und der wahrscheinliche Fehler:

$$r = 0.84535 \frac{\Sigma v}{\sqrt{n(n-1)}}\,. \tag{32}$$

In dem obigen Beispiele, §. 15, ist $\Sigma v = 15''.06$, $n = 30$; hiemit folgt als wahrscheinlicher Fehler einer Beobachtung nach Gl. (32):

$$r = \pm 0''.431;$$

die in diesem Falle so gut wie vollkommene Uebereinstimmung dieses Werthes mit dem oben erhaltenen ($0''.435$) ist wohl mehr zufällig; der aus (32) folgende Werth wird übrigens praktisch immer genügend genau sein, wenn n nicht zu klein ist. Ja man kann, bei grösserem n, statt der Gl. (32) ohne merklichen Fehler die einfachere:

$$r = 0.84535 \frac{\Sigma v}{n} \tag{32*}$$

anwenden; sie gibt in unserem Beispiele $r = \pm 0''.424$.

II. GENAUIGKEIT DER FUNCTIONEN MEHRERER VON EINANDER UNABHÄNGIGER BEOBACHTETER GRÖSSEN.

18. Es sei $X = f(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ eine Function mehrerer von einander unabhängiger Grössen, für welche aus directen Beobachtungen beziehungsweise die wahrscheinlichsten Werthe $a_1, a_2, a_3, \ldots$ mit den mittleren Fehlern $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots$ erhalten wurden, so ist sofort klar, dass der wahrscheinlichste Werth von $X = f(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ sein müsse, und es handelt sich daher nur noch um die Bestimmung des mittleren oder wahrscheinlichen Fehlers dieses Werthes.

Betrachten wir zunächst den einfachsten Fall, wenn X die Summe oder Differenz zweier beobachteter Grössen also

$$X = x_1 \pm x_2$$

ist. Wie immer die wahrscheinlichsten Werthe a_1, a_2 der Grössen x_1 und x_2 erhalten worden sein mögen, so kann man immer annehmen, dass beide Werthe aus einer grossen Anzahl von Beobachtungen hervorgegangen seien, und diese Anzahl für beide gleich sei, wo dann die Genauigkeiten der beiden Beobachtungsreihen den mittleren Fehlern ε_1 und ε_2 der Werthe a_1 und a_2 verkehrt proportional sein werden. Bezeichnen wir dann die wahren Fehler der angenommenen Beobachtungen

$$\text{für } x_1 \text{ mit } \Delta_1, \Delta_1', \Delta_1'', \ldots$$
$$\text{für } x_2 \text{ mit } \Delta_2, \Delta_2', \Delta_2'', \ldots$$

so sind die Fehler von X:

$$\Delta_1 \pm \Delta_2,\ \Delta_1' \pm \Delta_2',\ \Delta_1'' \pm \Delta_2'', \ldots.$$

wo bei jedem derselben beide Zeichen gleich möglich sind. Bedeutet ferner E

den mittleren Fehler von X, und n die Anzahl der angenommenen Beobachtungen, so ist zufolge der Definition des mittleren Fehlers [§. 10]:

$$n\,E^2 = (\Delta_1 \pm \Delta_2)^2 + (\Delta_1' \pm \Delta_2')^2 + (\Delta_1'' + \Delta_2'')^2 + \ldots$$
$$= [\Delta_1\Delta_1] \pm 2\,[\Delta_1\Delta_2] + [\Delta_2\Delta_2].$$

Bei einer grossen Anzahl von Beobachtungen werden aber die positiven und negativen Producte von der Form $\Delta_1\Delta_2$ gleich häufig vorkommen, so dass wir als wahrscheinlichsten Werth $[\Delta_1\Delta_2] = 0$ zu setzen haben. Da nun überdies $[\Delta_1\Delta_1] = n\,\varepsilon_1^2$, $[\Delta_2\Delta_2] = n\,\varepsilon_2^2$, so wird:

$$E^2 = \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2.$$

Ist

$$X = x_1 \pm x_2 \pm x_3,$$

so setze man $x_1 \pm x_2 = x_0$; dann wird $X = x_0 \pm x_3$, und, wenn ε_0 der mittlere Fehler von x_0, dem Vorhergehenden zufolge: $\varepsilon_0^2 = \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2$, $E^2 = \varepsilon_0^2 + \varepsilon_3^2$, somit

$$E^2 = \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2,$$

und der Satz kann auf diese Art auf die algebraische Summe einer beliebigen Anzahl beobachteter Grössen ausgedehnt werden. In Folge des constanten Verhältnisses zwischen dem mittleren und wahrscheinlichen Fehler gilt derselbe auch für letzteren. Ist daher:

$$X = x_1 \pm x_2 \pm x_3 \pm \ldots,$$

und sind $r_1, r_2, r_3, \ldots, R$ die wahrscheinlichen Fehler von $x_1, x_2, x_3, \ldots, X$, so hat man:

$$R = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + \ldots\ldots} = \sqrt{[rr]}. \tag{33}$$

Bezeichnen wir mit $p_1, p_2, p_3, \ldots$ die Gewichte von $x_1, x_2, x_3, \ldots$ mit P das Gewicht von X, so ist, wenn r_0 der wahrscheinliche Fehler der Gewichtseinheit:

$$P = \frac{r_0^2}{R^2},\ p_1 = \frac{r_0^2}{r_1^2},\ p_2 = \frac{r_0^2}{r_2^2},\ p_3 = \frac{r_0^2}{r_3^2}\ldots,$$

folglich, zufolge der Gl. (33):

$$\frac{r_0^2}{P} = \frac{r_0^2}{p_1} + \frac{r_0^2}{p_2} + \frac{r_0^2}{p_3} + \ldots,$$

d. i.

$$P = \frac{1}{\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} + \ldots\ldots} = \frac{1}{\left[\frac{1}{p}\right]} \tag{34}$$

In dem häufig vorkommenden Falle, dass $X = x_1 \pm x_2$, also aus 2 Theilen zusammengesetzt ist, hat man

$$R = \sqrt{r_1^2 + r_2^2},\quad P = \frac{p_1 p_2}{p_1 + p_2}. \tag{35}$$

Sind die Werthe von x_1, x_2, x_3, ... gleich genau, so wird $r_1 = r_2 = r_3 \ldots = r$, $p_1 = p_2 = \ldots p$, somit, wenn n die Anzahl dieser Werthe:

$$R = r\sqrt{n}, \quad P = \frac{p}{n}. \tag{36}$$

Aus diesen Formeln folgt der für die Praxis wichtige Satz, dass, wenn eine Grösse durch Zusammenlegung mehrerer Theile bestimmt werden muss, der wahrscheinliche Fehler der algebraischen Summe wie die Quadratwurzel aus der Anzahl der Theile zunimmt, oder das Gewicht der Summe der Anzahl der Theile verkehrt proportional ist. Man wird daher immer trachten, in solchen Fällen die Anzahl der Theile möglichst gering zu machen.

Beispiel. Man habe die Zenithdistanz eines Sternes im Meridiane beobachtet: $z = 19^0\,48'\,12''.7$ mit einem wahrscheinlichen Fehler $r_1 = \pm 2''.5$; die Declination des Sternes sei $\delta = 28^0\,12'\,27''.7$ und der wahrscheinliche Fehler derselben $r_2 = \pm 0''.8$; hieraus findet man die Breite φ des Beobachtungsortes mittelst der Formel $\varphi = z + \delta = 48^0\,0'\,40''.4$ und der wahrscheinliche Fehler dieser Bestimmung ist, nach (33):

$$R = \pm \sqrt{(2.5)^2 + (0.8)^2} = \pm 2''.62.$$

Dieser Satz findet auch Anwendung auf den Fall, wenn ein Resultat durch mehrere von einander unabhängige Beobachtungen zu Stande kommt, deren jede einem gewissen Fehler unterworfen ist. So erfordert z. B. die Beobachtung einer Richtung mit einem Winkelmessinstrumente die Einstellung des Fernrohres auf das Object und die Ablesung des Kreises; nennt man daher α den mittleren Einstellungsfehler (Visurfehler), β den mittleren Fehler einer Ablesung, so ist der mittlere Fehler einer beobachteten Richtung $\varepsilon = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$. Die Messung eines Winkels erfordert die Beobachtung zweier Richtungen, deren jede dem mittleren Fehler ε unterworfen ist; der mittlere Fehler des gemessenen Winkels ist daher nach Gl. (36) $= \varepsilon\sqrt{2} = \sqrt{2\alpha^2 + 2\beta^2}$.

19. Die gegebene Function sei nun:

$$X = \alpha x,$$

wo α einen bekannten Coefficienten bedeutet. Ist aus Beobachtungen der wahrscheinlichste Werth $x = a$ hervorgegangen mit einem wahrscheinlichen Fehler r, so ist offenbar $X = \alpha a$ der wahrscheinlichste Werth von X, und da jeder Fehler $\pm \varDelta$ in x den Fehler $\pm \alpha \varDelta$ in X erzeugt, so wird der wahrscheinliche Fehler in X:

$$R = \pm \alpha r. \tag{37}$$

Hieraus folgt nun mit Rücksicht auf Gl. (33) im vorhergehenden §. der folgende Satz:

Ist:

$$X = \alpha_1 x_1 \pm \alpha_2 x_2 \pm \alpha_3 x_3 \pm \ldots, \tag{38}$$

und sind $r_1, r_2, r_3, \ldots$ die wahrscheinlichen Fehler der wahrscheinlichsten Werthe von $x_1, x_2, x_3, \ldots, R$ jener von X, so hat man:

$$R^2 = \alpha_1^2 r_1^2 + \alpha_2^2 r_2^2 + \alpha_3^2 r_3^2 + \ldots = [\alpha^2 r^2]. \tag{39}$$

Dieselbe Relation gilt für die mittleren Fehler. Bezeichnet man mit P das Gewicht von X, mit $p_1, p_2, \ldots$ die Gewichte der wahrscheinlichsten Werthe von $x_1, x_2, \ldots$, so wird

$$\frac{1}{P} = \frac{\alpha_1^2}{p_1} + \frac{\alpha_2^2}{p_2} + \frac{\alpha_3^2}{p_3} + \ldots = \left[\frac{\alpha\alpha}{p}\right]. \tag{40}$$

Häufig kommt der Fall vor, dass eine Grösse X durch die halbe Summe oder Differenz zweier beobachteter Grössen x_1, x_2 bestimmt wird, also:

$$X = \tfrac{1}{2}(x_1 \pm x_2)$$

ist; für diesen Fall folgt aus (40):

$$P = \frac{4 p_1 p_2}{p_1 + p_2}, \tag{41}$$

wenn p_1 und p_2 die Gewichte von x_1 und x_2.

Ist $r_1 = r_2 = r_3 = \ldots = r$, also auch $p_1 = p_2 = p_3 = \ldots = p$, d. h. sind die beobachteten Werthe von $x_1, x_2, x_3, \ldots$ gleich genau, so hat man:

$$R = \pm r\sqrt{[\alpha\alpha]}, \quad \frac{1}{P} = \frac{[\alpha\alpha]}{p}. \tag{42}$$

Diese Formeln führen, noch weiter specialisirt, wieder auf die bekannten Ausdrücke des wahrscheinlichen Fehlers und Gewichtes des arithmetischen Mittels zurück. Lässt man nämlich den Ausdruck (38) rechter Hand aus n positiven Gliedern bestehen, und setzt $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 \ldots = \alpha_n = \frac{1}{n}$, so wird $X = \frac{[x]}{n}$ das arithmetische Mittel aus $x_1, x_2, \ldots x_n$, und vermöge der Glgn. (42) wird der wahrscheinliche Fehler desselben $R = r\sqrt{n \cdot \frac{1}{n^2}} = \frac{r}{\sqrt{n}}$, und dessen Gewicht $P = np$, oder für $p = 1 : P = n$, übereinstimmend mit den Formeln (26) und (27).

Aus der Vergleichung der beiden Formeln (36) und (37) folgt weiters, dass, wenn eine Grösse X nicht unmittelbar als Ganzes bestimmt werden kann, es vortheilhafter ist, dieselbe aus mehreren direct beobachteten Theilen zusammenzusetzen, als einen aliquoten Theil zu messen, und durch Vervielfachung desselben X zu bilden. Im ersteren Falle ist nämlich, wenn n Theile gemessen wurden, deren Summe $= X$ ist, zufolge der Glgn. (36):

$$R = r\sqrt{n}, \quad P = \frac{p}{n},$$

wenn r der wahrscheinliche Fehler, und p das Gewicht eines Theiles. Hat man aber mit derselben Genauigkeit nur den n^{ten} Theil von X, d. i. $x = \frac{X}{n}$ gemessen, wo dann $X = nx$ ist, so wird, nach Gl. (37) und (40)

$$R = nr, \quad P = \frac{p}{n^2},$$

somit der wahrscheinliche Fehler von X, im letzteren Falle $\sqrt{n}$ mal grösser, das Gewicht n mal kleiner, als im ersteren, und man müsste, um in X dieselbe Genauigkeit zu erlangen, den n^{ten} Theil x n mal messen.

20. Betrachten wir nun den allgemeinen Fall, wo

$$X = f(x_1, x_2, x_3, \ldots) \tag{43}$$

irgend eine beliebige Function von $x_1, x_2, \ldots$ bedeuten mag, und setzen $x_1 = a_1 + \xi_1$, $x_2 = a_2 + \xi_2$, $x_3 = a_3 + \xi_3, \ldots$, unter $a_1, a_2, \ldots$ wieder die wahrscheinlichsten Werthe von $x_1, x_2, \ldots$ verstanden, so werden $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots$ sehr kleine Grössen sein, deren wahrscheinlichster Werth $= 0$ ist, mit den wahrscheinlichen Fehlern $r_1, r_2, r_3, \ldots$, welche den Werthen $a_1, a_2, a_3, \ldots$ zukommen. Nach dem Taylor'schen Lehrsatze hat man nun, mit Vernachlässigung der höheren Potenzen der kleinen Grössen $\xi_1, \xi_2, \ldots$:

$$X = f(a_1, a_2, a_3, \ldots) + \frac{dX}{dx_1}\xi_1 + \frac{dX}{dx_2}\xi_2 + \frac{dX}{dx_3}\xi_3 + \ldots.$$

Setzt man die constante Grösse $f(a_1, a_2, a_3, \ldots) = A$, schreibt die Gleichung in der Form:

$$X - A = \frac{dX}{dx_1}\xi_1 + \frac{dX}{dx_2}\xi_2 + \frac{dX}{dx_3}\xi_3 + \ldots,$$

und beachtet, dass auch die Differenzialquotienten $\frac{dx}{dx_1}$ u. s. w. constante Grössen sind, da in denselben $x_1 = a_1$, $x_2 = a_2$ u. s. w. gesetzt werden muss, so haben wir es wieder mit dem im vorhergehenden §. behandelten Falle zu thun, und der wahrscheinliche Fehler von X wird nach Gl. (39):

$$R = \pm \sqrt{\left(\frac{dX}{dx_1}\right)^2 r_1^2 + \left(\frac{dX}{dx_2}\right)^2 r_2^2 + \left(\frac{dX}{dx_3}\right)^2 r_3^2 + \ldots} \tag{44}$$

Beispiel. Zur Bestimmung einer Distanz $AB = a$, welche nicht direct gemessen werden konnte, wurden die Entfernungen $AC = b$ und $BC = c$ von einem dritten Puncte und der Winkel $ACB = A$ gemessen und folgende Werthe erhalten:

b = 53.466 Meter, m. d. wahrscheinlichen Fehler $r_1 = \pm 0.0025$ Meter,
c = 60.611 „ „ „ „ „ $r_2 = \pm 0.0030$ „
$A = 163^0\ 15'\ 20''$ „ „ „ „ $r_3 = \pm 10''$.

Es ist nun: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$, woraus sich $a = 112.866$ Meter ergibt; ferner findet man:

$$\frac{da}{db} = \frac{b - c\cos A}{a} = 0.988\,, \quad \frac{da}{dc} = \frac{c - b\cos A}{a} = 0.991\,,$$

$$\frac{da}{dA} = \frac{bc\sin A}{a} = 8.272.$$

Der Fehler des Winkels A, in Bogenmaass für den Halbmesser 1 ausgedrückt, ist $r_3 = 10'' \sin 1'' = 0.00004848$, und man erhält daher als wahrscheinlichen Fehler von a

$$R = \sqrt{\{(0.988 \times 0.0035)^2 + (0.991 \times 0.0040)^2 + (8.27 \times 10'' \sin 1'')^2\}}$$
$$= \pm\ 0.0053 \text{ Meter.}$$

II. BESTIMMUNG DER WAHRSCHEINLICHSTEN WERTHE MEHRERER VON EINANDER UNABHÄNGIGER GRÖSSEN AUS BEOBACHTETEN WERTHEN VON FUNCTIONEN DERSELBEN.

21. Es seien x, y, z, u. s. w. unbekannte Grössen, k an der Zahl, und

$$V = f(x, y, z, \ldots a, b, c, \ldots)$$

eine beliebige Function derselben, deren analytischer Ausdruck bekannt ist. Aus Beobachtungen habe man einen Werth M_1 der Function V_1 erhalten, welcher den bekannten Werthen a_1, b_1, c_1, ... der Coefficienten $a, b, c, \ldots$ entspricht, so folgt hieraus die Gleichung:

$$M_1 = f(x, y, z, \ldots a_1, b_1, c_1, \ldots).$$

Jede neu hinzukommende, unter anderen Umständen, d. h. bei geänderten Werthen von $a, b, c, \ldots$ angestellte Beobachtung liefert eine neue Gleichung:

$$M_2 = f(x, y, z, \ldots a_2, b_2, c_2, \ldots),$$
$$M_3 = f(x, y, z, \ldots a_3, b_3, c_3, \ldots),$$
u. s. w.

So lange die Anzahl der Beobachtungen, also auch der Gleichungen kleiner ist als die Anzahl der Unbekannten, ist es bekanntlich unmöglich, bestimmte Werthe der Unbekannten zu finden. Ist die Anzahl der Gleichungen gleich jener der Unbekannten, so lässt sich nichts thun, als die Gleichungen auf gewöhnliche Weise aufzulösen; übersteigt aber die Anzahl m der Gleichungen jene k der Unbekannten, so wird es, in Folge der den beobachteten Functionswerthen M_1, M_2, u. s. w, anhaftenden Beobachtungsfehler kein System von Werthen der Unbekannten geben, welches sämmtlichen Gleichungen strenge Genüge leistet, und es entsteht nun die Aufgabe, jenes System zu finden, welches sämmtliche Gleichungen möglichst nahe befriediget oder mit Rücksicht auf die vorliegenden Beobachtungen das wahrscheinlichste ist.

Hiebei sind zwei Classen von Aufgaben zu unterscheiden. Die unbekannten Grössen x, y, z, u. s. w. sind entweder von einander völlig unabhängig, so dass theoretisch jeder Werth irgend einer derselben mit jedem Werthe aller übrigen verträglich ist; oder es können gewisse Bedingungen existiren, welchen