab]\,y+[ac]\,z+[ad]\,w+[an]=0,\\
&[ab]\,x+[bb]\,y+[bc]\,z+[bd]\,w+[bn]=0,\\
&[ac]\,x+[bc]\,y+[cc]\,z+[cd]\,w+[cn]=0,\\
&[ad]\,x+[bd]\,y+[cd]\,z+[dd]\,w+[dn]=0.
\end{aligned}\right\} \tag{53}$$

Multipliciren wir nun die erste dieser Gleichungen successive mit $\frac{[ab]}{[aa]}$, dann mit $\frac{[ac]}{[aa]}$, endlich mit $\frac{[ad]}{[aa]}$, und ziehen die so entstehenden Gleichungen der Reihe nach von der 2$^{\text{ten}}$, 3$^{\text{ten}}$ und 4$^{\text{ten}}$ Gleichung ab, so erhalten wir drei neue Gleichungen:

$$\left\{[bb]-\frac{[ab]}{[aa]}[ab]\right\}y+\left\{[bc]-\frac{[ab]}{[aa]}[ac]\right\}z+\left\{[bd]-\frac{[ab]}{[aa]}[ad]\right\}w+\left\{[bn]-\frac{[ab]}{[aa]}[an]\right\}=0,$$

$$\left\{[bc]-\frac{[ac]}{[aa]}[ab]\right\}y+\left\{[cc]-\frac{[ac]}{[aa]}[ac]\right\}z+\left\{[cd]-\frac{[ac]}{[aa]}[ad]\right\}w+\left\{[cn]-\frac{[ac]}{[aa]}[an]\right\}=0,$$

$$\left\{[bd]-\frac{[ad]}{[aa]}[ab]\right\}y+\left\{[cd]-\frac{[ad]}{[aa]}[ac]\right\}z+\left\{[dd]-\frac{[ad]}{[aa]}[ad]\right\}w+\left\{[dn]-\frac{[ad]}{[aa]}[an]\right\}=0,$$

welche die Unbekannte x nicht mehr enthalten. Führen wir zur Abkürzung für die Coefficienten dieser Gleichungen die folgenden Bezeichnungen ein:

$$
\begin{aligned}
&[bb]-\frac{[ab]}{[aa]}[ab]=[bb.1], \qquad [cc]-\frac{[ac]}{[aa]}[ac]=[cc.1],\\
&[bc]-\frac{[ab]}{[aa]}[ac]=[bc.1], \qquad [cd]-\frac{[ac]}{[aa]}[ad]=[cd.1],\\
&[bd]-\frac{[ab]}{[aa]}[ad]=[bd.1], \qquad [dd]-\frac{[ad]}{[aa]}[ad]=[dd.1],\\
&\qquad [bn]-\frac{[ab]}{[aa]}[an]=[bn.1],\\
&\qquad [cn]-\frac{[ac]}{[aa]}[an]=[cn.1],\\
&\qquad [dn]-\frac{[ad]}{[aa]}[an]=[dn.1],
\end{aligned}
\tag{54}
$$

so erhalten obige Gleichungen folgende mit den Normal-Gleichungen vollkommen symmetrische Form:

$$
\begin{aligned}
&[bb.1]\,y+[bc.1]\,z+[bd.1]\,w+[bn.1]=0,\\
&[bc.1]\,y+[cc.1]\,z+[cd.1]\,w+[cn.1]=0,\\
&[bd.1]\,y+[cd.1]\,z+[dd.1]\,w+[dn.1]=0.
\end{aligned}
\tag{55}
$$

Multiplicirt man abermals die erste dieser Gleichungen mit $\frac{[bc.1]}{[bb.1]}$, dann mit $\frac{[bd.1]}{[bb.1]}$, zieht die so entstehenden Gleichungen von der zweiten und dritten ab, und setzt, wie nun leicht zu übersehen ist:

$$
\begin{aligned}
&[cc.1]-\frac{[bc.1]}{[bb.1]}[bc.1]=[cc.2], \qquad [cn.1]-\frac{[bc.1]}{[bb.1]}[bn.1]=[cn.2],\\
&[cd.1]-\frac{[bc.1]}{[bb.1]}[bd.1]=[cd.2], \qquad [dn.1]-\frac{[bd.1]}{[bb.1]}[bn.1]=[dn.2],\\
&\qquad [dd.1]-\frac{[bd.1]}{[bb.1]}[bd.1]=[dd.2],
\end{aligned}
\tag{56}
$$

so erhält man die Gleichungen:

$$
\begin{aligned}
&[cc.2]\,z+[cd.2]\,w+[cn.2]=0,\\
&[cd.2]\,z+[dd.2]\,w+[dn.2]=0.
\end{aligned}
\tag{57}
$$

Wird endlich die erste dieser Gleichungen mit $\frac{[cd.2]}{[cc.2]}$ multiplicirt, von der zweiten abgezogen, und:

$$
[dd.2]-\frac{[cd.2]}{[cc.2]}[cd.2]=[dd.3], \qquad [dn.2]-\frac{[cd.2]}{[cc.2]}[cn.2]=[dn.3]
\tag{58}
$$

gesetzt, so folgt

$$
[dd.3]\,w+[dn.3]=0,
\tag{59}
$$

welche Gleichung nur mehr die Unbekannte w enthält. Der hieraus gezogene

Werth von w in die 1te der Glgn. (57) substituirt, liefert den Werth von z; die 1te der Glgn. (55) gibt dann y, endlich die 1te der Glgn. (53) den Werth von x. Durch Zusammenstellung dieser Gleichungen ergibt sich daher folgendes System von Gleichungen, aus welchem die wahrscheinlichsten Werthe der Unbekannten hervorgehen:

$$\left.\begin{array}{r} [aa]\,x + [ab]\,y + [ac]\,z + [ad]\,w + [an] = 0, \\ [bb\,.\,1]\,y + [bc\,.\,1]\,z + [bd\,.\,1]\,w + [bn\,.\,1] = 0, \\ [cc\,.\,2]\,z + [cd\,.\,2]\,w + [cn\,.\,2] = 0, \\ [dd\,.\,3]\,w + [dn\,.\,3] = 0. \end{array}\right\} \quad (60)$$

25. Die practische Ausführung des im vorhergehenden vorgetragenen Eliminationsverfahrens kann etwa nach folgendem Schema (siehe Seite 44 und 45) geschehen, in welchem die successive Bildung der Hilfsgrössen $[bb\,.\,1]$, $[bc\,.\,1]$, etc. so wie der Glgn. (60) ersichtlich wird.

Das Schema besteht, wie man sieht, aus vier (gleich der Anzahl der Unbekannten), durch stärkere Linien getrennten Abtheilungen, welche in der ersten Zeile die Coefficienten der vier Normal-Gleichungen, immer vom quadratischen angefangen, enthalten. In der ersten Abtheilung, entsprechend der 1. Normal-Gleichung, setzt man nun unter diese Coefficienten ihre Logarithmen, bildet auf einem Streifen Papier den $\log \frac{[ab]}{[aa]}$, und addirt diesen, den Streifen der Reihe nach über $\log [ab]$, $\log [ac]$, $\log [ad]$ und $\log [an]$ schiebend, zu diesen Logarithmen, wodurch die in der 3. Zeile der 1. Abtheilung befindlichen Logarithmen entstehen; in ähnlicher Weise werden die in der 4. und 5. Zeile stehenden Logarithmen gebildet. Die diesen Logarithmen entsprechenden Zahlen werden nun aufgeschlagen und der Reihe nach in die 2. Zeile der drei folgenden Abtheilungen geschrieben, von den darüber stehenden Coefficienten abgezogen und dadurch die Zahlen der 3. Zeile von $[bb\,.\,1]$ bis $[dn\,.\,1]$ erhalten, welche, wie man sieht, die Coefficienten der Glgn. (55) sind. Mit diesen wird nun wieder in derselben Weise operirt, wie so eben bezüglich der Grössen $[an]$ bis $[dn]$ in der 1. Zeile erklärt worden, wodurch sich die Zahlen $[cc\,.\,2]$ bis $[dn\,.\,2]$ in der 5. Zeile der 3. und 4. Abtheilung ergeben, welche die Coefficienten der Glgn. (57) sind, aus welchen endlich durch Anwendung desselben Verfahrens in Zeile 7 der 4. Abtheilung die Coefficienten der Gl. (59) oder der letzten der Glgn. (60) folgen, unter welche wieder ihre Logarithmen gesetzt werden. Aus letzteren erhält man nun durch Subtraction $\log w$ (wobei das Zeichen von $[dn\,.\,3]$ geändert werden muss, wenn, wie dies bei unseren Gleichungen der Fall ist, diese auf 0 reducirt sind). Die weitere Rechnung, um, durch Substitution nach rückwärts, successive z, y, x zu finden, bedarf wohl keiner weiteren Erklärung und erscheint in obigem Schema unter der Doppellinie der drei ersten Abtheilungen.

$[aa]$	$[ab]$	$[ac]$	$[ad]$	$[an]$	$[bb]$	$[bc]$
$\lg[aa]$	$\lg[ab]$	$\lg[ac]$	$\lg[ad]$	$\lg[an]$	$\frac{[ab]}{[aa]}[ab]$	$\frac{[ab]}{[aa]}[ac]$
	$\lg\frac{[ab]}{[aa]}[ab]$	$\lg\frac{[ab]}{[aa]}[ac]$	$\lg\frac{[ab]}{[aa]}[ad]$	$\lg\frac{[ab]}{[aa]}[an]$		
		$\lg\frac{[ac]}{[aa]}[ac]$	$\lg\frac{[ac]}{[aa]}[ad]$	$\lg\frac{[ac]}{[aa]}[an]$	$[bb.1]$	$[bc.1]$
					$\lg[bb.1]$	$\lg[bc.1]$
			$\lg\frac{[ad]}{[aa]}[ad]$	$\lg\frac{[ad]}{[aa]}[an]$		$\lg\frac{[bc.1]}{[bb.1]}[bc.1]$
	$\lg[ab]\,y$	$\lg[ac]\,z$	$\lg[ad]\,w$	$[ab]\,y$		
				$[ac]\,z$		$\lg[bc.1]\,z$
				$[ad]\,w$		
				$[ab]\,y+[ac]\,z+[ad]w+[an]=S$		
				$\lg(-S)$		
			$x=$	$\lg x=\frac{\lg(-S)}{\lg[aa]}$		

27. Nachdem die wahrscheinlichsten Werthe der Unbekannten berechnet sind, ergeben sich durch Substitution derselben in die Bedingungsgleichungen (46) die übrigbleibenden Fehler v der einzelnen Gleichungen, deren Quadratsumme $[vv]$ ein Minimum ist.

Zu den Gl. (60) kann man übrigens noch auf einem anderen Wege gelangen, welcher zugleich einen leicht zu berechnenden Ausdruck für das Minimum $[vv]$ liefert und hiedurch eine Controle für die Richtigkeit der Elimination darbietet.

Aus den Gleichungen (46) folgt, indem man dieselben quadrirt und addirt:

$$\begin{aligned}[vv]=&(a_1x+b_1y+c_1z+d_1w+n_1)^2\\&+(a_2x+b_2y+c_2z+d_2w+n_2)^2\\&+\text{ u. s. w.,}\end{aligned}\tag{61}$$

oder nach Entwickelung der Quadrate:

$[bd]$	$[bn]$	$[cc]$	$[cd]$	$[cn]$	$[dd]$	$[dn]$
$\frac{[ab]}{[aa]}[ad]$	$\frac{[ab]}{[aa]}[an]$	$\frac{[ac]}{[aa]}[ac]$	$\frac{[ac]}{[aa]}[ad]$	$\frac{[ac]}{[aa]}[an]$	$\frac{[ad]}{[aa]}[ad]$	$\frac{[ad]}{[aa]}[an]$
$[bd.1]$	$[bn.1]$	$[cc.1]$	$[cd.1]$	$[cn.1]$	$[dd.1]$	$[dn.1]$
$\lg [bd.1]$	$\lg [bn.1]$	$\frac{[bc.1]}{[bb.1]}[bc.1]$	$\frac{[bc.1]}{[bb.1]}[bd.1]$	$\frac{[bc.1]}{[bb.1]}[bn.1]$	$\frac{[bd.1]}{[bb.1]}[bd.1]$	$\frac{[bd.1]}{[bb.1]}[bn.1]$
$\lg \frac{[bc.1]}{[bb.1]}[bd.1]$	$\lg \frac{[bc.1]}{[bb.1]}[bn.1]$	$[cc.2]$	$[cd.2]$	$[cn.2]$	$[dd.2]$	$[dn.2]$
$\lg \frac{[bd.1]}{[bb.1]}[bd.1]$	$\lg \frac{[bd.1]}{[bb.1]}[bn.1]$	$\lg [cc.2]$	$\lg [cd.2]$	$\lg [cn.2]$	$\frac{[cd.2]}{[cc.2]}[cd.2]$	$\frac{[cd.2]}{[cc.2]}[cn.2]$
			$\lg \frac{[cd.2]}{[cc.2]}[cd.2]$	$\lg \frac{[cd.2]}{[cc.2]}[cn.2]$	$[dd.3]$	$[dn.3]$
$\lg [bd.1]\, w$	$[bc.1]\, z$		$\lg [cd.2]\, w$	$[cd.2]\, w$	$\lg [dd.3]$	$\lg [dn.3]$
	$[bd.1]\, w$			$[cd.2]w + [cn.2] = S$		
	$[bc.1]z + [bd.1]w + [bn.1] = S$					
	$\lg(-S)$			$\lg(-S)$	$\lg w = \lg\left\{-\frac{[dn.3]}{[dd.3]}\right\}$	
$y =$	$\lg y = \frac{\lg(-S)}{\lg [bb.1]}$		$z =$	$\lg z = \frac{\lg(-S)}{\lg [cc.2]}$	$w =$	

$$\begin{aligned}[vv] = [aa]\,x^2 + [bb]\,y^2 + [cc]\,z^2 + [dd]w^2 + [nn] \\ + 2[ab]xy + 2[ac]xz + 2[ad]xw + 2[an]x \\ + 2[bc]\,yz + 2[bd]yw + 2[bn]y \\ + 2[cd]zw + 2[cn]z \\ + 2[dn]w,\end{aligned} \tag{62}$$

welcher Ausdruck offenbar die Summe der Fehlerquadrate für ein beliebiges System von Werthen der Unbekannten gibt. Bringen wir nun diesen Ausdruck auf folgende Form:

$$\begin{aligned}[vv] = (\alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z + \alpha_4 w + \alpha_5)^2 + (\beta_1 y + \beta_2 z + \beta_3 w + \beta_4)^2 \\ + (\gamma_1 z + \gamma_2 w + \gamma_3)^2 + (\delta_1 w + \delta_2)^2 + \varepsilon^2,\end{aligned} \tag{k}$$

welche gleichfalls, so wie jene (61), aus einer Summe von Quadraten besteht, jedoch mit dem Unterschiede, dass jedes folgende um eine Unbekannte weniger enthält als das vorhergehende.

Entwickeln wir zu diesem Zwecke in (k) die Quadrate und setzen die Coefficienten der gleichnamigen Potenzen und Producte in beiden Ausdrücken

(62) und (k) einander gleich, so erhalten wir zur Bestimmung der Coefficienten α, β, γ, etc. folgende Gleichungen:

$$\alpha_1^2 = [aa];\ \alpha_1\alpha_2 = [ab];\ \alpha_1\alpha_3 = [ac];\ [\alpha_1\alpha_4] = [ad];\ \alpha_1\alpha_5 = [an] \quad (m)$$

$$\alpha_2^2 + \beta_1^2 = [bb];\ \alpha_2\alpha_3 + \beta_1\beta_2 = [bc];\ \alpha_2\alpha_4 + \beta_1\beta_3 = [bd];\ a_2\alpha_5 + \beta_1\beta_4 = [bn] \quad (n)$$

$$\alpha_3^2 + \beta_2^2 + \gamma_1^2 = [cc];\ \alpha_3\alpha_4 + \beta_2\beta_3 + \gamma_1\gamma_2 = [cd];\ \alpha_3\alpha_5 + \beta_2\beta_4 + \gamma_1\gamma_3 = [cn] \quad (p)$$

$$\alpha_4^2 + \beta_3^2 + \gamma_2^2 + \delta_1^2 = [dd];\ \alpha_4\alpha_5 + \beta_3\beta_4 + \gamma_2\gamma_3 + \delta_1\delta_2 = [dn] \quad (q)$$

$$\alpha_5^2 + \beta_4^2 + \gamma_3^2 + \delta_2^2 + \varepsilon^2 = [nn] \quad (r)$$

Es folgt nun aus den Glgn. (m):

$$\alpha_1^2 = [aa],\ \alpha_2^2 = \frac{[ab]^2}{[aa]},\ \alpha_3^2 = \frac{[ac]^2}{[aa]},\ \alpha_4^2 = \frac{[ad]^2}{[aa]},\ \alpha_5^2 = \frac{[an]^2}{[aa]}.$$

Hiemit erhält man aus den Glgn. (n), mit Rücksicht auf die Glgn. (54):

$$\beta_1^2 = [bb.1],\ \beta_2^2 = \frac{[bc.1]^2}{[bb.1]},\ \beta_3^2 = \frac{[bd.1]^2}{[bb.1]},\ \beta_4^2 = \frac{[bn.1]^2}{[bb.1]};$$

ferner aus den Glgn. (p) mit Zuziehung der (54) und (56):

$$\gamma_1^2 = [cc.2],\ \gamma_2^2 = \frac{[cd.2]^2}{[cc.2]},\ \gamma_3^2 = \frac{[cn.2]^2}{[cc.2]};$$

aus den Glgn. (q) mit Rücksicht auf (54), (56) und (58):

$$\delta_1^2 = [dd.3],\ \delta_2^2 = \frac{[dn.3]^2}{[dd.3]},$$

endlich aus Gl. (r):

$$\varepsilon^2 = [nn] - \frac{[an]^2}{[aa]} - \frac{[bn.1]^2}{[bb.1]} - \frac{[cn.2]}{[cc.2]} - \frac{[dn.3]^2}{[dd.3]}.$$

Führt man noch die folgenden Hilfsgrössen ein:

$$\left.\begin{aligned} [nn.1] &= [nn] - \frac{[an]^2}{[aa]}, \\ [nn.2] &= [nn.1] - \frac{[bn.1]^2}{[bb.1]}, \\ [nn.3] &= [nn.2] - \frac{[cn.2]^2}{[cc.2]}, \\ [nn.4] &= [nn.3] - \frac{[dn.3]^2}{[dd.3]}, \end{aligned}\right\} \quad (63)$$

so wird $\varepsilon^2 = [nn.4]$.

Substituirt man nun die erhaltenen Werthe der Coefficienten α, β, etc. in den Ausdruck (k), so erhält man:

$$[vv] = \frac{\{[aa]\,x + [ab]\,y + [ac]\,z + [ad]\,w + [an]\}^2}{[aa]}$$
$$+ \frac{\{[bb.1]\,y + [bc.1]\,z + [bd.1]\,w + [bn.1]\}^2}{[bb.1]} \tag{64}$$
$$+ \frac{\{[cc.2]\,z + [cd.2]\,w + [cn.2]\}^2}{[cc.2]}$$
$$+ \frac{\{[dd.3]\,w + [dn.3]\}^2}{[dd.3]},$$
$$+ [nn.4],$$

oder, wenn man die in den Zählern der Brüche erscheinenden Polynome mit A, B, C, D bezeichnet:

$$[vv] = \frac{A^2}{[aa]} + \frac{B^2}{[bb.1]} + \frac{C^2}{[cc.2]} + \frac{D^2}{[dd.3]} + [nn.4]. \tag{65}$$

In diesem Ausdrucke sind nun alle Nenner rechter Hand, somit die Brüche selbst wesentlich positive Grössen. Von $[aa]$, als einer Summe von Quadraten ist dies selbstverständlich. Um die gleiche Eigenschaft zunächst für $[bb.1]$ nachzuweisen, wollen wir, da die Gleichung (64) für beliebige Werthe der Unbekannten gilt, für x den aus der Gleichung $A = 0$ folgenden Werth:

$$x = -\frac{[ab]}{[aa]}\,y - \frac{[ac]}{[aa]}\,z - \frac{[ad]}{[aa]}\,w - \frac{[an]}{[aa]}$$

substituiren; hiedurch verschwindet die erste Zeile rechter Hand in (64), die folgenden bleiben unverändert, da sie x nicht enthalten. Zu demselben Resultate müssen wir aber auch gelangen, wenn wir, vor Ausführung der eben bewerkstelligten Umformung des Ausdruckes (61) in jenen (64), den obigen Werth von x sofort in die Glgn. (46) einführen, und erst hiernach dieselbe Umformung vornehmen. Substituiren wir also diesen Werth von x in die Gleichungen (46), so werden diese:

$$v_1 = b_1'y + c_1'z + d_1'w + n_1',$$
$$v_2 = b_2'y + c_2'z + d_3'w + n_2',$$

u. s. w.,

wenn der Kürze wegen:

$$b_1' = b_1 - a_1\frac{[ab]}{[aa]}, \quad c_1' = c_1 - a_1\frac{[ac]}{[aa]}, \quad d_1' = d_1 - a_1\frac{[ad]}{[aa]},$$
$$b_2' = b_2 - a_2\frac{[ab]}{[aa]}, \quad c_2' = c_2 - a_2\frac{[ac]}{[aa]}, \quad d_2' = d_2 - a_2\frac{[ad]}{[aa]},$$

u. s. w.

gesetzt wird. Aus diesen Gleichungen erhalten wir nun:

$$[vv] = (b_1'y + c_1'z + d_1'w + n_1')^2$$
$$+ (b_2'y + c_2'z + d_2'w + n_2')^2$$

u. s. w.,

welche Summe von Quadraten sich wieder, in derselben Weise wie (61), auf die Form (64) bringen lässt, wodurch wir erhalten:

$$[vv] = \frac{\{[b'b']\,y + [b'c']\,z + [b'd']\,w + [b'n']\}^2}{[b'b']}$$
$$+ \frac{\{[c'c'.1]\,z + [c'd'.1]\,w + [c'n'.1]\}^2}{[c'c'.1]}$$
$$+ \frac{\{[d'd'.2]\,w + [d'n'.2]\}^2}{[d'd'.2]}$$
$$+ [n'n'.4].$$

Dieser Ausdruck muss nun, wie schon oben bemerkt, für jeden Werth von y, z, w identisch sein mit jenem (64), wenn wir in letzterem den aus $A=0$ folgenden Werth von x substituiren, d. i. die erste Zeile rechter Hand weglassen. Hiezu wird aber erfordert, dass die Coefficienten der gleichnamigen Potenzen und Producte der Unbekannten y, z, w in beiden Ausdrücken identisch gleich seien; hieraus folgt also, da y^2 nur einmal in jedem Ausdrucke erscheint: $[bb.1] = [b'b']$, d. i. gleich einer Summe von Quadraten, also wesentlich positiv. Ganz in gleicher Weise lässt sich diese Eigenschaft für $[cc.2]$ nachweisen, indem man die aus $A=0$ und $B=0$ folgenden Werthe von x und y substituirt, und ähnlich für $[dd.3]$.

Sind aber die Glieder rechter Hand in (64) wesentlich positiv, so ist klar, dass der kleinste Werth von $[vv]$ nur dadurch erhalten wird, dass wir

$$A=0,\quad B=0,\quad C=0,\quad D=0$$

setzen, aus welchen Gleichungen daher die wahrscheinlichsten Werthe der Unbekannten hervorgehen müssen, welche $[vv]$ zu einem Minimum machen. Diese Gleichungen sind aber, wie man aus der Bedeutung der Buchstaben A, B, C, D ersieht, identisch mit den Glgn. (60) in §. 24.

Für diese Werthe der Unbekannten gibt aber dann die Gl. (64):

$$[vv] = [nn.4]\,, \tag{66}$$

woraus erhellt, dass die Grösse $[nn.4]$ die Quadratsumme der nach den wahrscheinlichsten Werthen der Unbekannten übrig bleibenden Fehler darstellt. Hat man daher die v durch Substitution der wahrscheinlichsten Werthe in die Bedingungsgleichungen erhalten, und aus denselben $[vv]$ gebildet, so muss der so erhaltene Werth, so genau als es die angewendeten Logarithmen gestatten, mit $[nn.4]$, welche Grösse mittelst der Glgn. (63) leicht berechnet werden kann, übereinstimmen, wodurch die ganze Rechnung, von den Glgn. (46) angefangen controlirt wird.

28. Die vorhergehenden Betrachtungen setzen uns nun auch in den Stand, den m i t t l e r e n F e h l e r einer Bedingungsgleichung, d. i. der Beobachtungen n_1, n_2, n_3, ... n_m zu finden, welcher zugleich der mittlere Fehler der Gewichtseinheit ist, da wir die Glgn. (45), im Falle sie von verschiedener

Genauigkeit sind, durch Multiplication mit der Quadratwurzel aus ihren respectiven Gewichten auf gleiche Genauigkeit, und zwar jene der Gewichtseinheit reducirt, vorausgesetzt haben.

Bezeichnen wir diesen mittleren Fehler mit ε; ferner mit $\Delta_1, \Delta_2, \ldots \Delta_m$ die wahren Fehler der Bedingungsgleichungen oder der Grössen $n_1, n_2, \ldots n_m$ d. i. diejenigen Werthe, welche die v erhalten, wenn wir in (46) für x, y, z, w die wahren Werthe der Unbekannten substituiren, so ist, wenn m die Anzahl der Bedingungsgleichungen oder der Fehler bedeutet, vermöge des Begriffes des mittleren Fehlers:

$$m\varepsilon^2 = [\Delta\Delta]. \tag{67}$$

Da aber die Δ unbekannt sind, so müssen wir die Grösse $[\Delta\Delta]$ auf eine Form zu bringen suchen, welche einen Schluss auf ihren wahrscheinlichsten Werth zulässt. Eine solche bietet aber die Gl. (64) oder (65) unmittelbar dar, welche, wie wir wissen, die Summe der Fehlerquadrate für ein beliebiges System von Werthen der Unbekannten darstellt; substituiren wir in dieser Gleichung für x, y, z, w die wahren Werthe der Unbekannten, so geht $[vv]$ in $[\Delta\Delta]$ über. Bezeichnen wir also im Folgenden mit x_0, y_0, z_0, w_0 die wahrscheinlichsten aus den Glgn. (60) hervorgehenden Werthe der Unbekannten, mit

$$x_0+\xi, \quad y_0+\eta, \quad z_0+\zeta, \quad w_0+\varphi$$

die wahren Werthe derselben, so erhalten wir durch Substitution der letzteren in die Gl. (64):

$$[\Delta\Delta] = [nn.4] + \frac{A'^2}{[aa]} + \frac{B'^2}{[bb.1]} + \frac{C'^2}{[cc.2]} + \frac{D'^2}{[dd.3]}, \tag{68}$$

wo

$$\begin{aligned}
A' &= [aa](x_0+\xi) + [ab](y_0+\eta) + [ac](z_0+\zeta) + [ad](w_0+\varphi) + [an], \\
B' &= [bb.1](y_0+\eta) + [bc.1](z_0+\zeta) + [bd.1](w_0+\varphi) + [bn.1], \\
C' &= [cc.2](z_0+\zeta) + [cd.2](w_0+\varphi) + [cn.2], \\
D' &= [dd.3](w_0+\varphi) + [dn.3],
\end{aligned} \tag{69}$$

und $[nn.4] = [vv]$ das bekannte Minimum der Fehlerquadratsumme ist. Mit Rücksicht auf die Glgn. (60), welchen die wahrscheinlichsten Werthe x_0, y_0, z_0, w_0 Genüge leisten, folgt übrigens aus (69) auch:

$$\begin{aligned}
A' &= [aa]\xi + [ab]\eta + [ac]\zeta + [ad]\varphi, \\
B' &= [bb.1]\eta + [bc.1]\zeta + [bd.1]\varphi, \\
C' &= [cc.2]\zeta + [cd.2]\varphi, \\
D' &= [dd.3]\varphi,
\end{aligned}$$

woraus deutlich erhellt, dass A', B', C', D' kleine Grössen sind von der Ordnung der Abweichungen ξ, η, etc. der wahrscheinlichsten Werthe von den wahren, und dass wir Null als wahrscheinlichsten Werth derselben zu betrachten haben, weil eben 0 der wahrscheinlichste Werth der Grössen $\xi, \eta, \zeta, \varphi$ ist.

Aus Gl. (68) folgt nun, dass, da die auf $[nn.4]=[vv]$ folgenden Glieder, deren Anzahl nothwendig gleich jener der Unbekannten ist, wesentlich positiv sind, $[\varDelta\varDelta]$ immer grösser ist als $[vv]$, wie natürlich, weil $[vv]$ ein Minimum ist. Da wir nun von den Grössen A', B', C', D' nur wissen, dass ihr wahrscheinlichster Werth $=0$ ist, so werden wir uns, in Ermanglung der Kenntniss ihres wahren, jedenfalls von 0 verschiedenen Werthes, der Wahrheit so weit nähern, als es die Umstände erlauben, wenn wir für diese Grössen die mittleren Fehler derselben setzen.

Da nun in den Glgn. (69) nur das letzte die beobachteten Grössen n enthaltende Glied Fehlern unterworfen ist, so ist klar, dass die mittleren Fehler von A', B', C', D' beziehungsweise mit jenen von $[an]$, $[bn.1]$, $[cn.2]$, $[dn.3]$ übereinstimmen müssen.

Es ist aber $[an]=a_1n_1+a_2n_2+\ldots+a_mn_m$, und ε der mittlere Fehler der Grössen n_1, n_2, u. s. w., somit vermöge der Gl. (42), der mittlere Fehler von $[an]$:

$$=\varepsilon\sqrt{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_m^2}=\varepsilon\sqrt{[aa]}.$$

Ferner ist:

$$[bn.1]=[bn]-\frac{[ab]}{[aa]}[an]=b_1n_1+b_2n_2+b_3n_3+\ldots$$

$$-\frac{[ab]}{[aa]}a_1n_1-\frac{[ab]}{[aa]}a_2n_2-\frac{[ab]}{[aa]}a_3n_3-\ldots$$

$$=\left(b_1-\frac{[ab]}{[aa]}a_1\right)n_1+\left(b_2-\frac{[ab]}{[aa]}a_2\right)n_2+\ldots,$$

folglich der mittlere Fehler von $[bn.1]$:

$$=\varepsilon\sqrt{\left(b_1-\frac{[ab]}{[aa]}a_1\right)^2+\left(b_2-\frac{[ab]}{[aa]}a_2\right)^2+\ldots};$$

entwickelt man aber die Quadrate unter dem Wurzelzeichen, so erhält man als Summe derselben:

$$[bb]-2\frac{[ab]}{[aa]}[ab]+\frac{[ab]^2}{[aa]^2}[aa]^2=[bb]-\frac{[ab]^2}{[aa]}=[bb.1],$$

folglich $\varepsilon\sqrt{[bb.1]}$ als mittleren Fehler von $[bn.1]$.

Auf dieselbe Weise findet man:

$\varepsilon\sqrt{[cc.2]}$ als mittleren Fehler von $[cn.2]$,

$\varepsilon\sqrt{[dd.3]}$ als mittleren Fehler von $[dn.3]$.

Substituirt man nun diese Werthe der mittleren Fehler für A', B', C', D' in Gl. (68), und setzt zugleich, vermöge (67), $m\varepsilon^2$ für $[\varDelta\varDelta]$, so hat man:

$$m\varepsilon^2=[vv]+\varepsilon^2+\varepsilon^2+\varepsilon^2+\varepsilon^2,$$

wo die Anzahl der auf $[vv]$ folgenden ε^2 nothwendig gleich jener der Unbekannten ist. In unserem Falle wird daher

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{[vv]}{m-4}}, \tag{70}$$

und allgemein bei k Unbekannten:

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{[vv]}{m-k}}, \tag{71}$$

womit der mittlere Fehler der Gewichtseinheit, oder der Bedingungsgleichungen bestimmt ist. Durch Multiplication desselben mit 0.67449 ergibt sich sodann der wahrscheinliche Fehler.

29. Es erübrigt nun noch die Bestimmung der mittleren Fehler der aus den Normal-Gleichungen erhaltenen wahrscheinlichsten Werthe der Unbekannten. Bezeichnen wir die mittleren Fehler dieser Werthe mit ε_x, ε_y, ε_z, ε_w, mit p_x, p_y, p_z, p_w die Gewichte derselben, mit ε den durch Gl. (71) gegebenen Werth des mittleren Fehlers der Gewichtseinheit, so ist, da sich die Gewichte wie verkehrt die Quadrate der mittleren Fehler verhalten:

$$\varepsilon_x = \frac{\varepsilon}{\sqrt{p_x}}, \quad \varepsilon_y = \frac{\varepsilon}{\sqrt{p_y}}, \quad \varepsilon_z = \frac{\varepsilon}{\sqrt{p_z}}, \quad \varepsilon_w = \frac{\varepsilon}{\sqrt{p_w}}, \tag{72}$$

und wir haben uns demnach noch mit der Bestimmung der Gewichte p_x, p_y, u. s. w. zu beschäftigen.

Kehren wir zu diesem Zwecke wieder zu den Normal-Gleichungen (49) zurück, aus welchen die wahrscheinlichsten Werthe der Unbekannten, welche wieder mit x_0, y_0, z_0, w_0 bezeichnet werden mögen, hervorgehen; sie sind folgende:

$$\begin{aligned}
&[aa]\,x_0 + [ab]\,y_0 + [ac]\,z_0 + [ad]\,w_0 + [an] = 0, \\
&[ab]\,x_0 + [bb]\,y_0 + [bc]\,z_0 + [bd]\,w_0 + [bn] = 0, \\
&[ac]\,x_0 + [bc]\,y_0 + [cc]\,z_0 + [cd]\,w_0 + [cn] = 0, \\
&[ad]\,x_0 + [bd]\,y_0 + [cd]\,z_0 + [dd]\,w_0 + [dn] = 0.
\end{aligned} \tag{73}$$

Denken wir uns diese Gleichungen aufgelöst, jedoch in der Art, dass wir in den Summen: $[an] = a_1 n_1 + a_2 n_2 + \ldots$, u. s. w., die Buchstabengrössen n_1, n_2, etc. beibehalten, so erhalten wir offenbar die Unbekannten als lineare Functionen der Grössen n_1, n_2, n_3, ..., in der Form:

$$\begin{aligned}
&x_0 + \alpha_1 n_1 + \alpha_2 n_2 + \alpha_3 n_3 + \ldots + \alpha_m n_m = 0, \\
&y_0 + \beta_1 n_1 + \beta_2 n_2 + \beta_3 n_3 + \ldots + \beta_m n_m = 0, \\
&z_0 + \gamma_1 n_1 + \gamma_2 n_2 + \gamma_3 n_3 + \ldots + \gamma_m n_m = 0, \\
&w_0 + \delta_1 n_1 + \delta_2 n_2 + \delta_3 n_3 + \ldots + \delta_m n_m = 0,
\end{aligned} \tag{74}$$

wo die Zahlenwerthe der Coefficienten α, β, γ, δ durch die Auflösung selbst bekannt werden, falls letztere in dieser Art vollzogen würde. In dieser Form erscheint nun jede Unbekannte unmittelbar durch die beobachteten Grössen

$n_1, n_2, n_3, \ldots$ dargestellt, und da der mittlere Fehler der letzteren $= \varepsilon$ ist, so hat man sofort, vermöge Gl. (42), §. 19:

$$\varepsilon_x = \varepsilon\sqrt{[\alpha\alpha]}, \quad \varepsilon_y = \varepsilon\sqrt{[\beta\beta]}, \quad \varepsilon_z = \varepsilon\sqrt{[\gamma\gamma]}, \quad \varepsilon_w = \varepsilon\sqrt{[\delta\delta]},$$

und

$$p_x = \frac{1}{[\alpha\alpha]}, \quad p_y = \frac{1}{[\beta\beta]}, \quad p_z = \frac{1}{[\gamma\gamma]}, \quad p_w = \frac{1}{[\delta\delta]}. \tag{75}$$

Die Bestimmung der einzelnen Grössen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \beta_1, \beta_2, \ldots$ u. s. w. wäre sehr umständlich und ist unnöthig, da man nur die Summen $[\alpha\alpha]$, $[\beta\beta]$, etc. braucht, zu welchen man auf verschiedenen Wegen gelangen kann.

30. 1. Methode. Wenden wir zur Auflösung der Glgn. (73) die Methode der unbestimmten Multiplicatoren an; multipliciren wir zu diesem Zwecke die Gleichungen mit Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, und addiren die Producte, so haben wir, um x_0 zu bestimmen, in der Summe den Coefficienten von x_0 gleich 1, jene der übrigen Unbekannten $= 0$ zu setzen; wir erhalten hiedurch zur Bestimmung der Multiplicatoren Q die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
[aa]\,Q_1 + [ab]\,Q_2 + [ac]\,Q_3 + [ad]\,Q_4 &= 1, \\
[ab]\,Q_1 + [bb]\,Q_2 + [bc]\,Q_3 + [bd]\,Q_4 &= 0, \\
[ac]\,Q_1 + [bc]\,Q_2 + [cc]\,Q_3 + [cd]\,Q_4 &= 0, \\
[ad]\,Q_1 + [bd]\,Q_2 + [cd]\,Q_3 + [dd]\,Q_4 &= 0,
\end{aligned}\right\} \tag{76}$$

und zur Bestimmung von x_0:

$$x_0 + [an]\,Q_1 + [bn]\,Q_2 + [cn]\,Q_3 + [dn]\,Q_4 = 0. \tag{77}$$

Da nun aus den Glgn. (73) dieselben Werthe der Unbekannten sich ergeben, gleichgiltig welches Eliminationsverfahren auch angewendet werden mag, so muss aus (77) und der ersten der Glgn. (74) derselbe Werth von x_0 folgen, somit die Gleichung bestehen:

$$\alpha_1 n_1 + \alpha_2 n_2 + \cdots + \alpha_m n_m = [an]\,Q_1 + [bn]\,Q_2 + [cn]\,Q_3 + [dn]\,Q_4,$$

und zwar identisch für beliebige Werthe der Grössen n_1, n_2, u. s. w. Löst man daher im zweiten Theile die Summen auf, und setzt die Coefficienten von n_1, n_2, u. s. w. einander gleich, so erhält man:

$$\left.\begin{aligned}
\alpha_1 &= a_1\,Q_1 + b_1\,Q_2 + c_1\,Q_3 + d_1\,Q_4, \\
\alpha_2 &= a_2\,Q_1 + b_2\,Q_2 + c_2\,Q_3 + d_2\,Q_4, \\
&\vdots \\
\alpha_m &= a_m Q_1 + b_m Q_2 + c_m Q_3 + d_m Q_4.
\end{aligned}\right\} \tag{78}$$

Multiplicirt man nun diese Gleichungen der Reihe nach mit $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$, und addirt die Producte, so kommt:

$$[\alpha\alpha] = [a\alpha]\,Q_1 + [b\alpha]\,Q_2 + [c\alpha]\,Q_3 + [d\alpha]\,Q_4. \tag{79}$$

Multiplicirt man aber die Glgn. (78) zuerst mit $a_1, a_2, \ldots a_m$, dann mit $b_1, b_2, \ldots b_m$, mit $c_1, c_2, \ldots c_m$, endlich mit $d_1, d_2, \ldots d_m$ und addirt jedesmal die Producte, so erhält man:

$$
\begin{aligned}
[a\alpha] &= [aa]\,Q_1 + [ab]\,Q_2 + [ac]\,Q_3 + [ad]\,Q_4\,,\\
[b\alpha] &= [ab]\,Q_1 + [bb]\,Q_2 + [bc]\,Q_3 + [bd]\,Q_4\,,\\
[c\alpha] &= [ac]\,Q_1 + [bc]\,Q_2 + [cc]\,Q_3 + [cd]\,Q_4\,,\\
[d\alpha] &= [ad]\,Q_1 + [bd]\,Q_2 + [cd]\,Q_3 + [dd]\,Q_4\,,
\end{aligned}
$$

und aus der Vergleichung dieser Gleichungen mit jenen (76) folgt sofort:

$$[a\alpha] = 1\,,\ [b\alpha] = 0\,,\ [c\alpha] = 0\,,\ [d\alpha] = 0. \tag{80}$$

Hiemit gibt nun Gl. (79):

$$[\alpha\alpha] = Q_1\,,\ \text{folglich ist}\ p_x = \frac{1}{[\alpha\alpha]} = \frac{1}{Q_1}. \tag{81}$$

Betrachtet man nun die Glgn. (76), welche die Grössen Q geben, so sieht man, dass sie sich, abgesehen von der Bezeichnung der Unbekannten, nur dadurch von den Normal-Gleichungen unterscheiden, dass an die Stelle des absoluten Gliedes, in der Normal-Gleichung für x: -1, in den übrigen Gleichungen aber 0 getreten ist. Hieraus folgt also der Satz:

Um das Gewicht von x_0 zu finden, setze man in der (auf 0 reducirten) Normal-Gleichung von x an die Stelle des absoluten Gliedes -1, in den übrigen Normal-Gleichungen aber 0; der aus den so modificirten Gleichungen (man kann sie Gewichtsgleichungen nennen) folgende Werth von x ist der reciproke Werth des Gewichtes von x_0.

Man sieht nun leicht, dass dieselbe Analyse für jede der übrigen Unbekannten ausgeführt werden kann. Man hat auf diese Art zur Bestimmung der Gewichte von y_0, z_0, w_0 noch folgende drei Systeme von Gleichungen:

$$
\begin{aligned}
[aa]\,Q_1' + [ab]\,Q_2' + [ac]\,Q_3' + [ad]\,Q_4' &= 0\,,\\
[ab]\,Q_1' + [bb]\,Q_2' + [bc]\,Q_3' + [bd]\,Q_4' &= 1\,,\\
[ac]\,Q_1' + [bc]\,Q_2' + [cc]\,Q_3' + [cd]\,Q_4' &= 0\,,\\
[ad]\,Q_1' + [bd]\,Q_2' + [cd]\,Q_3' + [dd]\,Q_4' &= 0\,,
\end{aligned} \tag{82}
$$

$$p_y = \frac{1}{[\beta\beta]} = \frac{1}{Q_2'}.$$

$$
\begin{aligned}
[aa]\,Q_1'' + [ab]\,Q_2'' + [ac]\,Q_3'' + [ad]\,Q_4'' &= 0\,,\\
[ab]\,Q_1'' + [bb]\,Q_2'' + [bc]\,Q_3'' + [bd]\,Q_4'' &= 0\,,\\
[ac]\,Q_1'' + [bc]\,Q_2'' + [cc]\,Q_3'' + [cd]\,Q_4'' &= 1\,,\\
[ad]\,Q_1'' + [bd]\,Q_2'' + [cd]\,Q_3'' + [dd]\,Q_4'' &= 0\,,
\end{aligned} \tag{83}
$$

$$p_z = \frac{1}{[\gamma\gamma]} = \frac{1}{Q_3''}.$$

$$
\begin{aligned}
[aa]\,Q_1''' + [ab]\,Q_2''' + [ac]\,Q_3''' + [ad]\,Q_4''' &= 0\,,\\
[ab]\,Q_1''' + [bb]\,Q_2''' + [bc]\,Q_3''' + [bd]\,Q_4''' &= 0\,,\\
[ac]\,Q_1''' + [bc]\,Q_2''' + [cc]\,Q_3''' + [cd]\,Q_4''' &= 0\,,\\
[ad]\,Q_1''' + [bd]\,Q_2''' + [cd]\,Q_3''' + [dd]\,Q_4''' &= 1\,,
\end{aligned} \tag{84}
$$

$$p_w = \frac{1}{[\delta\delta]} = \frac{1}{Q_4'''}.$$

Es seien z. B., im Falle zweier Unbekannten, die Normal-Gleichungen gegeben:

$$7x + 4y - 12 = 0, \quad 4x + 5y + 3 = 0;$$

man findet hieraus die Werthe:

$$x = 3\tfrac{15}{19}, \quad y = -3\tfrac{12}{19},$$

und hat zur Bestimmung ihrer Gewichte folgende Gleichungen:

für x: $7x + 4y - 1 = 0, \quad 4x + 5y = 0,$

hieraus $x = \frac{5}{19}$, somit $p_x = \frac{19}{5}$;

für y: $7x + 4y = 0, \quad 4x + 5y - 1 = 0,$

hieraus $y = \frac{7}{19}$, somit $p_y = \frac{19}{7}$.

31. Die Bestimmung der Werthe von Q_1, Q_2', Q_3'', Q_4''', welche allein zur Gewichtsbestimmung benöthiget werden, aus den vier Systemen von Gleichungen (76), (82), (83), (84) ist, bei Anwendung des in §. 25 dargestellten Eliminationsverfahrens, nicht so umständlich, als es auf den ersten Blick scheinen möchte. Da nämlich dieselben nur in den absoluten Gliedern sich von den Normal-Gleichungen unterscheiden, so ist klar, dass bei dem Schema in §. 25 nur die 4 letzten Spalten in den 4 Abtheilungen sich ändern, welche die Rechnung für die absoluten Glieder der Gleichungen enthalten, indem alles übrige ungeändert bleibt, und wobei überdies diese Rechnung durch den Umstand vereinfacht wird, dass die absoluten Glieder der Gewichtsgleichungen, bis auf eines, $= 0$ sind. Uebrigens ist einleuchtend, dass hiebei auch ohne viele Mühe die Werthe der übrigen Q erhalten werden können, welche nicht selten zu anderen Zwecken benöthiget werden. Hiebei ist es nun wesentlich, zu bemerken, dass diese Q nicht sämmtlich von einander verschieden sind, wie sich sogleich zeigt, wenn die Entwickelung, welche wir oben in Bezug auf die Unbekannte x_0 nur in so weit, als es die Bestimmung ihres Gewichtes erforderte, vorgenommen haben, vollständig, und auch für die übrigen Unbekannten ausgeführt wird. Zu den Glgn. (78) treten dann offenbar die analogen:

$$\beta_1 = a_1 Q_1' + b_1 Q_2' + c_1 Q_3' + d_1 Q_4',$$
$$\beta_2 = a_2 Q_1' + b_2 Q_2' + c_2 Q_3' + d_2 Q_4',$$
u. s. w.;

$$\gamma_1 = a_1 Q_1'' + b_1 Q_2'' + c_1 Q_3'' + d_1 Q_4'',$$
$$\gamma_2 = a_2 Q_1'' + b_2 Q_2'' + c_2 Q_3'' + d_2 Q_4'',$$
u. s. w.;

$$\delta_1 = a_1 Q_1''' + b_1 Q_2''' + c_1 Q_3''' + d_1 Q_4''',$$
$$\delta_2 = a_2 Q_1''' + b_2 Q_2''' + c_2 Q_3''' + d_2 Q_4''',$$
u. s. w.

Aus diesen vier Systemen von Gleichungen erhält man nun, indem man jedes derselben der Reihe nach mit a_1, a_2, ...; b_1, b_2, ...; u. s. w. multiplicirt und addirt, mit Rücksicht auf die Glgn. (76), (82), (83) und (84) die Relationen:

$$\begin{array}{llll} [a\alpha]=1, & [b\alpha]=0, & [c\alpha]=0, & [d\alpha]=0, \\ [a\beta]=0, & [b\beta]=1, & [c\beta]=0, & [d\beta]=0, \\ [a\gamma]=0, & [b\gamma]=0, & [c\gamma]=1, & [d\gamma]=0, \\ [a\delta]=0, & [b\delta]=0, & [c\delta]=0, & [d\delta]=1, \end{array} \tag{85}$$

von welchen die in erster Zeile stehenden die bereits oben [Gl. (80)] entwickelten sind.

Multiplicirt man aber dieselben vier Systeme von Gleichungen mit $\alpha_1, \alpha_2, \ldots; \beta_1, \beta_2, \ldots;$ u. s. w., und addirt dieselben, so folgt mit Rücksicht auf die Glgn. (85):

$$\begin{array}{llll} Q_1 \;\;=[\alpha\alpha], & Q_2 \;\;=[\alpha\beta], & Q_3 \;\;=[\alpha\gamma], & Q_4 \;\;=[\alpha\delta], \\ Q_1' \;=[\alpha\beta], & Q_2' \;=[\beta\beta], & Q_3' \;=[\beta\gamma], & Q_4' \;=[\beta\delta], \\ Q_1'' =[\alpha\gamma], & Q_2'' =[\beta\gamma], & Q_3'' =[\gamma\gamma], & Q_4'' =[\gamma\delta], \\ Q_1'''=[\alpha\delta], & Q_2'''=[\beta\delta], & Q_3'''=[\gamma\delta], & Q_4'''=[\delta\delta], \end{array}$$

woraus erhellt, dass $Q_1'=Q_2$, $Q_1''=Q_3$, u. s. w. ist, übereinstimmend mit dem den Coefficienten der Normal-Gleichungen eigenthümlichen Bildungsgesetze.

Substituirt man in Gl. (77) für Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 die so eben erhaltenen Werthe in Function von $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, und bedenkt, dass auf dem im vorigen §. betretenen Wege auch für die übrigen Unbekannten, y_0, z_0, w_0 die analogen Ausdrücke sich ergeben, so erhält man folgende Gleichungen:

$$\begin{array}{l} x_0+[\alpha\alpha][an]+[\alpha\beta][bn]+[\alpha\gamma][cn]+[\alpha\delta][dn]=0, \\ y_0+[\alpha\beta][an]+[\beta\beta][bn]+[\beta\gamma][cn]+[\beta\delta][dn]=0, \\ z_0+[\alpha\gamma][an]+[\beta\gamma][bn]+[\gamma\gamma][cn]+[\gamma\delta][dn]=0, \\ w_0+[\alpha\delta][an]+[\beta\delta][bn]+[\gamma\delta][cn]+[\delta\delta][dn]=0, \end{array} \tag{86}$$

welche Gleichungen die unbestimmte Auflösung der Normal-Gleichungen enthalten, indem hiebei die wahrscheinlichsten Werthe der Unbekannten durch die vorläufig unbestimmt belassenen absoluten Glieder der Normal-Gleichungen ausgedrückt erscheinen. Auf welche Weise die Coefficienten $[\alpha\alpha]$, $[\alpha\beta]$, u. s. w. leicht erhalten werden können, wurde bereits im Eingange dieses §. bemerkt.

32. Aus dem so eben Vorgetragenen lassen sich nun unmittelbar noch einige andere Methoden zur Bestimmung der Gewichte ableiten.

Zweite Methode. Man löse die Normal-Gleichungen unbestimmt auf, wodurch man die wahrscheinlichsten Werthe der Unbekannten in der Form der Glgn. (86) erhält; dann ist der Coefficient von $[an]$ in dem Ausdrucke von x_0 der reciproke Werth des Gewichtes von x_0; der Coefficient von $[bn]$ in dem Ausdrucke für y_0 der reciproke Werth des Gewichtes von y_0, u. s. w.

Die Richtigkeit dieser Regel erhellt unmittelbar aus dem Anblicke der Glgn. (86), in Verbindung mit jenen (75). Setzen wir im Beispiele des vorhergehenden §. an die Stelle der absoluten Glieder -12 und $+3$ die allgemeinen Symbole $[an]$, $[bn]$, so erhalten wir die Gleichungen:

$$4x+4y+[an]=0,\quad 4x+5y+[bn]=0,$$

und durch Auflösung derselben:

$$x+\tfrac{5}{19}[an]-\tfrac{4}{19}[bn]=0,\quad y-\tfrac{4}{19}[an]+\tfrac{7}{19}[bn]=0,$$

folglich:

$$p_x=\frac{19}{5},\quad p_y=\frac{19}{7}.$$

Dritte Methode. Setzen wir in den auf 0 reducirten Normal-Gleichungen (73) an die Stelle der Nulle rechts vom Gleichheitszeichen allgemeine Symbole, z. B. X, Y, Z, W. So wie nun durch unbestimmte Auflösung der Normal-Gleichungen (73) für die wahrscheinlichsten Werthe der Unbekannten die Ausdrücke (86) sich ergeben, so müssen aus den in der besagten Weise modificirten Normal-Gleichungen Werthe der Unbekannten x, y, z, w folgen, die wir sofort erhalten, wenn wir in (86) $[an]-X$, $[bn]-Y$, $[cn]-Z$, $[dn]-W$ an die Stelle von $[an]$, $[bn]$, $[cn]$, $[dn]$ treten lassen; es wird sich also zur Bestimmung von x die Gleichung ergeben:

$$x+[\alpha\alpha]\{[an]-X\}+[\alpha\beta]\{[bn]-Y\}+[\alpha\gamma]\{[cn]-Z\}+[\alpha\delta]\{[dn]-W\}=0,$$

d. i. mit Rücksicht auf die 1te der Glgn. (86):

$$x-x_0-[\alpha\alpha]X-[\alpha\beta]Y-[\alpha\gamma]Z-[\alpha\delta]W=0.$$

Aus dieser Gleichung erhalten wir nun, $X=Y=Z=W=0$ setzend, $x=x_0$ d. i. den wahrscheinlichsten Werth, wie es sein muss, zugleich aber auch in dem Coefficienten von X, $[\alpha\alpha]$, den reciproken Werth des Gewichtes von x_0. Dasselbe gilt selbstverständlich auch für die übrigen Unbekannten. Hieraus folgt also folgende Regel:

Man setze in den auf 0 reducirtem Normal-Gleichungen allgemeine Zeichen X, Y, Z, W an die Stelle der Nulle, und löse die Gleichungen (nach einer beliebigen Eliminationsmethode) auf, so erhält man für die Unbekannten Ausdrücke von der Form:

$$\begin{aligned}
x&=x_0+[\alpha\alpha]X+[\alpha\beta]Y+[\alpha\gamma]Z+[\alpha\delta]W,\\
y&=y_0+[\alpha\beta]X+[\beta\beta]Y+[\beta\gamma]Z+[\beta\delta]W,\\
z&=z_0+[\alpha\gamma]X+[\beta\gamma]Y+[\gamma\gamma]Z+[\gamma\delta]W,\\
w&=w_0+[\alpha\delta]X+[\beta\delta]Y+[\gamma\delta]Z+[\delta\delta]W,
\end{aligned}\tag{87}$$

welche sofort die wahrscheinlichsten Werthe darbieten, indem man

$$X=Y=Z=W=0$$

setzt; ferner ist der Coefficient von X in der Gleichung für x, jener von Y in der Gleichung für y, jener von Z in der Gleichung für z, u. s. w. der reciproke Werth des Gewichtes beziehungsweise von x_0, y_0, z_0, u. s. w.

In dem obigen Beispiele haben wir die Gleichungen:

$$7x+4y-12=X,\quad 4x+5y+3=Y;$$

die Auflösung derselben ergibt:

$$x=\tfrac{72}{19}+\tfrac{5}{19}X-\tfrac{4}{19}Y,\quad y=-\tfrac{69}{19}-\tfrac{4}{19}X+\tfrac{7}{19}Y;$$

hieraus folgt:

der wahrscheinlichste Werth von $x:x_0 = \frac{72}{19}$, m. d. Gew. $= \frac{19}{5}$,

" " " " $y:y_0 = -\frac{69}{19}$, " " " $= \frac{19}{7}$.

Vierte Methode. Führt man, zur Bestimmung der wahrscheinlichsten Werthe der Unbekannten aus den Normal-Gleichungen, die Elimination nach dem in §. 25 gelehrten Verfahren aus, wodurch successive die Gleichgn. (60) erhalten werden, so ist in der letzten derselben:

$$[dd.3]\,w + [dn.3] = 0,$$

welche nur mehr eine Unbekannte w enthält, der Coefficient derselben: $[dd.3]$ das Gewicht dieser Unbekannten.

Man überzeugt sich hievon leicht auf folgende Weise. Um nach der ersten, in §. 30 vorgetragenen Methode das Gewicht von w zu finden, hat man, vermöge der Glgn. (84), in der Normal-Gleichung für w, -1, in allen übrigen 0 an die Stelle des absoluten Gliedes zu setzen, wonach der aus den so modificirten Gleichungen folgende Werth von w der reciproke Werth des Gewichtes von w_0 ist. Setzen wir also in §. 25:

$$[an] = [bn] = [cn] = 0, \text{ und } -1 \text{ statt } + [dn],$$

so wird, zufolge der Glgn. (54), (56) und (58):

$$\begin{aligned} [bn.1] = [cn.1] = 0, \quad & [dn.1] = -1, \\ [cn.2] = 0, \quad & [dn.2] = -1, \\ & [dn.3] = -1, \end{aligned}$$

wodurch die Gl. (59) in folgende:

$$[dd.3]\,w - 1 = 0$$

sich verwandelt, aus welcher sofort

$$w = \frac{1}{p_w} = \frac{1}{[dd.3]}, \text{ somit } p_w = [dd.3] \tag{88}$$

folgt. Auf diese Weise kann das Gewicht jeder Unbekannten gefunden werden, indem man, die Elimination wiederholend, hiebei die Reihenfolge der Unbekannten ändert und successive jede derselben zur letzten macht. Es ist jedoch nicht nothwendig, die Elimination so oft zu wiederholen, als Unbekannte sind, weil bei jeder Elimination sich auch das Gewicht der vorletzten Unbekannten mit Leichtigkeit ergibt. Um nämlich zunächst das Gewicht von z zu finden, hat man nur die Ordnung der Elimination in den zwei letzten Gleichungen (57) [§. 25] umzukehren und z zur letzten Unbekannten zu machen; dadurch erhält man, w eliminirend, als Endgleichung

$$[cc.3]\,z + [cn.3] = 0,$$

und somit $p_z = [cc.3]$. Es ist aber

$$[cc.3] = [cc.2] - \frac{[cd.2]}{[dd.2]}\,[cd.2],$$

oder, wenn man die rechte Seite mit $\frac{[cc.2]}{[dd.2]}$ multiplicirt und dividirt:

$$[cc.3] = \frac{[cc.2]}{[dd.2]}\left\{[dd.2] - \frac{[cd.2]}{[cc.2]}[cd.2]\right\} = \frac{[cc.2]}{[dd.2]}[dd.3],$$

somit:

$$p_z = \frac{[cc.2]}{[dd.2]}[dd.3], \tag{89}$$

wo die drei Hilfsgrössen rechter Hand aus der ersten Elimination bekannt sind. Um nun auch die Gewichte von x und y zu finden, ist es am zweckmässigsten, die Elimination in umgekehrter Ordnung zu wiederholen, so dass, wenn das erstemal in der Ordnung x, y, z, w eliminirt wurde, nunmehr die Ordnung w, z, y, x eingehalten wird, wodurch sich das Gewicht von x unmittelbar, und jenes von y wieder durch drei bekannte Hilfsgrössen ergibt. Hiedurch wird zugleich die Richtigkeit der Elimination geprüft, indem der bei der zweiten erhaltene Werth von x mit dem bei der ersten Elimination durch Substitution nach rückwärts gewonnenen übereinstimmen muss. Bei einer grösseren Zahl von Unbekannten wird man gleichfalls die Ordnung der Elimination einmal vollständig umkehren und dadurch die Gewichte von vier Unbekannten und die Prüfung der Rechnung erlangen; die Gewichte der übrigen Unbekannten ergeben sich dann, indem man in jeder der beiden Eliminationen bis zur halben Anzahl der Unbekannten zurückgeht, und innerhalb derselben die Ordnung der Elimination entsprechend ändert.

In dem oben benützten Beispiele sind die Normal-Gleichungen:

$$7x + 4y - 12 = 0, \quad 4x + 5y + 3 = 0;$$

die erste mit $\frac{4}{7}$ multiplicirt gibt: $4x + \frac{16}{7}y - \frac{48}{7} = 0$, und diese von der 2^{ten} abgezogen: $\frac{19}{7}y + \frac{69}{7} = 0$; somit $y = -\frac{69}{19}$ mit dem Gewichte $= \frac{19}{7}$. Die 2^{te} mit $\frac{4}{5}$ multiplicirt gibt: $\frac{16}{5}x + 4y + \frac{12}{5} = 0$, und diese von der ersten abgezogen: $\frac{19}{5}x - \frac{72}{5} = 0$; hieraus $x = \frac{72}{19}$; Gewicht $= \frac{19}{5}$.

33. In Bezug auf die numerische Ausführung der in diesem Abschnitte behandelten Aufgabe mögen noch einige Bemerkungen Platz finden.

Sobald die Bedingungsgleichungen aufgestellt sind und, im Falle sie verschiedene Genauigkeit haben, jede mit der Quadratwurzel aus ihrem Gewichte multiplicirt ist, handelt es sich zunächst um die Bildung der Summencoefficienten der Normal-Gleichungen ($[aa]$, $[ab]$, $[an]$, u. s. w.) aus den Coefficienten der Bedingungsgleichungen. Bei diesem Geschäfte wird es immer genügen, vier- bis höchstens fünfstellige Logarithmen anzuwenden, vorausgesetzt, dass man in dem Falle, wenn die gesuchten Werthe der Unbekannten Zahlen mit mehr als 3 bis 4 Ziffern sind, genäherte Werthe derselben in die Bedingungsgleichungen eingeführt und auf diese Weise, wie schon in

§. 22 bemerkt wurde, die Auflösung der Aufgabe auf die Bestimmung der wahrscheinlichsten Werthe der kleinen Correctionen dieser Näherungswerthe reducirt hat.

Die Rechnung selbst wird tabellarisch angeordnet, etwa nach folgendem Schema:

	№ der Bedingungsgleichung				
	1	2	3	4	u. s. w.
Absolute Glieder	$\log n_1$	$\log n_2$	$\log n_3$	$\log n_4$	. . . .
Coefficienten von x . . . . . a	$\log a_1$	$\log a_2$	$\log a_3$	$\log a_4$	. . . .
Coefficienten von y . . . . . b	$\log b_1$	$\log b_2$	$\log b_3$	$\log b_4$	. . . .
Coefficienten von z c	$\log c_1$	$\log c_2$	$\log c_3$	$\log c_4$	. . . .
u. s. w.	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

oder auch umgekehrt, so dass die Bedingungsgleichungen in verticaler und die Coefficienten der einzelnen Gleichungen in horizontaler Richtung gereiht werden. Man bildet nun die Logarithmen der einzelnen Producte: $a_1 n_1$, $a_2 n_2, \ldots$; $a_1 a_1$, $a_2 a_2, \ldots$; $a_1 b_1$, $a_2 b_2, \ldots$, u. s. w. und setzt die Zahlen in weitere Columnen. Hiebei wird, wenn man von der in §. 24 erklärten Controle Gebrauch machen will, auch die Bildung der Summen $[sn]$, $[as]$, $[bs]$, u. s. w. mitgenommen.

Wenn die Bedingungsgleichungen von verschiedener Genauigkeit sind, so kann es, statt jede derselben mit der Quadratwurzel aus ihrem Gewichte zu multipliciren, bisweilen (wenn Coefficienten und Gewichte sehr einfache Zahlen sind) bequemer sein, die Multiplication mit den Gewichten selbst erst an den Producten aa, ab, an, u. s. w. zu vollziehen, indem es offenbar auf dasselbe hinauskommt, jeden der beiden Factoren eines solchen Productes mit $\sqrt{p}$, oder das Product selbst mit p zu multipliciren. In diesem Falle erhält man dann durch Substitution der wahrscheinlichsten Werthe der Unbekannten in die Bedingungsgleichungen auch die v in ihrem ursprünglichen Werthe, und man hat, um den mittleren Fehler ε der Gewichtseinheit zu finden, in Gl. (71) $[pvv]$ statt $[vv]$ zu setzen, also die Formel:

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{[pvv]}{m-k}}$$

zu gebrauchen.

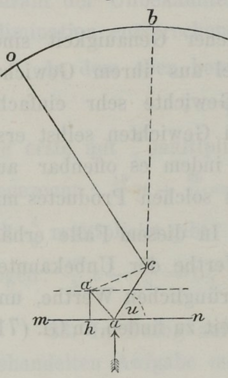
Häufig sind die absoluten Glieder der Bedingungsgleichungen sehr kleine Decimalbrüche mit mehreren der ersten bedeutenden Ziffer vorausgehenden Nullen; in solchem Falle kann man die absoluten Glieder aller Gleichungen mit einer zweckmässig gewählten Potenz von 10 multipliciren und hat dann die resultirenden wahrscheinlichsten Werthe der Unbekannten wieder durch dieselbe Potenz von 10 zu dividiren.

Eben so kommt es nicht selten vor, dass eine Unbekannte gegen die andern sehr klein oder sehr gross ist, wo dann die Coefficienten derselben im ersteren Falle in Vergleich zu den übrigen sehr gross im zweiten sehr klein sein werden. Es ist dann vortheilhaft, für diese Unbekannte, etwa x, eine neue x' mittelst der Gleichung $x = \alpha x'$ einzuführen, wo man bei kleinem x für α einen Werth < 1, z. B. 0.1 oder 0.01, etc., bei grossem x einen Werth > 1, z. B. 10, oder 100 etc. wählen wird. Die Auflösung der Gleichungen ergibt nun x' und das Gewicht $p_{x'}$ von x', und man hat dann $x = \alpha x'$ und, vermöge der Gl. (40), das Gewicht von $x = \frac{p_{x'}}{\alpha^2}$.

Bei der Auflösung der Normal-Gleichungen, deren Coefficienten in der Regel grössere Zahlen sind, ist es rathsam, Logarithmen mit 6 bis 7 Stellen anzuwenden, da die Coefficienten der durch die Elimination successive entstehenden Gleichungen nicht selten beträchtlich kleiner werden, und daher bei etwa nur fünfstelliger Rechnung in diesen Coefficienten nicht die hinreichende Anzahl von sicheren Ziffern übrig bleibt, um die Werthe der Unbekannten mit genügender Genauigkeit zu erhalten.

34. Beispiel. Zur Erläuterung der vorgetragenen Methoden möge die Bestimmung der Constanten der Gleichung eines Fühlhebels dienen. Der Apparat wird zur scharfen Messung kleiner linearer Dimensionen, z. B. des Unterschiedes der Länge zweier nahe gleich langer Stäbe gebraucht und besteht im Wesentlichen aus einem ungleicharmigen Hebel aco (Fig. 2), welcher um c drehbar ist, auf dessen kurzen Hebelarm ac die zu messende in der Richtung des Pfeiles liegende Dimension wirkt, während der längere Arm an einem getheilten Gradbogen spielt, an welchem sein Ort bei irgend einer Stellung des Hebels in Graden und Minuten abgelesen werden kann.

Fig. 2.



Sei aco die Stellung des Fühlhebels bei der Lesung $= 0$ am Gradbogen, $a'cb$ dessen Stellung bei der Lesung μ; ziehen wir durch den Angriffspunct a die mn senkrecht zur Richtung der zu messenden Dimension, und $a'h$ senkrecht auf mn, so ist $a'h = e$ die in der Richtung des Pfeiles stattfindende Bewegung des Angriffspunctes a, während der Hebel sich von der Lesung 0 bis zur Lesung μ bewegt, und es handelt sich darum, e aus μ zu finden. Zieht man die Sehne aa', und setzt die Länge des kurzen Hebelarmes $ac = a'c = r$, so hat man, da $\angle\, aca' = \angle\, ocb = \mu$ ist: $aa' = 2r \sin \frac{1}{2}\mu$. Ferner ist $a'h = e = aa' \sin a'ah$, und $\angle\, a'ah = 180^0 - a'ac - can = 180 - (90 - \frac{1}{2}\mu) - u = 90 - (u - \frac{1}{2}\mu)$, wenn mit u der constante Winkel bezeichnet wird, welchen der kurze Hebelarm bei der Lesung 0^0 mit der auf die Richtung der zu messenden Dimensionen Senkrechten mn einschliesst. Hieraus folgt:

$$e = 2\,r \sin \tfrac{1}{2}\mu \cos(u - \tfrac{1}{2}\mu), \qquad (m)$$

mittelst welcher Gleichung e berechnet werden kann, sobald die Constanten r und a des Apparates bekannt sind.

Zur Bestimmung dieser Constanten lässt man nun auf den Fühlhebel eine Schraube wirken, deren Ganghöhe $= g$ genau bekannt ist, indem man die Schraube, von einer bestimmten Stellung derselben, welcher die Lesung μ_0 entspricht, beginnend, immer genau um einen Gang dreht und jedesmal die Stellung des Fühlhebels abliest; jede solche Beobachtung gibt dann eine Gleichung von obiger Form; da diese aber in Bezug auf die Unbekannten r und u nicht linear ist, so muss sie zuerst auf lineare Form gebracht werden, was nach §. 22, oder in unserem Falle einfacher auf folgende Weise bewirkt werden kann. Durch Auflösung des $\cos(u - \frac{1}{2}\mu)$ erhält man:

$$e = 2\,r \cos u \cos \tfrac{1}{2}\mu \sin \tfrac{1}{2}\mu + 2\,r \sin u \sin \tfrac{1}{2}\mu^2;$$

setzt man nun:

$$r \cos u = x, \qquad r \sin u = y,$$

so verwandelt sich die Gleichung in folgende:

$$e = \sin\mu \,.\, x + 2 \sin \tfrac{1}{2}\mu^2 \,.\, y,$$

welche in Bezug auf die Unbekannten x und y linear ist. Sobald diese bekannt geworden, hat man dann:

$$r = \frac{x}{\cos u} = \frac{y}{\sin u} = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad tg\,u = \frac{y}{x}. \qquad (n)$$

Ist nun z die unbekannte Bewegung des Fühlhebels von der Lesung 0^0 bis zur ersten Lesung μ_0, und sind μ_1, μ_2, μ_3, ... die Lesungen nach der Drehung der Schraube um 1, 2, 3, ... Gänge, so hat man die Bedingungsgleichungen:

$$\begin{aligned} z &= \sin\mu_0 \,.\, x + 2 \sin \tfrac{1}{2}\mu_0^2 \,.\, y, \\ g + z &= \sin\mu_1 \,.\, x + 2 \sin \tfrac{1}{2}\mu_0^2 \,.\, y, \\ 2\,g + z &= \sin\mu_2 \,.\, x + 2 \sin \tfrac{1}{2}\mu_0^2 \,.\, y, \\ &\text{u. s. w.} \end{aligned}$$

oder, wenn man $g = 1$ setzt, d. i. x, y, z zunächst in Schraubengängen ausdrückt:

$$\begin{aligned} \sin\mu_0 \,.\, x + 2 \sin \tfrac{1}{2}\mu_0^2 \,.\, y - z &= 0, \\ \sin\mu_1 \,.\, x + 2 \sin \tfrac{1}{2}\mu_1^2 \,.\, y - z - 1 &= 0, \\ \sin\mu_2 \,.\, x + 2 \sin \tfrac{1}{2}\mu_2^2 \,.\, y - z - 2 &= 0, \\ &\text{u. s. w.} \end{aligned} \qquad (p)$$

An einem Fühlhebel des im k. k. polytechnischen Institute befindlichen Comparators wurden folgende Beobachtungen gemacht:

Schraube g	μ	$\log \sin \mu$	$\log 2 \sin \frac{1}{2}\mu^2$
0	3° 14′.6	8.7526370	7.2045920
1	8 6.3	9.1491810	7.9995064
2	12 49.7	9.3464130	8.3972522
3	17 27.1	9.4769781	8.6630384
4	22 0.7	9.5737942	8.8626824
5	26 32.8	9.6502362	9.0229616
6	31 4.7	9.7128260	9.1569658
7	35 38.3	9.7654203	9.2725120
8	40 15.3	9.8103606	9.3744256
9	44 57.3	9.8491437	9.4658854

Aus einigen Combinationen dieser Beobachtungen ergaben sich vorläufig die genäherten Werthe:

$$x = 11.28940, \quad y = 5.71919, \quad z = 0.64874;$$

setzen wir daher

$$x = 11.28940 + \xi, \quad y = 5.71919 + \eta, \quad z = 0.64874 + \zeta,$$

so erhalten wir durch Substitution derselben, so wie der Werthe von $\sin \mu$ und $2 \sin \frac{1}{2}\mu^2$ in die Glgn. (p) folgende Bedingungsgleichungen:

	v	vv	
$0.05658\,\xi + 0.00160\,\eta - \zeta - 86 = 0,$	-47.5	2256	
$0.14099\,\xi + 0.00999\,\eta - \zeta + 5 = 0,$	$+28.8$	829	
$0.22203\,\xi + 0.02496\,\eta - \zeta + 61 = 0,$	$+72.6$	5271	
$0.29990\,\xi + 0.04603\,\eta - \zeta + 22 = 0,$	$+23.9$	571	
$0.37480\,\xi + 0.07289\,\eta - \zeta - 64 = 0,$	-69.6	4844	
$0.44693\,\xi + 0.10543\,\eta - \zeta - 23 = 0,$	-34.0	1156	(q)
$0.51621\,\xi + 0.14354\,\eta - \zeta - 12 = 0,$	-26.1	681	
$0.58267\,\xi + 0.18729\,\eta - \zeta + 36 = 0,$	$+21.0$	441	
$0.64619\,\xi + 0.23682\,\eta - \zeta + 81 = 0,$	$+67.3$	4529	
$0.70655\,\xi + 0.29234\,\eta - \zeta - 26 = 0,$	-36.1	1303	
	$[vv] =$	21881	

wo die absoluten Glieder Einheiten der 5. Decimalstelle eines Schraubenganges sind, d. h. es wurden die absoluten Glieder aller Gleichungen mit 100000 multiplicirt. Hiebei ist noch zu bemerken, dass, wie man leicht übersieht, bei dieser Substitution Logarithen von 7 Decimalstellen verwendet werden müssen, wenn man in den absoluten Gliedern noch die 5. Decimalstelle sicher erhalten will. In den Bedingungsgleichungen genügt es dann, die Coefficienten mit 5 Decimalstellen anzusetzen.

Es folgt nun, da sämmtliche Gleichungen von gleicher Genauigkeit sind, die Multiplication mit den Quadratwurzeln aus den Gewichten daher entfällt, die Berechnung der Producte *aa*, *ab*, *ac*, *bb*, *bc*, *cc*, *an*, *bn*, *cn* (mit fünfstelligen Logarithmen) und die Bildung der Summencoefficienten der Normal-Gleichungen, welche des Raumes wegen, und da sie keine Schwierigkeit bietet, hier weggelassen wird; man erhält dann folgende Normal-Gleichungen:

$$\begin{aligned}
2.02530\,\xi + 0.63809\,\eta - 3.99285\,\zeta + 30.466 &= 0,\\
0.63809\,\xi + 0.21649\,\eta - 1.12089\,\zeta + 11.959 &= 0,\\
-3.99285\,\xi - 1.12089\,\eta + 10.00000\,\zeta + 6.000 &= 0.
\end{aligned}$$

Die Prüfung der Richtigkeit der Coefficienten dieser Gleichungen nach §. 24 stellt sich folgendermassen:

$$\begin{aligned}
[an]+[bn]+[cn] &= 48.4251\,, & [ns] &= 48.4271\,,\\
[aa]+[ab]+[ac] &= -1.32946\,, & [as] &= -1.32946\,,\\
[ab]+[bb]+[bc] &= -0.26631\,, & [bs] &= -0.26630\,,\\
[ac]+[bc]+[cc] &= 4.88626\,, & [cs] &= 4.88626\,;
\end{aligned}$$

die Uebereinstimmung ist, mit Rücksicht auf die Rechnung mit nur fünfstelligen Logarithmen eine genügende.

Die Auflösung der Normal-Gleichungen ist in folgendem Tableau enthalten, wobei, unter der ersten fetten Linie, auch die Berechnung der Grössen $[\alpha\alpha]$, $[\alpha\beta]$, etc. [§. 31] beigefügt ist, um auch diese an dem Beispiele zu erläutern.

+ 2.02530	+ 0.63809	− 3.99285	+ 30.466	+ 0.21649	− 1.12089	+ 11.959	+ 10.0000	+ 6.000
0.306489	9.804882	0.601283n	1.483815	+ 0.201036	− 1.25799	+ 9.59860	+ 7.87185	− 60.0633
	9.303275	0.099676n	0.982208	+ 0.015454	+ 0.13710	+ 2.36040	+ 2.12815	+ 66.0633
		0.896077	1.778609n	8.189041	9.137037	0.372986	+ 1.21628	+ 20.9402
	2.261643	2.295749	+ 182.660		0.085033	1.320982	+ 0.91187	+ 45.1231
			+ 197.583		0.831503n	− 6.78427	9.959933	1.654399
			+ 410.709			− 4.42387	lg ζ =	1.694466n
			2.613534			0.645802n	ζ =	− 49.5
		lg ξ =	2.307045n		lg η =	2.456761		
		ξ =	− 202.8		η =	+ 286.3		
			− 1			0		0
			0. . . . . n			+ 0.31506		− 1.9715
						9.49839		+ 2.7950
	1.62940n	1.31955n	− 42.599			0.44639		− 4.7665
			− 20.871		9.85531	+ 0.71665		0.67820n
			− 64.470			+ 1.03171	lg$[\alpha\gamma]$ =	0.71827
			1.80936n			0.01356	$[\alpha\gamma]$ =	+ 5.227
		lg$[\alpha\alpha]$ =	1.50287		lg$[\alpha\beta]$ =	1.82452n		
		$[\alpha\alpha]$ =	+ 31.832		$[\alpha\beta]$ =	− 66.761		
			0			− 1		0
						0. . . . . n		0.94800
					0.12511n	− 1.3339	lg$[\beta\gamma]$ =	0.98807n
						− 2.3339	$[\beta\gamma]$ =	− 9.729
						0.36808n		
					lg$[\beta\beta]$ =	2.17904		
					$[\beta\beta]$ =	+ 151.022		
			0			0		− 1
								0. . . n
							lg$[\gamma\gamma]$ =	0.04007
							$[\gamma\gamma]$ =	+ 1.097

Die Elimination liefert also folgende wahrscheinlichste Werthe:

$$\xi = -202.8, \quad \eta = +286.3, \quad \zeta = -49.5,$$

ausgedrückt in Einheiten der 5. Decimalstelle, und gleichzeitig in dem Coefficienten von ζ in der letzten Gleichung das Gewicht dieser Unbekannten $= 0.91187$. Das Gewicht von η ergibt sich nach Gl. (89):

$$= \frac{[bb\,.\,1]}{[cc\,.\,1]}[cc\,.\,2] = \frac{0.015454}{2.12815} \times 0.91187 = 0.00662.$$

Um endlich auch das Gewicht von ξ zu erhalten, wiederholen wir die Elimination, in umgekehrter Ordnung ξ zur letzten Unbekannten machend, und erhalten hieraus $\xi = -202.8$ mit dem Gewichte 0.03140. Die Uebereinstimmung dieses Werthes von ξ mit dem in der ersten Elimination erhaltenen zeugt für die Richtigkeit der Rechnung. Uebrigens sind, durch die Berechnung der Grössen $[\alpha\alpha]$, $[\beta\beta]$, $[\gamma\gamma]$ die Gewichte auch nach der zweiten der in §. 32 angeführten Methoden bestimmt; es ist nämlich

$$p_\xi = \frac{1}{[\alpha\alpha]} = 0.03141, \quad p_\eta = \frac{1}{[\beta\beta]} = 0.00662, \quad p_\zeta = \frac{1}{[\gamma\gamma]} = 0.91187,$$

übereinstimmend mit den obigen Werthen.

Substituirt man die erhaltenen Werthe von ξ, η, ζ in die Bedingungsgleichungen (q), so ergeben sich die übrigbleibenden Fehler v, welche sammt deren Quadraten den Bedingungsgleichungen in den zwei Spalten rechts beigefügt sind, und hieraus in Einheiten der 5. Decimalstelle:

$$[vv] = 21881.$$

Diese Quadratsumme kann aber auch nach den Formeln (63) und (64) berechnet werden, indem in unserem Falle $[vv] = [nn\,.\,3]$. Man findet zunächst die Summe der Quadrate der absoluten Glieder der Bedingungsgleichungen

$$[nn] = 24928,$$

und hat aus der Elimination die Hilfsgrössen:

$$[bn\,.\,1] = 2.36040, \quad [bb\,.\,1] = 0.015454, \quad [cn\,.\,2] = 45.1231, \quad [cc\,.\,2] = 0.91187;$$

mit diesen erhält man nun mittelst der Glgn. (63):

$$\begin{aligned} [nn\,.\,1] &= 24469.7 \\ [nn\,.\,2] &= 24109.2 \\ [nn\,.\,3] &= 21876.3 = [vv], \end{aligned}$$

welcher Werth mit dem durch unmittelbare Substitution erhaltenen genügend genau stimmt, wenn man beachtet, dass bei letzterer nur eine Decimalstelle in den v angesetzt wurde.

Hiemit ergibt sich nun der mittlere Fehler einer Gleichung nach Gl. (71):

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{[vv]}{10-3}} = \pm 55.9,$$

und hieraus die mittleren Fehler von ξ, η, ζ, nämlich:

$$\varepsilon_\xi = \frac{\varepsilon}{\sqrt{p_\xi}} = \pm 315, \quad \varepsilon_\eta = \frac{\varepsilon}{\sqrt{p_\eta}} = \pm 687, \quad \varepsilon_\zeta = \frac{\varepsilon}{\sqrt{p_\zeta}} = \pm 58.$$

Fügt man ferner die gefundenen Werthe von ξ, η, ζ zu den angenommenen genäherten Werthen von x, y, z hinzu, so hat man als wahrscheinlichste Werthe, in Schraubengängen ausgedrückt:

$$\begin{array}{lll}
x = 11^g.28737 & \text{m. d. mittleren Fehler} & \pm 0^g.00315, \\
y = 5\ .72205 & \text{„ „ „ „} & \pm 0\ .00687, \\
z = 0\ .64825 & \text{„ „ „ „} & \pm 0\ .00058.
\end{array}$$

Mit diesen Werthen erhält man endlich mittelst der Glgn. (n):

$$r = 12^g.65490, \quad u = 26^0\,53'.0.$$

Will man auch noch den mittleren oder wahrscheinlichen Fehler von r und u bestimmen, so muss der im folgenden §. vorzutragende Satz zu Hilfe genommen werden.

35. Beschäftigen wir uns noch mit der Aufgabe, das Gewicht des wahrscheinlichsten Werthes einer linearen Function:

$$K = k_0 + k_1 x + k_2 y + k_3 z + k_4 w \tag{90}$$

der Grössen x, y, z, w zu bestimmen, deren wahrscheinlichste Werthe x_0, y_0, u. s. w. aus Normal-Gleichungen hervorgegangen sind. Es ist an und für sich klar, dass der wahrscheinlichste Werth K_0 der Function durch den Ausdruck:

$$K_0 = k_0 + k_1 x_0 + k_2 y_0 + k_3 z_0 + k_4 w_0 \tag{91}$$

gegeben ist, und es handelt sich daher nur noch um die Bestimmung des Gewichtes desselben.

Man sieht leicht, dass die unmittelbare Anwendung des in der Gl. (40) ausgesprochenen Satzes auf die obige Function nicht zulässig ist, weil zwar, der Voraussetzung nach, die Grössen x, y, z, u. s. w. von einander unabhängig sind, nicht aber ihre wahrscheinlichsten Werthe x_0, y_0, etc., welche vielmehr in Folge ihres gemeinschaftlichen Ursprunges aus den Normal-Gleichungen von einander abhängig sind. Wir müssen daher zunächst wieder, so wie in §. 28, diese Grössen durch die von einander unabhängigen $n_1, n_2, \ldots . n_m$ ausdrücken. Substituiren wir zu diesem Zwecke für x, y, z, w ihre wahrscheinlichsten Werthe aus (74), so erhalten wir:

$$\begin{aligned}
K_0 = k_0 & - k_1 (\alpha_1 n_1 + \alpha_2 n_2 + \alpha_3 n_3 + \ldots . + \alpha_m n_m) \\
& - k_2 (\beta_1 n_1 + \beta_2 n_2 + \beta_3 n_3 + \ldots . + \beta_m n_m) \\
& - k_3 (\gamma_1 n_1 + \gamma_2 n_2 + \gamma_3 n_3 + \ldots . + \gamma_m n_m) \\
& - k_4 (\delta_1 n_1 + \delta_2 n_2 + \delta_3 n_3 + \ldots . + \delta_m n_m),
\end{aligned}$$

oder, nach den n ordnend:

$$K_0 = k_0 - n_1(\alpha_1 k_1 + \beta_1 k_2 + \gamma_1 k_3 + \delta_1 k_4)$$
$$- n_2(\alpha_2 k_1 + \beta_2 k_2 + \gamma_2 k_3 + \delta_2 k_4)$$
$$- n_3(\alpha_3 k_1 + \beta_3 k_2 + \gamma_3 k_3 + \delta_3 k_4)$$
$$- \text{etc.}$$

Da nun die beobachteten Werthe $n_1, n_2, \ldots$ von einander unabhängig sind, so wird, wenn wir das Gewicht von K mit P bezeichnen und berücksichtigen, dass in Folge der an den Bedingungsgleichungen bereits vollzogenen Multiplication derselben mit den Quadratwurzeln aus ihren Gewichten [§. 23], dieselben auf einerlei Genauigkeit, jene der Gewichtseinheit reducirt sind, somit das Gewicht unserer n der Einheit gleich zu setzen ist, zufolge der Gl. (40):

$$\frac{1}{P} = (\alpha_1 k_1 + \beta_1 k_2 + \gamma_1 k_3 + \delta_1 k_4)^2$$
$$+ (\alpha_2 k_1 + \beta_2 k_2 + \gamma_2 k_3 + \delta_2 k_4)^2$$
$$+ (\alpha_3 k_1 + \beta_3 k_2 + \gamma_3 k_3 + \delta_3 k_4)^2$$
$$+ \text{etc.}$$

Erhebt man die Polynome zum Quadrate, so kommt:

$$\begin{aligned}\frac{1}{P} = [\alpha\alpha]\,k_1 k_1 + [\beta\beta]\,k_2 k_2 + [\gamma\gamma]\,k_3 k_3 + [\delta\delta]\,k_4 k_4 \\ + 2\,[\alpha\beta]\,k_1 k_2 + 2\,[\alpha\gamma]\,k_1 k_3 + 2\,[\alpha\delta]\,k_1 k_4 \\ + 2\,[\beta\gamma]\,k_2 k_3 + 2\,[\beta\delta]\,k_2 k_4 \\ + 2\,[\gamma\delta]\,k_3 k_4\,,\end{aligned} \tag{92}$$

wo das Bildungsgesetz des Ausdruckes rechter Hand leicht in die Augen fällt; die Werthe der Summencoefficienten $[\alpha\alpha]$, $[\beta\beta]$, $[\alpha\beta]$, u. s. w. werden auf die in §. 31 erklärte Weise erhalten.

Die Glgn. (75) sind, wie man leicht sieht, nur specielle Fälle des obigen allgemeineren Ausdruckes (92); denn setzt man z. B. in (91):

$$k_0 = k_2 = k_3 = k_4 = 0\,,\ k_1 = 1\,,$$

so wird $K_0 = x_0$, und aus (92) folgt $\frac{1}{P} = [\alpha\alpha]$, übereinstimmend mit der ersten der Glgn. (75).

Der obige Ausdruck (92) lässt sich noch in einer einfacheren Gestalt darstellen. Schreibt man denselben in folgender Form:

$$\frac{1}{P} = k_1([\alpha\alpha]\,k_1 + [\alpha\beta]\,k_2 + [\alpha\gamma]\,k_3 + [\alpha\delta]\,k_4)$$
$$+ k_2([\alpha\beta]\,k_1 + [\beta\beta]\,k_2 + [\beta\gamma]\,k_3 + [\beta\delta]\,k_4)$$
$$+ k_3([\alpha\gamma]\,k_1 + [\beta\gamma]\,k_2 + [\gamma\gamma]\,k_3 + [\gamma\delta]\,k_4)$$
$$+ k_4([\alpha\delta]\,k_1 + [\beta\delta]\,k_2 + [\gamma\delta]\,k_3 + [\delta\delta]\,k_4)\,,$$

und setzt:

$$\begin{aligned}X &= [\alpha\alpha]\,k_1 + [\alpha\beta]\,k_2 + [\alpha\gamma]\,k_3 + [\alpha\delta]\,k_4\,,\\ Y &= [\alpha\beta]\,k_1 + [\beta\beta]\,k_2 + [\beta\gamma]\,k_3 + [\beta\delta]\,k_4\,,\\ Z &= [\alpha\gamma]\,k_1 + [\beta\gamma]\,k_2 + [\gamma\gamma]\,k_3 + [\gamma\delta]\,k_4\,,\\ W &= [\alpha\delta]\,k_1 + [\beta\delta]\,k_2 + [\gamma\delta]\,k_3 + [\delta\delta]\,k_4\,,\end{aligned} \tag{m}$$

so wird:

$$\frac{1}{P}=k_1X+k_2Y+k_3Z+k_4W; \tag{93}$$

man erkennt nun unmittelbar aus der Vergleichung der Glgn. (m) mit jenen (86), dass X, Y, Z, W nichts anderes sind als die Werthe der Unbekannten x, y, z, w, welche aus der Auflösung der Normal-Gleichungen hervorgehen, wenn man in letzteren an die Stelle der absoluten Glieder $[an]$, $[bn]$, $[cn]$, $[dn]$ beziehungsweise $-k_1, -k_2, -k_3, -k_4$ setzt.

Bezeichnet man mit ε_k den mittleren Fehler von K_0, so hat man:

$$\varepsilon_k=\frac{\varepsilon}{\sqrt{P}}=\varepsilon\sqrt{k_1X+k_2Y+k_3Z+k_4W}, \tag{94}$$

wo ε durch die Gl. (71) bestimmt ist.

Ist die Function K in Bezug auf x, y, u. s. w. nicht linear, so muss sie zuvor auf die lineare Form der Gl. (90) gebracht werden, was mittelst des in §. 22 vorgetragenen Verfahrens immer möglich ist.

B e i s p i e l. Im vorhergehenden §. haben wir die wahrscheinlichsten Werthe der Constanten r und u des Fühlhebels mittelst der Gleichungen

$$r=\sqrt{x^2+y^2}, \quad \operatorname{tg} u=\frac{y}{x} \tag{n}$$

aus den Grössen x und y erhalten, deren wahrscheinlichste Werthe aus Normal-Gleichungen hervorgingen. Mit Hilfe des obigen Satzes kann nun das Gewicht der erlangten Werthe von r und u leicht bestimmt werden, zu welchem Zwecke die Gleichungen (n) zunächst auf lineare Form gebracht werden müssen. Lassen wir wieder x und y unsere angenommenen genäherten Werthe dieser Grössen bedeuten, und setzen in (n) $x+\xi$ statt x und $y+\eta$ statt y, so wird vermöge des Taylor'schen Satzes:

$$r=\sqrt{x^2+y^2}+\frac{dr}{dx}\xi+\frac{dr}{dy}\eta; \quad u=\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}+\frac{du}{dx}\xi+\frac{du}{dy}\eta;$$

durch Differentiation der Glgn. (n) findet man aber leicht:

$$\frac{dr}{dx}=\frac{x}{r}, \quad \frac{dr}{dy}=\frac{y}{r}; \quad \frac{du}{dx}=-\frac{y}{r^2}, \quad \frac{du}{dy}=\frac{x}{r^2},$$

somit, wenn wir der Kürze wegen $\sqrt{x^2+y^2}=r_0$, $\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}=u_0$ setzen, wo r_0 und u_0 die mit den genäherten Werthen von x und y berechneten Werthe von r und u bedeuten:

$$r=r_0+\frac{x}{r}\xi+\frac{y}{r}\eta,$$

$$u=u_0-\frac{y}{r^2}\xi+\frac{x}{r^2}\eta.$$

Vergleicht man diese Gleichungen mit (90), so hat man

für die erstere: $k_1 = \frac{x}{r}, \quad k_2 = \frac{y}{r}, \quad k_3 = k_4 = 0,$

„ „ zweite: $k_1 = -\frac{y}{r^2}, \quad k_2 = \frac{x}{r^2}, \quad k_3 = k_4 = 0,$

somit, vermöge der Gl. (92):

für das Gewicht von r: $\frac{1}{P_r} = [\alpha\alpha]\frac{x^2}{r^2} + [\beta\beta]\frac{y^2}{r^2} + 2[\alpha\beta]\frac{xy}{r^2},$

„ „ „ „ u: $\frac{1}{P_u} = [\alpha\alpha]\frac{y^2}{r^4} + [\beta\beta]\frac{x^2}{r^4} - 2[\alpha\beta]\frac{xy}{r^4}.$

Substituirt man nun in diesen Ausdrücken für $x, y, r, [\alpha\alpha], [\alpha\beta], [\beta\beta]$ die in §. 34 erhaltenen Werthe, so folgt:

Gewicht von r: $P_r = 0.4252$, Gewicht von u: $P_u = 0.8833$,

somit der mittlere Fehler

von r: $\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{\sqrt{P_r}} = \pm 85.7$; von u: $\varepsilon_u = \frac{\varepsilon}{\sqrt{P_u}} = \pm 20.2$;

durch Multiplication mit 0.6745 erhält man die wahrscheinlichen Fehler:

± 57.8, bez. ± 13.6.

Diese Fehler sind noch in Einheiten der 5ten Decimalstelle ausgedrückt, also durch 100000 zu dividiren; ferner liegt ersterem 1 Schraubengang g, letzterem als Winkelfehler der Radius als Einheit zu Grunde. Es ist bei der benützten Schraube 1 Schraubengang $g = 0.163294$ Wiener Linien; multiplicirt man daher r und ε_r mit diesem Werthe von g, ε_u mit 3438, um diesen Fehler in Minuten zu erhalten, so kommt:

$r = 2.06647$ Wien. Linien m. d. wahrsch. Fehler ± 0.000094 Wien. Linien,

$u = 26^\circ\, 53'.0$ „ „ „ „ $\pm 0'.5$,

und die Gleichung des Fühlhebels ist:

$$e = 4'''.13294 \sin \tfrac{1}{2}\mu \cos\left(26^\circ\, 53'.0 - \tfrac{1}{2}\mu\right).$$

IV. Bestimmung der wahrscheinlichsten Werthe von Grössen, welche von einander nicht unabhängig sind.

36. Im vorhergehenden Abschnitte haben wir die Aufgabe, aus gegebenen Gleichungen:

$M_1 = f_1(x, y, z, \ldots)$, $M_2 = f_2(x, y, z, \ldots)$, u. s. w., (a)

in welchen M_1, M_2, etc. die beobachteten Functionswerthe bedeuten, die wahrscheinlichsten Werthe der Unbekannten x, y, z, etc. zu finden, unter der Voraussetzung aufgelöst, dass die Unbekannten von einander völlig unabhängig seien.