Jene Hypothese wird daher auch die wahrscheinlichste sein, für welche die berechnete Wahrscheinlichkeit des beobachteten Ereignisses am grössten wird.

Will man die Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Hypothesen selbst bestimmen, so seien diese H, H', H'', und man hat in Folge der eben ausgesprochenen Proportionalität: $H = CW$, $H' = CW'$, $H'' = CW''$, wo C eine constante Grösse; hieraus folgt: $H + H' + H'' = C\,(W + W' + W'')$; sind aber nur drei Hypothesen möglich, so muss eine die richtige sein; es ist also $H + H' + H'' = 1$, somit:

$$C = \frac{1}{W + W' + W''},$$

und

$$H = \frac{W}{W + W' + W''}, \quad H' = \frac{W'}{W + W' + W''}, \quad H'' = \frac{W''}{W + W' + W''}.$$

Die Wahrscheinlichkeit der Hypothese ist also gleich der nach ihr berechneten Wahrscheinlichkeit des Ereignisses, getheilt durch die Summe der nach allen möglichen Hypothesen berechneten Wahrscheinlichkeiten derselben.

In obigem Beispiele erhält man:

$$H = \frac{405}{580}, \quad H' = \frac{160}{580}, \quad H'' = \frac{15}{580}.$$

I. BEGRÜNDUNG DER THEORIE DER KLEINSTEN QUADRATE. — ANWENDUNG DERSELBEN ZUR BESTIMMUNG DES WAHRSCHEINLICHSTEN WERTHES EINER UNBEKANNTEN GRÖSSE.

3. Wie unregelmässig und scheinbar gesetzlos auch das Auftreten der zufälligen Beobachtungsfehler sein mag, so lassen sich doch schon aus dem Begriffe derselben einige charakteristiche Eigenschaften folgern. Vorausgesetzt, dass die Beobachtungen unter gleichen Umständen und mit gleicher Sorgfalt angestellt sind, werden 1) bei einer grösseren Anzahl derselben positive und negative Beobachtungsfehler von derselben absoluten Grösse gleich häufig vorkommen, d. i. gleich wahrscheinlich sein; denn im Gegenfalle müsste das Ueberwiegen der einen oder der andern durch eine constant wirkende Ursache hervorgebracht, d. i. ein constanter Fehler vorhanden sein, welcher Fall im Vorhinein ausgeschlossen wurde. 2) Kleinere Fehler müssen häufiger vorkommen als grössere und sind demnach wahrscheinlicher; denn um einen grösseren Beobachtungsfehler zu erzeugen, müssen offenbar mehrere zufällig wirkende Fehlerquellen in demselben Sinne zusammenwirken oder eine oder die andere derselben in ungewöhnlich hohem Grade auftreten. 3) Theoretisch genommen wird ein beliebig grosser Beobachtungsfehler nicht als unmöglich zu betrachten sein; in der Praxis jedoch wird es bei jeder Gattung von Beobachtungen eine wenn auch nicht scharf bestimmbare Grenze geben, welche die Beobachtungsfehler nicht überschreiten, weil wir immer annehmen müssen, dass die

Beobachtungen mit jener Genauigkeit gemacht sind, welche die in Rede stehende Beobachtungsgattung gestattet.

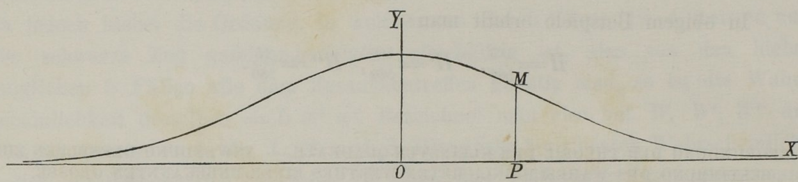
Hieraus folgt, dass die Wahrscheinlichkeit W eines zufälligen Beobachtungsfehlers $\varDelta$ von dessen Grösse abhängt und somit als Function desselben betrachtet werden darf, so dass man setzen kann:

$$W = \varphi(\varDelta), \tag{1}$$

wo φ ein Functionszeichen bedeutet. Die Function wird eine gerade sein müssen, damit sie für gleiche positive und negative Werthe von $\varDelta$ denselben Werth erhält, wie dies die erste der oben bemerkten Eigenschaften der zufälligen Beobachtungsfehler erfordert; zufolge der zweiten muss ihr Werth mit zunehmendem $\varDelta$ abnehmen und für $\varDelta = 0$ ein Maximum erreichen; aus der dritten folgt endlich, dass wenn $\varDelta$ über eine gewisse Grenze hinaus wächst, $\varphi(\varDelta)$ sehr klein werden oder der Grenze Null sich nähern muss.

Hiernach kann man sich von dem Verlaufe der Function $\varphi(\varDelta)$ schon eine Vorstellung bilden; betrachtet man nämlich die Gl. (1) als Gleichung einer Curve, indem man die Fehler $\varDelta = OP$ (Fig. 1) als Abscissen, und die

Fig. 1.



zugehörigen Wahrscheinlichkeiten $W = PM$ als Ordinaten ansieht, so wird aus der Construction derselben eine Curve von der in der Figur dargestellten Gestalt hervorgehen, welche symmetrisch ist zu beiden Seiten der y-Axe und der Axe der x sich asymtotisch nähert.

4. Kennt man die Wahrscheinlichkeit $\varphi(\varDelta)$ eines Fehlers $\varDelta$ für eine gewisse Gattung von Beobachtungen, so lässt sich auch leicht die Wahrscheinlichkeit angeben, dass der Fehler einer einzelnen Beobachtung dieser Gattung zwischen zwei gegebenen Grenzen a und b liege. Theilen wir das Intervall $b - a$ in n gleiche Theile, und setzen $\frac{b-a}{n} = \delta$, so ist die Wahrscheinlichkeit der Fehler:

$$a,\ a+\delta,\ a+2\delta, \ldots\ldots a+(n-1)\delta$$

beziehungsweise:

$$\varphi(a),\ \varphi(a+\delta),\ \varphi(a+2\delta), \ldots\ldots \varphi[a+(n-1)\delta], \tag{m}$$

und die Wahrscheinlichkeit, dass irgend einer dieser Fehler, gleichgiltig welcher, eintrete, zufolge §. 2, II:

$$\varphi(a) + \varphi(a+\delta) + \varphi(a+2\delta) + \ldots\ldots + \varphi[a+(n-1)\delta]. \tag{n}$$

Lassen wir nun δ unendlich klein werden, so umfasst die Reihe (m) alle möglichen zwischen a und b liegenden Fehler und die Summe (n) gibt dann die Wahrscheinlichkeit, dass der Fehler überhaupt zwischen den Grenzen a und b liege. Es ist aber, wenn Δ die unabhängig Veränderliche, und δ eine unendlich abnehmende Grösse bedeutet, vermöge des Begriffes eines bestimmten Integrals:

$$\int_a^b \varphi(\Delta)\, d\Delta = \delta \Big[\varphi(a) + \varphi(a+\delta) + \varphi(a+2\delta) + \cdot\cdot + \varphi[a+(n-1)\delta] \Big],$$

oder

$$\int_a^b \varphi(\Delta)\, d\Delta = \delta \sum_a^b \varphi(\Delta), \tag{p}$$

wenn man mit $\sum\limits_a^b \varphi(\Delta)$ die Summe der unendlich vielen Werthe bezeichnet, welche aus $\varphi(\Delta)$ hervorgehen, wenn man Δ von a bis b durch unendlich kleine Incremente δ wachsen lässt. Nennt man daher $\Phi(a, b)$ die Wahrscheinlichkeit, dass der Fehler zwischen den Grenzen a und b liege, so hat man:

$$\Phi(a, b) = \frac{1}{\delta} \int_a^b \varphi(\Delta)\, d\Delta. \tag{2}$$

Hieraus folgt weiters:

$$\frac{1}{\delta} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\Delta)\, d\Delta = 1, \tag{3}$$

da es gewiss ist, dass der Fehler zwischen den Grenzen $-\infty$ und $+\infty$ liegen m u s s, die diesem Falle entsprechende Wahrscheinlichkeit demnach zur Gewissheit wird, also der Einheit gleich ist.

Mit Hilfe der Gl. (2) kann $\Phi(a, b)$ sofort berechnet werden, sobald die Form der Function φ bekannt ist, zu deren Kenntniss wir mittelst des im folgenden §. aufgestellten Satzes gelangen.

5. W e n n z u r B e s t i m m u n g e i n e r u n b e k a n n t e n G r ö s s e m e h r e r e v o n e i n a n d e r u n a b h ä n g i g e , u n t e r g l e i c h e n U m s t ä n d e n u n d m i t g l e i c h e r S o r g f a l t a n g e s t e l l t e B e o b a c h t u n g e n v o r l i e g e n , s o i s t d a s a r i t h m e t i s c h e M i t t e l a u s a l l e n d e r w a h r s c h e i n l i c h s t e a u s d i e s e n B e o b a c h t u n g e n f o l g e n d e W e r t h d e r U n b e k a n n t e n.

Ein strenger Beweis lässt sich für diesen Satz wohl nicht führen, allein er ist so sehr in der Natur der Sache begründet, dass man ihn seit jeher als unbedingt giltig angenommen hat, und in der That nichts anderes als der einfachste Ausdruck jener Eigenschaften, welche wir in §. 3 als charakteristische Merkmale der zufälligen Beobachtungsfehler erkannt haben. Bezeichnen wir nämlich mit a_1, a_2, a_3, ... a_n die aus n Beobachtungen hervorgegangenen

Werthe der Unbekannten, mit A den wahren uns unbekannten Werth derselben, so sind:

$$\Delta_1 = A - a_1\,,\ \Delta_2 = A - a_2\,,\ \Delta_3 = A - a_3\,, \ldots \Delta_n = A - a_n$$

die wahren Fehler der Beobachtungen; durch Addition dieser Gleichungen und Division mit n folgt:

$$A = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots + a_n}{n} + \frac{\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \ldots\ldots + \Delta_n}{n};$$

es ist aber

$$x = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots + a_n}{n} \tag{4}$$

das arithmetische Mittel aller Beobachtungen, folglich:

$$A = x + \frac{\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \ldots\ldots + \Delta_n}{n}.$$

Da nun bei Beobachtungen von gleicher Güte positive und negative Beobachtungsfehler von derselben absoluten Grösse gleich wahrscheinlich sind oder gleich häufig vorkommen werden, so muss die Summe $\Delta_1 + \Delta_2 + \ldots\ldots + \Delta_n$, und um so mehr der Quotient $\frac{\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \ldots\ldots + \Delta_n}{n}$ sich der Grenze Null nähern und zwar um so mehr, je grösser die Anzahl der Beobachtungen ist, und folglich bei einer unendlichen Anzahl von Beobachtungen das arithmetische Mittel x dem wahren Werthe A gleich werden.

Schreibt man die Gleichung (4) in folgender Form:

$$(x - a_1) + (x - a_2) + (x - a_3) + \ldots\ldots + (x - a_n) = 0\,, \tag{5}$$

wo nun $(x - a_1)$, $(x - a_2)$, u. s. w., die sogenannten übrigbleibenden Fehler der Beobachtungen sind, wenn man das arithmetische Mittel x als den wahrscheinlichsten Werth annimmt, so sieht man, dass durch letztere Annahme die Summe der übrigbleibenden Fehler $= 0$ gemacht also die Bedingung erfüllt wird, welche strenge genommen erst bei einer unendlichen Anzahl von Fehlern stattfindet; man kann daher gewiss sein, sich durch diese Annahme der Wahrheit so weit zu nähern, als es die begrenzte Anzahl der vorliegenden Beobachtungen erlaubt und durch Vermehrung dieser Anzahl der Wahrheit immer näher zu kommen.

6. Die Bestimmung der Function $\varphi(\Delta)$ unterliegt nunmehr keiner Schwierigkeit. Da dieselbe nur von der Natur der zufälligen Beobachtungsfehler, nicht aber von der Anzahl der zu bestimmenden Unbekannten abhängen kann, so können wir der Ableitung den einfachsten Fall zu Grunde legen, in welchem nur eine Unbekannte zu bestimmen ist.

Bezeichnen wir also wieder mit a_1, a_2, $\ldots\ldots a_n$ die aus n unter gleichen Umständen und mit gleicher Sorgfalt angestellten Beobachtungen hervorgegangenen Werthe einer unbekannten Grösse, so sind, wenn wir für letztere irgend einen Werth x annehmen:

$$\varDelta_1 = x - a_1,\ \varDelta_2 = x - a_2, \ldots\ldots \varDelta_n = x - a_n$$

die dieser Annahme entsprechenden Fehler der Beobachtungen, und die Wahrscheinlichkeit, dass bei n Beobachtungen gerade diese Fehler eintreten oder zusammentreffen, wird, vermöge §. 2. IV. ausgedrückt durch das Product:

$$W = \varphi(x - a_1) \cdot \varphi(x - a_2) \cdot \varphi(x - a_3) \ldots\ldots \varphi(x - a_n). \tag{6}$$

Jeder willkürlich angenommene Werth x (Hypothese) erzeugt ein bestimmtes Fehlersystem, welchem eine bestimmte Wahrscheinlichkeit W entspricht, und es muss nach dem in §. 2, V aufgestellten Satze jener Werth der Unbekannten (d. i. jene Hypothese) die wahrscheinlichste sein, für welche die nach Gl. (6) berechnete Wahrscheinlichkeit des resultirenden Fehlersystems ein Maximum wird. Schreibt man diese Gleichung in der Form:

$$\log W = \log \varphi(x - a_1) + \log \varphi(x - a_2) + \ldots\ldots + \log \varphi(x - a_n),$$

so erhält man durch Differenziation nach x als Bedingung des Maximums:

$$\frac{\varphi'(x - a_1)}{\varphi(x - a_1)} + \frac{\varphi'(x - a_2)}{\varphi(x - a_2)} + \ldots\ldots + \frac{\varphi'(x - a_n)}{\varphi(x - a_n)} = 0,$$

aus welcher Gleichung der wahrscheinlichste Werth von x hervorgehen muss. Dieser ist aber in dem vorausgesetzten Falle kein anderer als das arithmetische Mittel aus allen Beobachtungen, für welches die Gleichung (5):

$$(x - a_1) + (x - a_2) + \ldots\ldots + (x - a_n) = 0$$

besteht, und es müssen daher beide Gleichungen denselben Werth x darbieten. Gibt man aber der vorhergehenden Gleichung die Form:

$$(x - a_1)\frac{\varphi'(x - a_1)}{(x - a_1)\,\varphi(x - a_1)} + (x - a_2)\frac{\varphi'(x - a_2)}{(x - a_2)\,\varphi(x - a_2)} + \cdots$$
$$+ (x - a_n)\frac{\varphi'(x - a_n)}{(x - a_n)\,\varphi(x - a_n)} = 0,$$

so erkennt man leicht, dass dies nur dann möglich ist, wenn

$$\frac{\varphi'(x - a_1)}{(x - a_1)\,\varphi(x - a_1)} = \frac{\varphi'(x - a_2)}{(x - a_2)\,\varphi(x - a_2)} = \cdots = \frac{\varphi'(x - a_n)}{(x - a_n)\,\varphi(x - a_n)} = k,$$

wo k eine Constante. Man hat demnach, wenn irgend einer der Fehler mit $\varDelta$ bezeichnet wird:

$$\frac{\varphi'(\varDelta)}{\varDelta\,\varphi(\varDelta)} = k,$$

oder, da $d\varphi(\varDelta) = \varphi'(\varDelta)\,d\varDelta$:

$$\frac{d\varphi(\varDelta)}{\varphi(\varDelta)} = k\varDelta\,d\varDelta;$$

hieraus folgt durch Integration:

$$\log \varphi(\Delta) = \tfrac{1}{2}k\Delta^2 + \log c,$$

oder

$$\varphi(\Delta) = c e^{\frac{1}{2}k\Delta^2},$$

wo c die Integrations-Constante, und e die Basis der natürlichen Logarithmen bedeutet. Da $\varphi(\Delta)$ mit zunehmendem Δ abnehmen muss, so muss k wesentlich negativ sein; setzt man also $\frac{1}{2}k = -h^2$, so wird:

$$\varphi(\Delta) = c e^{-h^2\Delta^2}. \tag{7}$$

Die Constante c bestimmt sich mit Hilfe der Gl. (3), welche durch Substitution des eben gefundenen Werthes von $\varphi(\Delta)$ in:

$$\frac{c}{\delta}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2\Delta^2} d\Delta = 1,$$

oder, wenn man $h\Delta = t$ setzt, in:

$$\frac{c}{\delta h}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = 1$$

sich verwandelt. Es ist aber bekanntlich:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}\,^{*}),$$

---

*) Betrachtet man zunächst das Integral $J = \int_0^\infty e^{-t^2} dt$, und beachtet, dass der Werth eines bestimmten Integrals nur von den Grenzen nicht aber von dem Namen der Veränderlichen abhänge, so hat man auch $J = \int_0^\infty e^{-x^2} dx$, und somit durch Multiplication:

$$J^2 = \int_0^\infty e^{-t^2} dt \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(t^2+x^2)} dt\, dx;$$

setzt man nun $x = yt$, wo y eine neue Veränderliche ist, in Bezug auf welche, wie man leicht sieht, die Grenzen dieselben bleiben, so wird $dx = t\,dy$, und

$$J^2 = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-t^2(1+y^2)} t\, dt\, dy = \int_0^\infty dy \int_0^\infty e^{-t^2(1+y^2)} t\, dt;$$

die Integration nach t kann nun ausgeführt werden; es ist:

$$\int e^{-t^2(1+y^2)} t\, dt = -\frac{e^{-t^2(1+y^2)}}{2(1+y^2)},$$

welcher Ausdruck, zwischen den Grenzen 0 und ∞ genommen, in $\frac{1}{2(1+y^2)}$ sich verwandelt. Hiemit wird:

$$J^2 = \tfrac{1}{2}\int_0^\infty \frac{dy}{1+y^2} = \tfrac{1}{2}\Big\{ \operatorname{arc\,tg} y \Big\}_0^\infty = \frac{\pi}{4},$$

folglich

$$\int_0^\infty e^{-t^2} dt = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}, \text{ und } \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = 2\int_0^\infty e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}.$$

somit:

$$c = \frac{\delta h}{\sqrt{\pi}},$$

und folglich:

$$\varphi(\Delta) = \frac{\delta h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \Delta^2}. \tag{8}$$

Die Anwesenheit eines unendlich kleinen Factors δ in diesem Ausdrucke erklärt sich dadurch, dass, bei der unendlichen Anzahl der möglichen Fehler die Wahrscheinlichkeit eines einzelnen bestimmten Fehlers nothwendig unendlich klein ist. Genauer gesprochen, drückt derselbe die Wahrscheinlichkeit aus, dass der Fehler zwischen den Grenzen Δ und $\Delta + \delta$ liege, unter δ eine unendlich kleine Zahl verstanden, wie aus den Glgn. (2) und (p) in §. 4 ohne Schwierigkeit erhellt.

7. Da der Ausdruck (8) für alle Gattungen von Beobachtungen gilt, so werden sich die einzelnen Gattungen nur durch den ihnen zukommenden Werth der Constante h unterscheiden können, deren Bedeutung sich aus folgender Betrachtung ergibt. Substituirt man den Ausdruck (8) in die Gl. (2), so erhält man für die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer Beobachtungsart, welcher ein bestimmter Werth von h zukommt, der Fehler einer einzelnen Beobachtung zwischen den Grenzen $-a$ und $+a$ liege, den Ausdruck:

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-a}^{+a} e^{-h^2 \Delta^2} d\Delta;$$

da nun positive und negative Fehler von derselben Grösse gleich wahrscheinlich sind, so wird die Wahrscheinlichkeit, dass der Fehler ohne Rücksicht auf sein Zeichen zwischen den Grenzen 0 und a liege oder die Grenze a nicht überschreite, das Doppelte des obigen Ausdruckes sein; bezeichnet man daher letztere Wahrscheinlichkeit mit $\Phi(a)$, so hat man:

$$\Phi(a) = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_0^a e^{-h^2 \Delta^2} d\Delta = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{ah} e^{-t^2} dt.$$

Für eine andere Beobachtungsart, welcher der Werth h' zukommt, ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Fehler einer einzelnen Beobachtung die Grösse a' nicht überschreite:

$$\Phi(a') = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{a'h'} e^{-t^2} dt.$$

Setzen wir nun $\Phi(a) = \Phi(a')$, d. i. nehmen wir an, dass bei der einen Beobachtungsart ein Fehler innerhalb der Grenzen 0 und a eben so wahrscheinlich sei, wie bei der andern ein Fehler zwischen 0 und a', so muss, da der Werth eines bestimmten Integrals nur von dem Werthe der Grenzen abhängt, zwischen welchen dasselbe genommen ist,

$$ah = a'h',$$

oder $h:h' = a':a$ sein, d. i. die Werthe von h verhalten sich verkehrt, wie gleich wahrscheinliche Fehler bei beiden Beobachtungsarten. Eine Beobachtungsart ist aber offenbar für um so genauer zu halten, je kleiner die Wahrscheinlichkeit irgend eines Fehlers $= a$, also, vermöge der obigen Proportion, je grösser h ist. Die Grösse h ist demnach der Genauigkeit der Beobachtungen direct proportional und wird aus diesem Grunde von Gauss, dem Begründer der Theorie der kleinsten Quadrate, das Maass der Präcision genannt; sie bietet daher auch das Mittel dar, Beobachtungen von verschiedener Genauigkeit miteinander zu vergleichen und zu verbinden.

Bei irgend einer Beobachtungsart, welcher ein bestimmter Werth von h zukommt, verhält sich die Wahrscheinlichkeit, einen Fehler $= 0$ zu begehen, zur Wahrscheinlichkeit, den Fehler $= \varDelta$ zu begehen, wie $\varphi(0) : \varphi(\varDelta)$, d. i. wie $1 : e^{-h^2\varDelta^2}$. Hieraus folgt nun zunächst wieder die bereits erkannte Bedeutung von h; denn je grösser h ist, desto kleiner wird $e^{-h^2\varDelta^2}$, d. i. die Wahrscheinlichkeit, einen Fehler $= \varDelta$ zu begehen im Vergleiche zu einem Fehler $= 0$, um so genauer müssen also die Beobachtungen sein. Ueberdies zieht man daraus noch folgenden Satz: Hat man für eine gewisse Gattung von Beobachtungen auf irgend eine Weise gefunden, dass die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers $= 0$ zur Wahrscheinlichkeit eines Fehlers $= \varDelta$ sich verhalte, wie $1 : e^{-q\varDelta^2}$, so ist für diese Gattung von Beobachtungen das Maass der Präcision $h = \sqrt{q}$ zu setzen.

8. Wir haben im vorhergehenden §. für die Wahrscheinlichkeit, dass der Fehler ohne Rücksicht auf sein Zeichen zwischen den Grenzen 0 und a liege, oder absolut genommen die Grösse a nicht überschreite, den Ausdruck erhalten:

$$\Phi(a) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{ah} e^{-t^2} dt. \tag{9}$$

Die Berechnung des bestimmten Integrals $\int_0^{ah} e^{-t^2} dt$ mittelst unendlicher Reihen, welche nach auf- oder absteigenden Potenzen von t fortschreiten oder mit Hilfe eines Kettenbruches, findet man in verschiedenen Werken über Integralrechnung dargestellt*); eine Tafel, welche den Werth des Integrals (9) von $ah = 0$ bis $ah = 2$ gibt, enthält das Berliner astronomische Jahrbuch für 1834. Diese Tafel gibt z. B.:

für $ah = 0.47$:	$\Phi(a) = 0.49375$,
0.48	0.50275,
0.49	0.51167,
0.50	0.52050,

u. s. w.

*) Man sehe z. B. des Verfassers: „Lehrbuch der höheren Mathematik“, Wien, 1864, II. Band, Seite 378 u. ff.

Umgekehrt kann man mittelst dieser Tafel auch leicht ah finden, wenn $\Phi(a)$ gegeben ist, d. i. die Fehlergrenze a, welche zu einer gegebenen Wahrscheinlichkeit $\Phi(a)$ gehört.

Von besonderer praktischer Wichtigkeit ist hier die Bestimmung jenes Werthes des Fehlers a, für welchen die Wahrscheinlichkeit, dass dieser Werth absolut genommen nicht überschritten werde, $= \frac{1}{2}$ ist; man nennt diesen Fehler den wahrscheinlichen Fehler; es ist dies daher der Fehler, welcher bei einer gegebenen Gattung von Beobachtungen eben so leicht überschritten, als nicht erreicht wird, oder: man kann 1 gegen 1 wetten, dass bei einer einzelnen Beobachtung dieser Gattung der Fehler kleiner sei als der wahrscheinliche Fehler. Bezeichnet man also den wahrscheinlichen Fehler mit r, so hat man $\Phi(r) = \frac{1}{2}$ zu setzen, und sieht aus obigem Täfelchen, dass der zugehörige Werth von rh zwischen 0.47 und 0.48 liege; man findet durch einfache Interpolation:

$$rh = 0.47694,$$

und hat demnach, wenn man die Zahl

$$0.47694 = \varrho$$

setzt:

$$r = \frac{\varrho}{h}, \quad h = \frac{\varrho}{r}. \tag{10}$$

Man sieht hieraus, dass der wahrscheinliche Fehler dem Maasse der Präcision oder der Genauigkeit der Beobachtungen verkehrt proportional ist, und daher gleichfalls als ein Maass für die Güte der Beobachtungen angewendet werden kann. Je kleiner der wahrscheinliche Fehler einer Reihe von Beobachtungen ist, desto genauer sind dieselben, desto seltener werden Beobachtungsfehler von beträchtlicherer Grösse zu erwarten sein, weil immer die halbe Anzahl sämmtlicher Fehler der absoluten Grösse nach unter dem wahrscheinlichen Fehler liegt.

Man kann daher auch, wenn für eine grössere Beobachtungsreihe die Fehler der einzelnen Beobachtungen vorliegen, den wahrscheinlichen Fehler dieser Beobachtungen näherungsweise dadurch finden, dass man sämmtliche Fehler nach ihrer Grösse ohne Rücksicht auf das Zeichen ordnet; der in der Mitte liegende Fehler bei einer geraden Anzahl von Beobachtungen, oder das arithmetische Mittel aus den zwei mittleren bei einer ungeraden Anzahl, wird ein genäherter Werth des wahrscheinlichen Fehlers sein.

9. Setzt man in Gl. (9) $a = kr$, d. i. drückt man den Fehler a in Theilen des wahrscheinlichen Fehlers aus, so wird $ah = krh = k\varrho$, und

$$\Phi(kr) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\varrho k} e^{-t^2} dt; \tag{11}$$

dieser Ausdruck gibt die Wahrscheinlichkeit, dass bei Beobachtungen, deren wahrscheinlicher Fehler $= r$ ist, der Fehler einer einzelnen Beobachtung die

Grösse kr, d. i. einen gegebenen aliquoten Theil, oder ein gegebenes Vielfaches des wahrscheinlichen Fehlers nicht überschreite.

Nach dem in §. 2, II. aufgestellten Satze wird dann die Anzahl der Fehler, welche unter N Fehlern die Grösse kr nicht überschreiten, ausgedrückt durch

$$N \,.\, \Phi(kr),$$

und die Anzahl der Fehler, welche zwischen gegebenen Grenzen kr und $k'r$ liegen, wird sein:

$$N\,[\Phi(k'r) - \Phi(kr)].$$

Zur Berechnung des Integrals (11) kann die in §. 8 erwähnte Tafel benützt werden; ist nämlich k gegeben, so hat man sofort: $a = kr = k\,.\,\frac{\varrho}{h}$, somit $ah = k\varrho$. Sucht man z. B. die Wahrscheinlichkeit, dass der Fehler einer Beobachtung 0.1 des wahrscheinlichen Fehlers nicht überschreite, so hat man $k = 0.1$ zu setzen, womit $ah = 0.1\,\varrho = 0.047694$ wird; mit diesem Werthe von ah gibt die Tafel $\Phi(a) = 0.05377$ für die gesuchte Wahrscheinlichkeit; d. i. unter 1000 Beobachtungen irgend welcher Gattung wird man immer erwarten dürfen, sehr nahe 54 zu finden, deren Fehler 0.1 des wahrscheinlichen Fehlers nicht überschreitet. Um den Uebergang von dem gegebenen Werthe von k zu dem Argumente ah der oberwähnten Tafel zu ersparen, ist es zweckmässig die Tafel so umzuformen, dass sie die Werthe des Integrals (11) unmittelbar mit dem Argumente k gebe. Dies leistet die folgende Tafel, welche auszugsweise dem Berliner astronomischen Jahrbuche von 1834 entlehnt ist.

Aus dieser Tafel übersieht man mit einem Blick, dass unter 1000 Beobachtungen irgend welcher Gattung sich befinden werden:

264	Beob.,	deren	Fehler	nicht	grösser	als	$0.5\,r$,
500	„	„	„	„	„	„	r,
688	„	„	„	„	„	„	$1.5\,r$,
823	„	„	„	„	„	„	$2.0\,r$,
908	„	„	„	„	„	„	$2.5\,r$,
957	„	„	„	„	„	„	$3.0\,r$,
982	„	„	„	„	„	„	$3.5\,r$,
993	„	„	„	„	„	„	$4.0\,r$,

also nur 7 Fehler grösser als $4r$, nur einer grösser als $5r$.

Durch Subtraction je zweier dieser Zahlen findet man weiters, dass von 1000 Fehlern:

zwischen	0	und	$0.5\,r$	liegen	werden	264	Fehler,
„	$0.5\,r$	„	$1.0\,r$	„	„	236	„
„	$1.0\,r$	„	$1.5\,r$	„	„	188	„
„	$1.5\,r$	„	$2.0\,r$	„	„	135	„

u. s. w.

Wie nahe diese theoretische Bestimmung mit der Erfahrung übereinstimmt, zeigt folgendes Beispiel. Aus 470 Bradlei'schen Beobachtungen des Rectascensionsunterschiedes der Sonne und eines der beiden Sterne α Aquilae

Tafel des Integrals: $\Phi(kr) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\varrho k} e^{-t^2} dt$; $\varrho = 0.47694$.

k	$\Phi(kr)$	k	$\Phi(kr)$	k	$\Phi(kr)$	k	$\Phi(kr)$	k	$\Phi(kr)$
0.00	0.0000	0.40	0.2127	0.80	0.4105	1.40	0.6550	2.50	0.9082
0.01	0054	0.41	2179	0.81	4152	1.42	6618	2.55	9146
0.02	0108	0.42	2230	0.82	4198	1.44	6686	2.60	9205
0.03	0161	0.43	2282	0.83	4244	1.46	6753	2.65	9261
0.04	0215	0.44	2334	0.84	4290	1.48	6818	2.70	9314
0.05	0269	0.45	2385	0.85	4336	1.50	6883	2.75	9364
0.06	0323	0.46	2436	0.86	4381	1.52	6947	2.80	9411
0.07	0377	0.47	2488	0.87	4427	1.54	7011	2.85	9454
0.08	0430	0.48	2539	0.88	4472	1.56	7073	2.90	9495
0.09	0484	0.49	2590	0.89	4517	1.58	7134	2.95	9534
0.10	0.0538	0.50	0.2641	0.90	0.4562	1.60	0.7195	3.00	9570
0.11	0591	0.51	2691	0.91	4606	1.62	7255	3.05	9603
0.12	0645	0.52	2742	0.92	4651	1.64	7313	3.10	9635
0.13	0699	0.53	2793	0.93	4695	1.66	7371	3.15	9664
0.14	0752	0.54	2843	0.94	4739	1.68	7428	3.20	9691
0.15	0806	0.55	2893	0.95	4783	1.70	7485	3.25	9716
0.16	0859	0.56	2944	0.96	4827	1.72	7540	3.30	9740
0.17	0913	0.57	2994	0.97	4871	1.74	7594	3.35	9762
0.18	0966	0.58	3044	0.98	4914	1.76	7648	3.40	9782
0.19	1020	0.59	3093	0.99	4957	1.78	7701	3.45	9800
0.20	0.1073	0.60	0.3143	1.00	0.5000	1.80	0.7753	3.50	0.9818
0.21	1126	0.61	3192	1.02	5085	1.82	7804	3.55	9834
0.22	1180	0.62	3242	1.04	5170	1.84	7854	3.60	9848
0.23	1233	0.63	3291	1.06	5254	1.86	7904	3.65	9862
0.24	1286	0.64	3340	1.08	5337	1.88	7952	3.70	9874
0.25	1339	0.65	3389	1.10	5419	1.90	8000	3.75	9886
0.26	1392	0.66	3438	1.12	5500	1.92	8047	3.80	9896
0.27	1445	0.67	3487	1.14	5581	1.94	8093	3.85	9906
0.28	1498	0.68	3535	1.16	5660	1.96	8138	3.90	9915
0.29	1551	0.69	3584	1.18	5739	1.98	8183	3.95	9923
0.30	0.1604	0.70	0.3632	1.20	0.5817	2.00	0.8227	4.00	0.9930
0.31	1656	0.71	3680	1.22	5894	2.05	8332	4.10	9943
0.32	1709	0.72	3728	1.24	5971	2.10	8433	4.20	9954
0.33	1761	0.73	3775	1.26	6046	2.15	8530	4.30	9963
0.34	1814	0.74	3823	1.28	6121	2.20	8622	4.40	9970
0.35	1866	0.75	3870	1.30	6194	2.25	8709	4.50	9976
0.36	1919	0.76	3918	1.32	6267	2.30	8792	4.60	9981
0.37	1971	0.77	3965	1.34	6339	2.35	8870	4.70	9985
0.38	2023	0.78	4012	1.36	6410	2.40	8945	4.80	9988
0.39	2075	0.79	4059	1.38	6480	2.45	9016	4.90	9991
0.40	0.2127	0.80	0.4105	1.40	0.6550	2.50	0.9082	5.00	9993

und α Canis minoris fand Bessel den wahrscheinlichen Fehler einer directen Beobachtung: $r = 0''.2637$ und verglich dann die Anzahl der Fehler, die zwischen den Grenzen $0''.0$ und $0''.1$; $0''.1$ und $0''.2$ u. s. w. immer um $0''.1$ Secunde aufsteigend der Theorie nach liegen sollen, mit den Fehlern, welche die wirkliche Erfahrung bei 470 Beobachtungen ergeben hat.

Man hat zu diesem Zwecke der Reihe nach $k = \frac{0.1}{r}, \frac{0.2}{r}, \frac{0.3}{r}$, u. s. w., also, da $\frac{1}{r} = 3.792$ ist, $k = 0.3792$, $k = 0.7584$, $k = 1.1376$ u. s. w. zu setzen, die zugehörigen Werthe von $\Phi(kr)$ aus obiger Tafel zu interpoliren und mit 470 zu multipliciren, endlich je zwei aufeinanderfolgende der so erhaltenen Zahlen von einander zu subtrahiren. Auf diese Art ergaben sich:

zwischen	Anzahl der Fehler nach der Theorie:	Erfahrung:
$0''.0$ und $0''.1$	95	94
0 .1 „ 0 .2	89	88
0 .2 „ 0 .3	78	78
0 .3 „ 0 .4	64	58
0 .4 „ 0 .5	50	51
0 .5 „ 0 .6	36	36
0 .6 „ 0 .7	24	26
0 .7 „ 0 .8	15	14
0 .8 „ 0 .9	9	10
0 .9 „ 1 .0	5	7
über 1 .0	5	8

Die Uebereinstimmung zwischen Theorie und Erfahrung lässt, wie man sieht, nichts zu wünschen übrig, und bestätiget die Richtigkeit der der Theorie zu Grunde liegenden Anschauungen über die Natur der zufälligen Beobachtungsfehler.

10. Neben dem wahrscheinlichen Fehler bedient man sich, um die Genauigkeit der Beobachtungen auszudrücken, noch des sogenannten mittleren Fehlers. Man versteht darunter jene Grösse, deren Quadrat gleich ist dem arithmetischen Mittel aus den Quadraten der wahren Beobachtungsfehler.

Bezeichnet man letztere mit Δ, Δ', Δ'', ..., so sind $\varphi(\Delta)$, $\varphi(\Delta')$, $\varphi(\Delta'')$, ... die Wahrscheinlichkeiten derselben, und es werden daher unter n Fehlern $n\varphi(\Delta)$ Fehler vorkommen von der Grösse Δ, $n\varphi(\Delta')$ von der Grösse Δ' u. s. w. Bedeutet daher ε den mittleren Fehler, so wird, zufolge der Definition:

$$\varepsilon^2 = \frac{\Delta^2 . n\varphi(\Delta) + \Delta'^2 . n\varphi(\Delta') + \Delta''^2 . n\varphi(\Delta'') + \dots}{n} = \Sigma\, \Delta^2 \varphi(\Delta).$$

Substituirt man in diesem Ausdruck für $\varphi(\Delta)$ den Werth aus Gl. (8) und nimmt, um alle möglichen Beobachtungsfehler zu umfassen, die Summe von $-\infty$ bis $+\infty$, so wird:

$$\varepsilon^2 = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \delta \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2 \Delta^2} \Delta^2,$$

d. i. vermöge der Gl. (p) in §. 4:

$$\varepsilon^2 = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2 \Delta^2} \Delta^2 d\Delta = \frac{1}{h^2 \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} t^2 \, dt.$$

Durch Anwendung des Verfahrens der theilweisen Integration, nach der Gleichung $\int u dv = uv - \int v du$, erhält man aber, $u = t$, $dv = e^{-t^2} t \, dt$ setzend:

$$\int e^{-t^2} t^2 \, dt = -\tfrac{1}{2} t e^{-t^2} + \tfrac{1}{2} \int e^{-t^2} dt.$$

Bei dem Uebergange zu den Grenzen verschwindet das Glied $t e^{-t^2}$ für $t = \pm \infty$, und es kommt:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} t^2 \, dt = \tfrac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \tfrac{1}{2} \sqrt{\pi}.$$

Hiemit erhält man nun:

$$\varepsilon^2 = \frac{1}{2 h^2}, \quad \varepsilon = \frac{1}{h \sqrt{2}}, \tag{12}$$

und mit Zuziehung der Gl. (10):

$$r = \varrho \sqrt{2} \cdot \varepsilon = 0.67449 \, \varepsilon. \tag{13}$$

Die Gleichungen (12) und (13) geben nun das Verhältniss des mittleren Fehlers zu dem Maasse der Präcision und dem wahrscheinlichen Fehler. Man sieht, dass dieses Verhältniss ein constantes, und der wahrscheinliche Fehler nahe $= \frac{2}{3}$ des mittleren Fehlers ist.

11. Es seien $a_1, a_2, \ldots a_n$ die aus n gleich genauen Beobachtungen hervorgegangenen Werthe einer unbekannten Grösse, so ist bekanntlich der wahrscheinlichste Werth x derjenige, der den Ausdruck

$$W = \varphi(x - a_1) \cdot \varphi(x - a_2) \ldots \varphi(x - a_n)$$

zu einem Maximum macht, welcher Ausdruck die Wahrscheinlichkeit des dem Werthe x entsprechenden Fehlersystems gibt, und welchem, zufolge §. 2, V auch die Wahrscheinlichkeit des dieses Fehlersystem erzeugenden Werthes x selbst proportional ist. Mit Rücksicht auf die Gl. (8) verwandelt sich dieser Ausdruck in:

$$W = \frac{\delta^n h^n}{\pi^{\frac{n}{2}}} e^{-h^2 \left\{ (x - a_1)^2 + (x - a_2)^2 + \ldots + (x - a_n)^2 \right\}},$$

und dieser wird ein Maximum für jenen Werth von x, welcher die Summe

$$S = (x - a_1)^2 + (x - a_2)^2 + \ldots + (x - a_n)^2$$

zu einem Minimum macht. Es sind aber $(x - a_1)$, $(x - a_2)$, .. die übrig bleibenden Fehler der Beobachtungen, und hieraus folgt nun der Satz:

Der wahrscheinlichste Werth der unbekannten Grösse ist derjenige, welcher die Summe der Quadrate der übrig bleibenden Fehler zu einem Minimum macht.

Die Bedingung des Minimums ist bekanntlich $\frac{dS}{dx} = 0$, d. i.

$$(x - a_1) + (x - a_2) + \ldots + (x - a_n) = 0, \tag{14}$$

woraus, als wahrscheinlichster Werth:

$$x = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}, \tag{15}$$

d. i. das arithmetische Mittel folgt, was selbstverständlich ist, da bei Ableitung der Form der Function φ der Satz vom arithmetischen Mittel zu Grunde gelegt wurde.

Das eben ausgesprochene Princip, von welchem der Name: Theorie oder Methode der kleinsten Quadrate herrührt, lässt sich nun auch sehr leicht auf Beobachtungen von verschiedener Genauigkeit ausdehnen.

In diesem Falle wird jedem der beobachteten Werthe $a_1, a_2, \ldots a_n$ ein anderes Maass der Präcision entsprechen; seien diese $h_1, h_2, \ldots$ u. s. w., so ist, wenn der Kürze wegen:

$$v_1 = x - a_1, \; v_2 = x - a_2 \ldots v_n = x - a_n$$

die Fehler der einzelnen Beobachtungen bedeuten, die Wahrscheinlichkeit des Zusammentreffens dieser Fehler:

$$W = \frac{\delta^n h_1 h_2 \ldots h_n}{\pi^{\frac{n}{2}}} e^{-(h_1^2 v_1^2 + h_2^2 v_2^2 + \ldots + h_n^2 v_n^2)},$$

und diese wird ein Maximum für jenen Werth von x, welcher die Summe

$$S = h_1^2 v_1^2 + h_2^2 v_2^2 + \ldots + h_n^2 v_n^2$$

zu einem Minimum macht. Es muss also in diesem Falle die Summe der Quadrate der Producte der übrigbleibenden Fehler in die zugehörigen Maasse der Präcision ein Minimum werden.

12. Man kann diese Bedingung noch auf eine andere für die Praxis bequemere Weise ausdrücken. Sei h das Maass der Präcision einer willkürlich gewählten Gattung von Beobachtungen, welche wir gleichsam als Maassstab der Vergleichung der Beobachtungen $a_1, a_2, \ldots$ bezüglich ihrer verschiedenen Genauigkeit annehmen, und:

$$p_1 = \frac{h_1^2}{h^2}, \quad p_2 = \frac{h_2^2}{h^2}, \ldots \; p_n = \frac{h_n^2}{h^2}; \tag{16}$$

der obige Ausdruck von W verwandelt sich dann in

$$W = \frac{\delta^n h^n \sqrt{p_1 p_2 \ldots p_n}}{\pi^{\frac{n}{2}}} e^{-h^2 (p_1 v_1^2 + p_2 v_2^2 + \ldots + p_n v_n^2)}, \tag{17}$$

und damit dieser Ausdruck ein Maximum werde, muss die Summe:

$$S = p_1 v_1^2 + p_2 v_2^2 + \dots + p_n v_n^2$$

ein Minimum werden. Man nennt die Zahlen p_1, p_2, ..., welche, wie man sieht, sich verhalten wie die Quadrate der Maasse der Präcision, die Gewichte der Beobachtungen a_1, a_2, .., und kann nun den vorhergehenden Satz auch in folgender Form aussprechen:

Der wahrscheinlichste Werth einer Grösse, für welche die Beobachtungen die Werthe a_1, a_2, .., mit den Gewichten p_1, p_2, .. ergeben haben, ist derjenige, welcher die Summe der in ihre respectiven Gewichte multiplicirten Quadrate der übrigbleibenden Fehler zu einem Minimum macht.

Schreibt man nun die letzte Gleichung in der Form:

$$S = p_1 (x - a_1)^2 + p_2 (x - a_2)^2 + \dots + p_n (x - a_n)^2,$$

so gibt die Bedingung des Minimums:

$$p_1 (x - a_1) + p_2 (x - a_2) + \dots + p_n (x - a_n) = 0, \tag{18}$$

woraus folgt:

$$x = \frac{p_1 a_1 + p_2 a_2 + \dots + p_n a_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n}. \tag{19}$$

Man erhält daher den wahrscheinlichsten Werth der Unbekannten, wenn man jede Beobachtung mit ihrem Gewichte multiplicirt, und die Summe dieser Producte durch die Summe der Gewichte dividirt, und nennt diesen Werth das arithmetische Mittel mit Rücksicht auf die Gewichte.

Setzt man der Kürze wegen:

$$p_1 a_1 + p_2 a_2 + \dots + p_n a_n = [pa],$$
$$p_1 + p_2 + \dots + p_n = [p],$$

welche Bezeichnung für Summen gleichartig gebildeter Grössen im Folgenden immer angewendet werden soll, so können die letzten Gleichungen kurz in folgender Form geschrieben werden:

$$[pv] = 0, \tag{18}$$

$$x = \frac{[pa]}{[p]}. \tag{19}$$

Ist $p_1 = p_2 = \dots = p_n$, d. i. haben die Beobachtungen gleiche Genauigkeit, so gehen beide Gleichungen über in $[v] = 0$ und $x = \frac{[a]}{n}$, übereinstimmend mit den Glgn. (14) und (15) im vorhergehenden §.

Wie schon oben bemerkt, verhalten sich die Gewichte directe wie die Quadrate der Maasse der Präcision, und da letztere vermöge der Glgn. (10) und (12) den wahrscheinlichen und mittleren Fehlern verkehrt proportional sind, so verhalten sich die Gewichte auch verkehrt wie die Quadrate der wahrscheinlichen oder mittleren Fehler.

Die Gewichte drücken daher die relative Genauigkeit der Beobachtungen aus und sind nur Verhältnisszahlen, indem hiebei das Gewicht irgend einer willkürlich gewählten Beobachtung als Einheit angenommen wird, welche Beobachtung dann die Gewichtseinheit genannt wird. So ist die oben als Vergleichungsmaassstab benützte Gattung von Beobachtungen, deren Maass der Präcision wir h genannt haben, die Gewichtseinheit, wie dies sofort erhellt, wenn man die Glgn. (16) in der Form: $p_1 : 1 = h_1^2 : h^2$, u. s. w. schreibt. Auch die Gl. (19) zeigt deutlich, dass die Gewichte nur Relativzahlen sind, indem sich der Werth von x nicht ändert, wenn man an die Stelle von $p_1, p_2, \ldots p_n : \alpha p_1, \alpha p_2, \ldots \alpha p_n$ treten lässt, unter α irgend eine beliebige Zahl verstanden.

13. Es erübrigt nun noch, die Genauigkeit des durch die Glgn. (15) oder (19) bestimmten wahrscheinlichsten Werthes der Unbekannten d. i. des arithmetischen Mittels kennen zu lernen, wobei sogleich der allgemeinere, in Gl. (19) ausgesprochene Fall betrachtet werden mag, wenn die Beobachtungen von verschiedener Genauigkeit sind.

Bedeuten wieder $v_1, v_2, \ldots$ die übrigbleibenden Fehler der einzelnen Beobachtungen bezogen auf den wahrscheinlichsten Werth x der Unbekannten, so ist die Wahrscheinlichkeit des letzteren vermöge der Gl. (17) proportional der Grösse:

$$W = \frac{\delta^n h^n \sqrt{p_1 p_2 \ldots p_n}}{\pi^{\frac{n}{2}}} e^{-h^2 [pvv]},$$

welche die Wahrscheinlichkeit des Zusammentreffens eben dieser Fehler ausdrückt, und wo h das Maass der Präcision der Gewichtseinheit bedeutet. Bezeichnet man für irgend einen andern Werth der Unbekannten, z. B. $x + \zeta$, die Fehler der Beobachtungen mit Δ_1, Δ_2, u. s. w., so wird:

$$\Delta_1 = x + \zeta - a_1 = v_1 + \zeta,$$
$$\Delta_2 = x + \zeta - a_2 = v_2 + \zeta,$$
u. s. w.

Quadrirt man diese Gleichungen, multiplicirt sodann jede derselben mit dem zugehörigen Gewichte und addirt sie, so erhält man mit Rücksicht auf die Gl. (18):

$$[p\Delta\Delta] = [pvv] + [p]\zeta^2,$$

und es ist demnach die Wahrscheinlichkeit des Werthes $x + \zeta$ proportional der Gröse:

$$W' = \frac{\delta^n h^n \sqrt{p_1 p_2 \ldots p_n}}{\pi^{\frac{n}{2}}} e^{-\{[pvv] + [p]\zeta^2\}};$$

es verhält sich demnach die Wahrscheinlichkeit W, dass der Werth $x = \frac{[pa]}{[p]}$

der wahre Werth sei oder den Fehler $=0$ habe, zur Wahrscheinlichkeit W', dass er um die Grösse ζ fehlerhaft sei, wie

$$1 : e^{-h^2 [p] \zeta^2}.$$

Bezeichnet man also das Maass der Präcision des arithmetischen Mittels $x = \frac{[pa]}{[p]}$ mit H, so hat man vermöge des in §. 7 erhaltenen Satzes:

$$H = h\sqrt{[p]}; \tag{20}$$

bedeutet ferner P das Gewicht des arithmetischen Mittels x, so ist $P : 1 = H^2 : h^2$, somit:

$$P = [p]. \tag{21}$$

Das Gewicht des arithmetischen Mittels ist demnach gleich der Summe der Gewichte der einzelnen Beobachtungen.

Bezeichnen wir ferner mit ε und ε_0 die mittleren Fehler der Gewichtseinheit und des arithmetischen Mittels, so ist zufolge Gl. (12):

$$\varepsilon = \frac{1}{h\sqrt{2}}, \quad \varepsilon_0 = \frac{1}{H\sqrt{2}},$$

folglich, mit Rücksicht auf (20):

$$\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon}{\sqrt{[p]}} \tag{22}$$

Diese Ausdrücke hängen nur noch von der Grösse h, d. i. dem Maasse der Präcision der Gewichtseinheit ab, und es ist klar, dass uns zur Bestimmung derselben kein anderes Mittel zu Gebote steht, als die Fehler der Beobachtungen selbst. Lassen wir demnach $\Delta_1, \Delta_2, \ldots$ die wahren Fehler der Beobachtungen bedeuten, so ist die Wahrscheinlichkeit des Zusammentreffens derselben:

$$W = \frac{\delta^n h^n \sqrt{p_1 p_2 \ldots p_n}}{\pi^{\frac{n}{2}}} e^{-h^2 [p\Delta\Delta]};$$

da nun diese Fehler wirklich eingetreten und folglich einer Aenderung nicht fähig sind, so hängt diese Wahrscheinlichkeit nur noch von dem Werthe von h ab, und es wird vermöge des Satzes V, §. 2, jener Werth von h der wahrscheinlichste sein, für welchen die Wahrscheinlichkeit W des Zusammentreffens der wirklich eingetretenen Beobachtungsfehler ein Maximum wird. Dies gibt die Bedingung $\frac{dW}{dh} = 0$, oder:

$$nh^{n-1} e^{-h^2 [p\Delta\Delta]} - 2h^n e^{-h^2 [p\Delta\Delta]} h [p\Delta\Delta] = 0,$$

d. i.:

$$n - 2h^2 [p\Delta\Delta] = 0. \tag{m}$$

Hieraus folgt nun:

$$h = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{n}{[p\Delta\Delta]}},$$

und vermöge der Gl. (12):

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{[p\varDelta\varDelta]}{n}}. \qquad (n)$$

Die wahren Beobachtungsfehler $\varDelta$ sind aber unbekannt; man kennt nur ihre wahrscheinlichsten Werthe, d. i. die übrigbleibenden Fehler $v_1 = x - a_1$, u. s. w. Bezeichnet man nun mit $x + \zeta$ den wahren Werth der Unbekannten, so ist $\varDelta_1 = x + \zeta - a_1 = v_1 + \zeta$ u. s. w., und man erhält auf demselben Wege, wie oben:

$$[p\varDelta\varDelta] = [pvv] + [p]\,\zeta^2.$$

Hieraus erhellt, dass, da $[p]\,\zeta^2$ wesentlich positiv, $[pvv]$ jedenfalls zu klein ist, was auch schon daraus folgt, dass jeder noch so wenig vom arithmetischen Mittel verschiedene Werth nothwendig eine grössere Summe der Fehlerquadrate geben muss. Der Werth von ζ ist nun allerdings unbekannt; da aber die letzte Gleichung andeutet, dass der Werth von $[pvv]$ jedenfalls vergrössert werden muss, so werden wir uns der Wahrheit so weit nähern, als es die Umstände erlauben, wenn wir für ζ den mittleren Fehler des arithmetischen Mittels nehmen und somit $\zeta = \varepsilon_0 = \frac{\varepsilon}{\sqrt{[p]}}$ setzen, wodurch die letzte Gleichung in folgende: $[p\varDelta\varDelta] = [pvv] + \varepsilon^2$ übergeht. Durch Verbindung dieser Gleichung mit der obigen (n) erhält man sofort:

$$[p\varDelta\varDelta] = \frac{n}{n-1}\,[pvv], \qquad (P)$$

und:

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{[pvv]}{n-1}}. \qquad (23)$$

Hiemit ist nun der mittlere Fehler der Gewichtseinheit bestimmt. Gl. (22) gibt dann den mittleren Fehler des arithmetischen Mittels; sind ferner r und r_0 die wahrscheinlichen Fehler der Gewichtseinheit und des arithmetischen Mittels, so ist:

$$r = 0.67449\,\varepsilon\,,\quad r_0 = 0.67449\,\varepsilon_0. \qquad (24)$$

Sind die Beobachtungen von gleicher Genauigkeit, so entspricht allen dasselbe Gewicht, das selbstverständlich am einfachsten $= 1$ genommen wird; setzt man also in obigen Formeln $p_1 = p_2 = \ldots = p_n = 1$, so wird für Beobachtungen von gleicher Genauigkeit:

der mittlere Fehler einer Beobachtung: $\varepsilon = \sqrt{\frac{[vv]}{n-1}}$, (25)

der mittlere Fehler des arithmetischen Mittels: $\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$ (26)

das Gewicht des arithmetischen Mittels: $P = n$, (27)

wo n die Anzahl der Beobachtungen. Die Glgn. (24) bleiben ungeändert.

Aus Gl. (27) folgt sofort, dass das Gewicht eines gegebenen Werthes nichts anderes ist, als die Anzahl von Beobachtungen einer bestimmten Art, deren Gewicht hiebei als Einheit angenommen wird, welche erforderlich wäre, um aus ihrem arithmetischen Mittel eine Bestimmung von derselben Genauigkeit zu erhalten, wie jene des gegebenen Werthes.

Diese Definition des Begriffes „Gewicht“ führt unmittelbar zu den Ausdrücken (18) und (19). Denn man kann vermöge derselben die Werthe a_1, a_2, a_3, u. s. w., welchen die Gewichte $p_1, p_2, p_3, \ldots$ entsprechen, als arithmetische Mittel aus beziehungsweise $p_1, p_2, p_3, \ldots.$ Beobachtungen betrachten, welch' letzteren das Gewicht 1 zukommt, wodurch die Beobachtungen von verschiedener Genauigkeit auf solche von gleicher Genauigkeit zurückgeführt sind. Die Summe derjenigen Beobachtungen, welche a_1 als Mittel geben, ist dann nach Gl. (15) $= p_1 a_1$, eben so die Summe der Beobachtungen, welche a_2 zum Mittel geben, $= p_2 a_2$, u. s. w.; die Summe aller dieser Beobachtungen ist also $= p_1 a_1 + p_2 a_2 + \ldots\ldots + p_n a_n = [pa]$, die Anzahl derselben $= p_1 + p_2 + \ldots + p_n = [p]$, folglich nach Gl. (15) der wahrscheinlichste Werth der Unbekannten $= \frac{[pa]}{[p]}$, und nach Gl. (27) das Gewicht dieses Werthes $= [p]$, übereinstimmend mit den Gl. (18) und (19).

Die Gl. (26) zeigt ferner, dass der mittlere Fehler des arithmetischen Mittels im verkehrten Verhältnisse der Quadratwurzel aus der Anzahl der Beobachtungen abnimmt; es werden daher 4 Beobachtungen erfordert, um denselben auf die Hälfte; 9 Beobachtungen, um ihn auf $\frac{1}{3}$, 100 Beobachtungen, um ihn auf $\frac{1}{10}$ des mittleren Fehlers einer Beobachtung herabzudrücken; da man nun bezüglich der Vervielfältigung der Beobachtungen in jedem einzelnen Falle bald an eine durch Zeit und andere Umstände gesteckte Grenze gelangt, so erhellt von selbst, dass man trachten müsse, schon die einzelnen Beobachtungen möglichst genau zu machen, da die blosse Vermehrung der Anzahl den Mangel an innerer Güte nicht zu ersetzen vermag.

14. Die im vorhergehenden §. erhaltene Bestimmung der Grössen h, ε, r, u. s. w. aus den übrigbleibenden Fehlern der Beobachtungen ist selbstverständlich nicht als absolut genau zu betrachten, sondern gibt nur deren wahrscheinlichste Werthe; untersuchen wir also noch den Grad der Genauigkeit dieser Bestimmung. Sind wieder Δ_1, $\Delta_2, \ldots$ die wahren Beobachtungsfehler, n an der Zahl, so ist für irgend einen Werth von h die Wahrscheinlichkeit des Zusammentreffens dieser Fehler:

$$W = \frac{\delta^n h^n \sqrt{p_1 p_2 \ldots p_n}}{\pi^{\frac{n}{2}}} e^{-h^2 [p\Delta\Delta]},$$

oder, wenn man auf die natürlichen Logarithmen übergeht:

$$\log W = \log \delta^n + \log \sqrt{p_1 p_2 \ldots p_n} - \log \pi^{\frac{n}{2}} + n \log h - h^2 [p\Delta\Delta].$$

Für einen anderen Werth von h, etwa $h + \zeta$, wird diese Wahrscheinlichkeit:

$$\log W' = \log \delta^n + \log \sqrt{p_1 p_2 \ldots p_n} - \log \pi^{\frac{n}{2}} + n \log (h + \zeta) - (h + \zeta)^2 [p\varDelta\varDelta].$$

Es ist aber:

$$\log (h + \zeta) = \log h \left(1 + \frac{\zeta}{h}\right) = \log h + \log \left(1 + \frac{\zeta}{h}\right)$$
$$= \log h + \frac{\zeta}{h} - \frac{1}{2}\frac{\zeta^2}{h^2} + \frac{1}{3}\frac{\zeta^3}{h^3} - \ldots,$$

folglich, wenn man nach Potenzen von ζ ordnet:

$$\log W' = \log \delta^n + \log \sqrt{p_1 p_2 \ldots p_n} - \log \pi^{\frac{n}{2}} + n \log h - h^2 [p\varDelta\varDelta]$$
$$+ \left(\frac{n}{h} - 2h [p\varDelta\varDelta]\right) \zeta - \left(\frac{n}{2h^2} + [p\varDelta\varDelta]\right) \zeta^2 + \frac{n}{3h^3} \zeta^3 - \ldots\ldots$$

Durch Subtraction beider Gleichungen für $\log W$ und $\log W'$, kommt:

$$\log \frac{W'}{W} = \frac{1}{h}\left(n - 2h^2 [p\varDelta\varDelta]\right) \zeta - \frac{1}{2h^2}\left(n + 2h^2 [p\varDelta\varDelta]\right) \zeta^2 + \frac{n}{3h^3} \zeta^3 - \ldots$$

Diese Gleichung liefert zunächst wieder den schon oben erhaltenen wahrscheinlichsten Werth von h, indem für diesen W ein Maximum, also $\log W' - \log W$ negativ werden muss für jeden Werth von ζ, was nur möglich, wenn der Coefficient der ersten Potenz von ζ: $n - 2h^2 [p\varDelta\varDelta] = 0$ ist, übereinstimmend mit Gl. (m), §. 13; durch Substitution dieses wahrscheinlichsten Werthes von h verwandelt sich nun die letzte Gleichung, mit Vernachlässigung der höheren Potenzen von $\frac{\zeta}{h}$ in:

$$\log \frac{W'}{W} = -\frac{n}{h^2} \zeta^2, \quad \text{oder} \quad \frac{W'}{W} = e^{-\frac{n}{h^2}\zeta^2}.$$

Es verhält sich also die Wahrscheinlichkeit W, dass $h = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{n}{[p\varDelta\varDelta]}}$ der wahre Werth sei (den Fehler $= 0$ habe), zur Wahrscheinlichkeit W', dass $h + \zeta$ der wahre Werth (also h um ζ fehlerhaft) sei, wie $1 : e^{-\frac{n}{h^2}\zeta^2}$; es ist daher [§. 7] $\frac{\sqrt{n}}{h}$ das Maass der Präcision unserer Bestimmung von h, folglich, vermöge der Gl. (10), $\frac{\varrho h}{\sqrt{n}}$ der wahrscheinliche Fehler derselben, oder es ist eben so wahrscheinlich, dass der wahre Werth von h zwischen den Grenzen

$$h - \frac{\varrho h}{\sqrt{n}} = h \left(1 - \frac{\varrho}{\sqrt{n}}\right) \text{ und } h + \frac{\varrho h}{\sqrt{n}} = h \left(1 + \frac{\varrho}{\sqrt{n}}\right)$$

liege, als ausserhalb derselben, oder man kann 1 gegen 1 wetten, dass er innerhalb derselben liege.

Da ferner der mittlere Fehler $\varepsilon = \frac{1}{h\sqrt{2}}$ ist, so sind die wahrscheinlichen Grenzen desselben

$$\frac{1}{h\sqrt{2}\left(1 \pm \frac{\varrho}{\sqrt{n}}\right)} = \frac{\varepsilon}{\left(1 \pm \frac{\varrho}{\sqrt{n}}\right)},$$

wofür man genügend genau mit Vernachlässigung der höheren Potenzen von $\frac{\varrho}{\sqrt{n}}$ setzen kann:

$$\varepsilon\left(1 \mp \frac{\varrho}{\sqrt{n}}\right).$$

Dasselbe gilt in Folge des constanten Verhältnisses zwischen dem mittleren und wahrscheinlichen Fehler auch für letzteren; man erhält also die wahrscheinlichen Grenzen der Unsicherheit der nach den Formeln des §. 13 bestimmten mittleren und wahrscheinlichen Fehler, wenn man letztere mit

$$1 \mp \frac{0.47694}{\sqrt{n}} \tag{28}$$

multiplicirt, wobei n die Anzahl der Beobachtungen.

15. Beispiele. 1) Aus beobachteten Zenithdistanzen des Polarsternes wurden für die Polhöhe des Dreieckspunctes Wetrnik in Böhmen folgende Werthe (a) erhalten, welche, auf je einer Einstellung in jeder Kreislage beruhend, sämmtlich gleiche Genauigkeit besitzen.

№	a	v	vv	№	a	v	vv
1	49° 1′ 18″.19	−0″.43	0.1849	16	49° 1′ 17″.05	+0″.71	0.5041
2	17 .29	+0 .47	0.2209	17	17 .43	+0 .33	0.1089
3	18 .76	−1 .00	1.0000	18	17 .64	+0 .12	0.0144
4	17 .92	−0 16	0.0256	19	17 .99	−0 .23	0.0529
5	18 .10	−0 .34	0.1156	20	18 .08	−0 .32	0.1024
6	17 .07	+0 .69	0.4761	21	17 .43	+0 .33	0.1089
7	18 .15	−0 .39	0.1521	22	18 .07	−0 .31	0.0961
8	17 .52	+0 .24	0.0576	23	16 .94	+0 .82	0.6724
9	17 .78	−0 .02	0.0004	24	16 .89	+0 .87	0.7569
10	18 .32	−0 .56	0.3136	25	19 .41	−1 .65	2.7225
11	17 .54	+0 .22	0.0484	26	17 .72	+0 .04	0.0016
12	17 .22	+0 .54	0.2916	27	17 .61	+0 .15	0.0225
13	18 .88	−1 .12	1.2544	28	16 .68	+1 .08	1.1664
14	17 .63	+0 .13	0.0169	29	17 .69	+0 .07	0.0049
15	18 .80	−1 .04	1.0816	30	17 .08	+0 .68	0.4624

Es wird nun, wenn wir bei der Bildung von $[a]$ nur den Ueberschuss über 17″ mitnehmen, das arithmetische Mittel:

$$x = \frac{[a]}{n} = \frac{22.88}{30} = 0''.763,$$

also der wahrscheinlichste Werth:

$$x = 49^0\,1'\,17''.763.$$

Durch Vergleichung dieses Werthes mit den einzelnen Beobachtungen ergeben sich die übrigbleibenden Fehler v, und $[vv] = 12''.0370$. Hiemit findet man nun, da $n = 30$:

den mittleren Fehler einer Beobachtung: $\varepsilon = \sqrt{\frac{[vv]}{n-1}} = \pm 0.''644$,

den wahrscheinl. „ „ „ $r = 0.6746\,\varepsilon = \quad 0.435$;

den mittleren Fehler des arithm. Mittels: $\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} = \quad 0.118$,

den wahrscheinl. „ „ „ „ $r_0 = 0.6745\,\varepsilon_0 = \pm 0.079$.

Man könnte somit, in so ferne nur diese Beobachtungen in Betracht kommen, und dieselben von jedem constanten Fehler frei wären, 1 gegen 1 wetten, dass der wahre Werth der Polhöhe zwischen $x + r_0$ und $x - r_0$, d. i. zwischen $49^0\,1'\,17''.684$ und $49^0\,1'\,17''.832$, und dass der wahre Werth des wahrscheinlichen Fehlers innerhalb der Grenzen

$$r_0\left(1 \mp \frac{0.47694}{\sqrt{n}}\right)$$

d. i. zwischen $0''.072$ und $0''.086$ liege.

2) Um ein Beispiel für Beobachtungen von verschiedener Genauigkeit zu geben, wollen wir aus den obigen 30 Beobachtungen etwa 7 Gruppen bilden, und die Beobachtungen No. 1—3, No. 4—9, No. 10—11 u. s. w. in je ein Mittel vereinigen. Wir erhalten dadurch 7 Werthe der Polhöhe von ungleicher Genauigkeit, deren Gewichte p gleich der Anzahl von einfachen Beobachtungen zu setzen sind, welche in jedem Werthe zum Mittel vereinigt wurden, wobei eine der obigen einfachen Beobachtungen die Gewichtseinheit bildet. Die Rechnung ist dann folgende:

№	a	p	ap	v	v^2	pv^2
1	$49^0\,1'\,18''.080$	3	3.240	-0.317	0.100489	0.3015
2	17 .757	6	4.542	$+0.006$	0.000036	0.0002
3	17 .930	2	1.860	-0.167	0.027889	0.0558
4	17 .807	7	5.649	-0.044	0.001936	0.0135
5	17 .892	4	3.568	-0.129	0.016641	0.0666
6	17 .714	5	3.570	$+0.049$	0.002401	0.0120
7	17 .150	3	0.450	$+0.613$	0.375769	1.1273
		30	22.879			1.5769

Es ist nun, wenn bei der Bildung der Producte ap wieder nur der Ueberschuss über 17″ mitgenommen wird, das arithmetische Mittel mit Rücksicht auf die Gewichte:

$$x = \frac{[ap]}{[p]} = \frac{22''.879}{30} = 0''.763\,,$$

also der wahrscheinlichste Werth:

$$x = 49^0\,1'\,17''.763\,,$$

nothwendig übereinstimmend mit dem oben erhaltenen Werthe.

Aus den übrigbleibenden Fehlern folgt ferner (mit $n = 7$):

Mittlerer Fehler der Gewichtseinheit: $\varepsilon = \sqrt{\frac{[pvv]}{n-1}} = \pm\, 0''.513\,,$

Wahrscheinl. „ „ „ $r = 0.6745\, \varepsilon = \pm\, 0.346\,,$

Mittlerer Fehler des arithm. Mittels: $\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon}{\sqrt{[p]}} = \pm\, 0.094\,,$

Wahrscheinl. „ „ „ „ $r_0 = 0.6745\, \varepsilon = \pm\, 0.063.$

Dass diese Werthe der Fehler mit den im ersten Beispiele erhaltenen nicht genau übereinstimmen, hat darin seinen Grund, weil unsere Formeln auf der Voraussetzung beruhen, dass die verschiedenen Fehler im Verhältnisse zu ihrer Wahrscheinlichkeit vorhanden sind, wozu offenbar eine viel grössere Zahl von Beobachtungen, als in unserem Beispiele, erfordert würde.

16. Der Ableitung des wahrscheinlichsten Werthes einer Unbekannten aus Beobachtungen von verschiedener Genauigkeit muss selbstverständlich die Feststellung der Gewichte vorausgehen. Sind, wie dies häufig vorkommt, die gegebenen Werthe a_1, a_2, u. s. w. selbst arithmetische Mittel aus Beobachtungen, welche sämmtlich gleiche Genauigkeit haben, so wird sofort die Anzahl der in jedem dieser Werthe zum Mittel vereinigten Beobachtungen als Gewicht desselben anzunehmen sein, wie dies in dem zweiten der obigen Beispiele geschehen ist.

In anderen Fällen sind die mittleren oder wahrscheinlichen Fehler der gegebenen Werthe bekannt; dann wird man als Gewichte Zahlen anzuwenden haben, welche sich verkehrt verhalten wie die Quadrate dieser Fehler; nimmt man eine Beobachtung, deren mittlerer Fehler ein beliebig gewählter $= m$ ist, als Gewichtseinheit an und bezeichnet mit m_1, m_2, u. s. w. die bekannten mittleren Fehler der Beobachtungen a_1, a_2, u. s. w., so sind die Gewichte derselben:

$$p_1 = \frac{m^2}{m_1^2}\,, \quad p_2 = \frac{m^2}{m_2^2}\,, \quad p_3 = \frac{m^2}{m_3^2}\,, \ldots$$

In beiden Fällen wird aber auf diese Art nur dann eine richtige Gewichtsbestimmung erhalten, wenn man sicher ist, dass nicht noch Fehlerquellen vorhanden sind, welche, während sie für alle Beobachtungen, die einen einzelnen der Werthe a liefern, constant bleiben, auf die verschiedenen Werthe a_1, a_2, ... in ungleicher Weise einwirken. Dies gibt sich sofort dadurch zu erkennen, dass die Uebereinstimmung dieser Werthe unter einander geringer ist, als es mit Rücksicht auf ihre mittleren Fehler der Fall sein sollte. Häufig führt dann folgender Weg zu einer richtigeren Bestimmung der Gewichte.

Man berechnet zunächst mit obigen, auf die Gewichtseinheit m sich beziehenden Gewichten nach (Gl. 19) den wahrscheinlichsten Werth der Unbekannten, bildet durch Vergleichung desselben mit den einzelnen Beobachtungen die v, und erhält nach Gl. (23) für den mittleren Fehler der Gewichtseinheit den Werth:

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{[pvv]}{n-1}},$$

(wo n die Anzahl der Beobachtungen); die mittleren Fehler der einzelnen Beobachtungen a_1, a_2, ... würden hiemit:

$$\varepsilon_1^2 = \frac{\varepsilon^2}{p_1}, \quad \varepsilon_2^2 = \frac{\varepsilon^2}{p_2}, \quad \varepsilon_3^2 = \frac{\varepsilon^2}{p_3}, \text{ u. s. w.}$$

Wären nun die Beobachtungen von keinen anderen Fehlerquellen beeinflusst, als jenen zufälligen, welche die mittleren Fehler m_1, m_2, ... erzeugen, so müsste wenigstens sehr nahe

$$p_1\varepsilon_1^2 + p_2\varepsilon_2^2 + p_3\varepsilon_3^2 + \ldots . = p_1 m_1^2 + p_2 m_2^2 + p_3 m_3^2 + \ldots .$$

d. i. $n\varepsilon^2 = nm^2$, oder $\varepsilon = m$ sich ergeben. Zeigt sich aber $\varepsilon > m$, so deutet dies eben darauf hin, dass auf die einzelnen Werthe a noch andere Fehlerquellen eingewirkt haben, welche bei der obigen Gewichtsbestimmung unberücksichtiget blieben. Bezeichnet man nun mit f den aus diesen letzteren Fehlerquellen entspringenden mittleren Fehler, so sind, vermöge eines später [§. 18] zu erweisenden Satzes die Quadrate der vollständigen Fehler der einzelnen Beobachtungen a_1, a_2, a_3, ...:

$$f^2 + m_1^2, \; f^2 + m_2^2, \; f^2 + m_3^2, \ldots .$$

oder

$$f^2 + \frac{m^2}{p_1}, \; f^2 + \frac{m^2}{p_2}, \; f^2 + \frac{m^2}{p_3}, \ldots .$$

und es muss nun die Gleichung bestehen:

$$p_1\varepsilon_1^2 + p_2\varepsilon_2^2 + p_3\varepsilon_3^2 + \ldots . = p_1\left(f^2 + \frac{m^2}{p_1}\right) + p_2\left(f^2 + \frac{m^2}{p_2}\right) + \ldots,$$

d. i.

$$n\varepsilon^2 = nm^2 + [p]f^2,$$

woraus folgt:

$$f = \sqrt{\frac{n(\varepsilon^2 - m^2)}{[p]}}. \tag{29}$$

Hiemit ergeben sich dann die richtigeren Gewichte:

$$p'_1 = \frac{m^2}{f^2 + \frac{m^2}{p_1}}, \quad p'_2 = \frac{m^2}{f^2 + \frac{m^2}{p_2}}, \quad p'_3 = \frac{m^2}{f^2 + \frac{m^2}{p_3}}, \text{ etc.} \tag{30}$$

Die Sicherheit dieser Bestimmung hängt, wie leicht einzusehen, wesentlich davon ab, dass die Anzahl n der Beobachtungen nicht zu gering ist und dass die constanten Fehler, mit welchen die einzelnen Werthe a_1, a_2, u. s. w. behaftet sind, und als deren mittlerer Werth f betrachtet wird, hinreichend nahe das Gesetz der zufälligen Beobachtungsfehler befolgen, d. i. dass positive und negative Werthe derselben von gleicher absoluter Grösse gleich häufig auftreten. Man sieht aus den Ausdrücken (30), dass, je grösser f ist im Verhältniss zu den mittleren Fehlern $m_1, m_2, \ldots$ der einzelnen Beobachtungen, um so mehr die Gewichte p' einander gleich werden; gestatten daher die Umstände nicht eine genügend sichere Bestimmung von f, so wird es vortheilhafter sein, die Werthe a_1, a_2, u. s. w. mit gleichem Gewichte zum Mittel stimmen zu lassen, als dieselben mit Rücksicht auf die Anzahl der Beobachtungen oder ihre mittleren Fehler zu verbinden, weil auf diese Weise der überwiegende Einfluss der constanten Fehler sicherer eliminirt wird.

Weit schwieriger wird aber die Feststellung der Gewichte, wenn der Beobachter nur in Folge der äusseren Umstände, welche bei den einzelnen Beobachtungen obwalteten, oder durch ein gewisses Gefühl sich zu der Annahme berechtigt hält, dass die Genauigkeit derselben eine merklich verschiedene sei; für solche häufig vorkommende Fälle lässt sich keine bestimmte Regel aufstellen und es erfordert Erfahrung, Umsicht und Unbefangenheit von Seite des Rechners, um in jedem einzelnen Falle eine möglichst richtige Wahl zu treffen. Nur kann im Allgemeinen bemerkt werden, dass es in diesen Fällen sicherer ist, den Beobachtungen, wenn sie nicht überhaupt als misslungen zu betrachten sind, lieber gleiches oder wenigstens nicht zu sehr verschiedenes Gewicht zu geben, als einzelne derselben durch allzu grosse Verringerung ihres Gewichtes von dem Resultate mehr oder weniger auszuschliessen.

17. Bei einer grösseren Anzahl von Beobachtungen ist die Bildung der Summe der Fehlerquadrate $[vv]$ der beschwerlichste Theil der Rechnung und es wäre wünschenswerth, auf einem bequemeren Wege zur Kenntniss des wahrscheinlichen Fehlers gelangen zu können. Man kann zu diesem Zwecke das arithmetische Mittel aus allen Fehlern, diese sämmtlich mit positivem Zeichen genommen, benützen, welches der durchschnittliche Fehler heissen mag. Bezeichnen wir denselben mit η, mit $\varDelta$, $\varDelta'$, $\varDelta''$, ... die wahren Beobachtungsfehler, sämmtlich mit positivem Zeichen genommen, so sind $\varphi(\varDelta)$, $\varphi(\varDelta')$ u. s. w. die Wahrscheinlichkeiten dieser Fehler und unter n Beobachtungen werden daher $n\varphi(\varDelta)$ von der Grösse $\varDelta$, $n\varphi(\varDelta')$ von der Grösse $\varDelta'$, u. s. w. vorkommen; die Summe aller Fehler ist daher

$\Delta . n\varphi(\Delta) + \Delta' . n\varphi(\Delta') + \ldots$, und der durchschnittliche Fehler, zufolge der Definition:

$$\eta = \frac{\Delta . n\varphi(\Delta) + \Delta' . n\varphi(\Delta') + \Delta'' n\varphi(\Delta'') + \ldots}{n} = \Sigma \Delta \varphi(\Delta).$$

Substituirt man nun den Werth von $\varphi(\Delta)$ aus Gl. (8) und nimmt, um alle möglichen Beobachtungsfehler zu umfassen, die Summe von $\Delta = -\infty$ bis $\Delta = +\infty$, so wird, mit Rücksicht auf die Gl. p, §. 4:

$$\eta = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2\Delta^2} \Delta\, d\Delta = \frac{1}{h\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} t\, dt = \frac{2}{h\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-t^2} t\, dt = \frac{1}{h\sqrt{\pi}}.$$

Es ist aber der wahrscheinliche Fehler $r = \frac{\varrho}{h}$, somit

$$r = \varrho \sqrt{\pi} . \eta = 0.84535\, \eta. \tag{31}$$

Sind nun $\Delta_1, \Delta_2, .. \Delta_n$ die wahren Fehler der Beobachtungen $a_1, a_2, .. a_n$, welche wir von gleicher Genauigkeit voraussetzen, so ist

$$\eta = \frac{\Sigma \Delta}{n}$$

zu setzen, wo $\Sigma\Delta$ die Summe der Fehler, sämmtlich mit positivem Zeichen genommen, und n die Anzahl der Beobachtungen bedeutet. Zwischen den unbekannten wahren Beobachtungsfehlern Δ und den bekannten übrigbleibenden Fehlern v haben wir aber als wahrscheinlichste Relation erhalten:

$$[\Delta\Delta] = \frac{n}{n-1} [vv],$$

welche aus Gl. (p) [§. 13] sofort sich ergibt, wenn wir daselbst die Beobachtungen als gleich genau, somit $p_1 = p_2 = \ldots = p_n$ annehmen. Aus dieser Gleichung folgt:

$$\sqrt{\frac{[\Delta\Delta]}{n}} = \sqrt{\frac{n}{n-1}} \sqrt{\frac{[vv]}{n}},$$

wo nun $\sqrt{\frac{[\Delta\Delta]}{n}}$ den mittleren Werth der wahren, und $\sqrt{\frac{[vv]}{n}}$ den mittleren Werth der übrigbleibenden Fehler darstellt und deren Verhältniss durch $\sqrt{\frac{n}{n-1}}$ ausgedrückt ist; in demselben Verhältnisse wird man auch die Summen $\Sigma\Delta$ und Σv anzunehmen, und somit

$$\Sigma\Delta = \sqrt{\frac{n}{n-1}}\, \Sigma v,$$

zu setzen haben, wo Σv die Summe der übrigbleibenden Fehler, sämmtlich mit positivem Zeichen genommen, bedeutet. Hiemit wird

$$\eta = \frac{\Sigma v}{\sqrt{n(n-1)}},$$

und der wahrscheinliche Fehler:

$$r = 0.84535 \frac{\Sigma v}{\sqrt{n(n-1)}}. \tag{32}$$

In dem obigen Beispiele, §. 15, ist $\Sigma v = 15''.06$, $n = 30$; hiemit folgt als wahrscheinlicher Fehler einer Beobachtung nach Gl. (32):

$$r = \pm 0''.431;$$

die in diesem Falle so gut wie vollkommene Uebereinstimmung dieses Werthes mit dem oben erhaltenen ($0''.435$) ist wohl mehr zufällig; der aus (32) folgende Werth wird übrigens praktisch immer genügend genau sein, wenn n nicht zu klein ist. Ja man kann, bei grösserem n, statt der Gl. (32) ohne merklichen Fehler die einfachere:

$$r = 0.84535 \frac{\Sigma v}{n} \tag{32*}$$

anwenden; sie gibt in unserem Beispiele $r = \pm 0''.424$.

II. GENAUIGKEIT DER FUNCTIONEN MEHRERER VON EINANDER UNABHÄNGIGER BEOBACHTETER GRÖSSEN.

18. Es sei $X = f(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ eine Function mehrerer von einander unabhängiger Grössen, für welche aus directen Beobachtungen beziehungsweise die wahrscheinlichsten Werthe $a_1, a_2, a_3, \ldots$ mit den mittleren Fehlern $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots$ erhalten wurden, so ist sofort klar, dass der wahrscheinlichste Werth von $X = f(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ sein müsse, und es handelt sich daher nur noch um die Bestimmung des mittleren oder wahrscheinlichen Fehlers dieses Werthes.

Betrachten wir zunächst den einfachsten Fall, wenn X die Summe oder Differenz zweier beobachteter Grössen also

$$X = x_1 \pm x_2$$

ist. Wie immer die wahrscheinlichsten Werthe a_1, a_2 der Grössen x_1 und x_2 erhalten worden sein mögen, so kann man immer annehmen, dass beide Werthe aus einer grossen Anzahl von Beobachtungen hervorgegangen seien, und diese Anzahl für beide gleich sei, wo dann die Genauigkeiten der beiden Beobachtungsreihen den mittleren Fehlern ε_1 und ε_2 der Werthe a_1 und a_2 verkehrt proportional sein werden. Bezeichnen wir dann die wahren Fehler der angenommenen Beobachtungen

$$\text{für } x_1 \text{ mit } \Delta_1, \Delta_1', \Delta_1'', \ldots$$
$$\text{für } x_2 \text{ mit } \Delta_2, \Delta_2', \Delta_2'', \ldots$$

so sind die Fehler von X:

$$\Delta_1 \pm \Delta_2, \ \Delta_1' \pm \Delta_2', \ \Delta_1'' \pm \Delta_2'', \ldots.$$

wo bei jedem derselben beide Zeichen gleich möglich sind. Bedeutet ferner E