EINLEITUNG.

THEORIE DER KLEINSTEN QUADRATE.

1. Es ist bekannt, dass alle Beobachtungen, selbst jene der einfachsten Art, mehr oder weniger mit Fehlern behaftet sind; es geht dies schon aus der Erfahrung hervor, dass fortgesetzte Wiederholungen derselben Beobachtung, welche Sorgfalt wir auch darauf verwenden mögen, stets etwas verschiedene Resultate geben. Man hat daher von jeher zu dem Mittel der Vervielfältigung der Beobachtungen gegriffen, um aus einer grösseren Zahl derselben ein genaueres Resultat zu erhalten, in der Erwartung, dass durch eine zweckmässige Verbindung derselben die den einzelnen Beobachtungen anhaftenden Fehler sich wenigstens zum grösseren Theile aufheben werden. Hiebei sind jedoch zwei Gattungen von Fehlern wohl zu unterscheiden.

Die erstere Gattung bilden die sogenannten constanten Fehler, welche allen Beobachtungen einer bestimmten Beobachtungsweise in derselben Grösse und in demselben Sinne anhaften, deren Ursachen also nach einem bestimmten Gesetze wirken, in Folge dessen alle unter gleichen Umständen angestellte Beobachtungen in demselben Sinne von der Wahrheit abweichen werden. Dergleichen Fehler können entweder in dem benützten Instrumente, oder in der Art der Auffassung der zu beobachtenden Erscheinung von Seite des Beobachters oder auch in constant wirkenden äusseren Einflüssen ihre Quelle haben, und sie werden sich, wie leicht einzusehen, erst zu erkennen geben, wenn es möglich ist, die Beobachtungen unter anderen Umständen, also z. B. mit anderen Instrumenten, nach einer andern Methode u. s. w. anzustellen; so lange aber blos eine unter gleichen Umständen angestellte Reihe von Beobachtungen vorliegt, sind wir im Allgemeinen ausser Stande zu erkennen, ob und in welchem Maasse sie mit einem constanten Fehler behaftet sind. Es ist daher eine der wichtigsten Aufgaben des Beobachters, die möglichen Ursachen von constanten Fehlern, so wie die Gesetze, nach welchen sie wirken, schon im Voraus sorgfältig zu untersuchen, um sie entweder beseitigen, oder ihren Einfluss durch eine zweckmässige Anordnung der Beobachtungen oder durch Rechnung aus dem Resultate schaffen zu können. Die Betrachtung dieser Fehler gehört in die Lehre von den Beobachtungen und wir werden letztere im Folgenden als von constanten Fehlern frei betrachten.

Die andere Gattung von Fehlern sind die sogenannten zufälligen oder unvermeidlichen Beobachtungsfehler, welche aus unregelmässig wirkenden Quellen herrühren, deren Einfluss auf die Beobachtungen daher auch keinem bestimmten Gesetze unterliegt und im Voraus keiner Berechnung unterworfen werden kann. Hieher gehören z. B. die Fehler, welche aus der Unvollkommenheit unserer Sinne, aus der nicht mathematisch vollkommenen Construction, so wie aus einer nicht absolut festen Aufstellung der Instrumente, aus der Einwirkung von Temperaturänderungen auf einzelne Theile derselben, aus der Unruhe der Bilder beim Visiren u. s. w. hervorgehen. Diese Fehler sind es, welche allein im Folgenden in Betracht kommen.

Liegt nun zur Bestimmung einer oder mehrerer unbekannten Grössen eine Reihe von Beobachtungen vor, so wird es sich darum handeln, durch ein auf bestimmte Grundsätze gestütztes Rechnungsverfahren aus den Beobachtungen jenes Resultat abzuleiten, welches von dem Einflusse der unvermeidlichen Beobachtungsfehler möglichst frei ist und demnach, laut dem Zeugnisse der vorliegenden Beobachtungen, als das zuverlässigste, d. i. wahrscheinlichste betrachtet werden darf. Hiezu dient die Theorie oder Methode der kleinsten Quadrate, welche gleichzeitig, wie wir sehen werden, die Mittel darbietet, den Grad der Genauigkeit sowohl der Beobachtungen selbst als der daraus abgeleiteten wahrscheinlichsten Werthe zu schätzen.

2. Einige einfache Sätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung, welche im Folgenden zur Anwendung kommen, mögen kurz vorangeschickt werden.

I. Wir nennen ein Ereigniss bekanntlich ein zufälliges, wenn dessen Eintreten von uns unbekannten oder wenigstens unberechenbaren Ursachen abhängt.

Die mathematische Wahrscheinlichkeit eines zufälligen Ereignisses ist das Verhältniss der Anzahl der dem Eintreten desselben günstigen zur Anzahl aller gleich möglichen Fälle und wird daher durch einen Bruch ausgedrückt, dessen Zähler und Nenner beziehungsweise diese beiden Zahlen sind. So sind die Wahrscheinlichkeiten, aus einer Urne, in welcher sich 5 weisse, 7 schwarze und 12 blaue Kugeln befinden, eine weisse, oder eine schwarze oder eine blaue Kugel zu ziehen, beziehungsweise $\frac{5}{24}$, $\frac{7}{24}$, $\frac{12}{24}$.

Je mehr sich die Anzahl der günstigen Fälle jener der gleich möglichen nähert, desto grösser wird die Wahrscheinlichkeit; sie wird zur Gewissheit, wenn beide Zahlen gleich sind. Die Einheit ist demnach der mathematische Ausdruck der Gewissheit.

II. Aus dem Begriffe der Wahrscheinlichkeit folgt sofort, dass wenn W die Wahrscheinlichkeit irgend eines Ereignisses bedeutet, dieses unter N Fällen, wo es eintreten kann, WN mal eintreten wird, und zwar um so sicherer, je grösser N ist. Die Wahrscheinlichkeit z. B., mit einem gewöhnlichen Würfel irgend eine der 6 Zahlen, z. B. 3 zu werfen, ist $= \frac{1}{6}$; man wird daher erwarten können, unter 90 Würfen, $\frac{1}{6} \times 90 = 15$mal die Zahl 3 zu werfen.

III. Sind W, W', W'',.. die Wahrscheinlichkeiten mehrerer aus derselben Quelle stammenden Ereignisse A, B, C,.., so ist die Wahrscheinlichkeit, dass irgend eines oder das andere derselben eintreten werde, gleich der Summe $W + W' + W'' + \ldots$ der Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Ereignisse. Fragt man z. B. nach der Wahrscheinlichkeit, in dem in I angeführten Beispiele entweder eine weisse oder eine schwarze Kugel zu ziehen, so wird diese, weil nunmehr unter 24 möglichen Fällen 12 günstige erscheinen, $= \frac{12}{24} = \frac{5}{24} + \frac{7}{24}$, d. i. gleich der Summe der Wahrscheinlichkeiten eines weissen oder schwarzen Zuges.

IV. Die Wahrscheinlichkeit, dass zwei Ereignisse A und B, deren Wahrscheinlichkeiten W, W' sind, gleichzeitig eintreten oder zusammentreffen, ist gleich dem Producte $W\,W'$ der Wahrscheinlichkeiten beider Ereignisse. Bezeichnet man nämlich mit a, b die den beiden Ereignissen günstigen, mit a', b' die ungünstigen Fälle, so ist $W = \frac{a}{a + a'}$, $W' = \frac{b}{b + b'}$; sollen nun beide Ereignisse zusammentreffen, so muss irgend einer der a dem Ereignisse A günstigen Fälle zusammenfallen mit irgend einem der b dem Ereignisse B günstigen Fälle, so dass im ganzen ab dem Zusammentreffen beider Ereignisse günstige Fälle stattfinden, während es überhaupt $(a + a')\,(b + b')$ gleich mögliche Fälle gibt; die Wahrscheinlichkeit des Zusammentreffens ist daher

$$= \frac{ab}{(a + a')\,(b + b')} = \frac{a}{a + a'} \cdot \frac{b}{b + b'} = W \cdot W'.$$

Auf dieselbe Weise überzeugt man sich von der Giltigkeit des Satzes für eine beliebige Anzahl von Ereignissen. Z. B. die Wahrscheinlichkeit, aus zwei Urnen, deren eine 7 weisse und 5 schwarze, die andere 10 weisse und 6 schwarze Kugeln enthält, beim Hineingreifen in jede Urne eine weisse Kugel zu ziehen, ist $= \frac{7}{12} \cdot \frac{10}{16} = \frac{35}{96}$. Die Wahrscheinlichkeit, mit einem gewöhnlichen Würfel, n mal hintereinander dieselbe Zahl zu werfen, ist $= (\frac{1}{6})^n$.

V. Ist das Verhältniss der dem Eintreten eines Ereignisses günstigen zu allen gleich möglichen Fällen nicht bekannt, so lässt sich die Wahrscheinlichkeit desselben a priori nicht bestimmen, wohl aber a posteriori, wenn eine Anzahl von gemachten Erfahrungen oder Beobachtungen über das Eintreten des Ereignisses vorliegt, ein Schluss auf jenes Verhältniss ziehen, der um so mehr Wahrscheinlichkeit für sich haben wird, je grösser die Anzahl der beobachteten Ereignisse ist. Gesetzt, eine Urne enthalte 4 Kugeln, theils weisse theils schwarze, ohne dass die Anzahl der Kugeln jeder Farbe bekannt wäre, und man habe in 5 Zügen, wobei nach jedem Zuge die gezogene Kugel wieder in die Urne gelegt wird, 4 weisse und eine schwarze Kugel gezogen. Hiernach können über das Verhältniss der Anzahl der weissen und schwarzen Kugeln nur drei Hypothesen aufgestellt werden, nämlich es befinden sich in der Urne:

1. Hypothese: 3 weisse und 1 schwarze Kugel,
2. „ 2 „ „ 2 „ „
3. „ 1 „ „ 3 „ „

Offenbar sind diese Hypothesen, bevor ein Zug vorgenommen wurde, als gleich wahrscheinlich zu betrachten; sie sind es aber nicht mehr n a c h den in den 5 Zügen gemachten Erfahrungen. Bezeichnen wir nämlich die einfachen Wahrscheinlichkeiten, bei einem Zuge aus der Urne eine weisse oder eine schwarze Kugel zu ziehen, beziehungsweise mit w und w', so ist

bei der 1. Hypothese: $w = \frac{3}{4}$, $w' = \frac{1}{4}$,
„ „ 2. „ $w = \frac{2}{4}$, $w' = \frac{2}{4}$,
„ „ 3. „ $w = \frac{1}{4}$, $w' = \frac{3}{4}$.

Nun wurden in 5 Zügen 4 weisse und 1 schwarze Kugel gezogen; die Wahrscheinlichkeit des Zusammentreffens dieser 5 Ereignisse ist, zufolge IV, $= w^4\, w'$; da jedoch hiebei die Ordnung, in welcher bei den 5 Zügen die 4 weissen und der schwarze Zug aufeinanderfolgen, gleichgiltig ist, also von den hiebei möglichen 5 Fällen alle dem Zusammentreffen günstig sind, so ist die Wahrscheinlichkeit desselben $= 5\, w^4\, w'$. Bezeichnet man also mit W, W', W'' die beziehungsweise nach der 1., 2. und 3. Hypothese berechneten Wahrscheinlichkeiten der beobachteten Ereignisse (4 weisse und 1 schwarzer Zug), so hat man:

nach der 1. Hypothese: $W = 5\,(\frac{3}{4})^4 \cdot \frac{1}{4} = \frac{405}{1024}$,
„ „ 2. „ $W' = 5\,(\frac{2}{4})^4 \cdot \frac{2}{4} = \frac{160}{1024}$,
„ „ 3. „ $W'' = 5\,(\frac{1}{4})^4 \cdot \frac{3}{4} = \frac{15}{1024}$.

Diese Wahrscheinlichkeiten verhalten sich also wie $405 : 160 : 15$, und in demselben Verhältnisse müssen offenbar auch die Wahrscheinlichkeiten der Hypothesen angenommen werden. Da sich die Wahrscheinlichkeit, in 5 Zügen 4 weisse und eine schwarze Kugel zu ziehen, in der 1. Hypothese am grössten ergibt, so ist auch diese Hypothese die wahrscheinlichste. Man kann daher folgenden Satz aussprechen:

D i e W a h r s c h e i n l i c h k e i t e n m e h r e r e r v o r d e n e i n g e t r e t e n e n E r e i g n i s s e n g l e i c h w a h r s c h e i n l i c h e n u n d e i n a n d e r a u s s c h l i e s s e n d e n H y p o t h e s e n v e r h a l t e n s i c h d i r e c t w i e d i e a u f G r u n d d e r s e l b e n b e r e c h n e t e n W a h r s c h e i n l i c h k e i t e n d e r b e o b a c h t e t e n E r e i g n i s s e. Oder:

D i e W a h r s c h e i n l i c h k e i t d e r H y p o t h e s e i s t d e r a u f G r u n d d e r s e l b e n b e r e c h n e t e n W a h r s c h e i n l i c h k e i t d e s e i n g e t r e t e n e n E r e i g n i s s e s p r o p o r t i o n a l.

J e n e H y p o t h e s e w i r d d a h e r a u c h d i e w a h r s c h e i n l i c h s t e s e i n , f ü r w e l c h e d i e b e r e c h n e t e W a h r s c h e i n l i c h k e i t d e s b e o b a c h t e t e n E r e i g n i s s e s a m g r ö s s t e n w i r d.

Will man die Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Hypothesen selbst bestimmen, so seien diese H, H', H'', und man hat in Folge der eben ausgesprochenen Proportionalität: $H = CW$, $H' = CW'$, $H'' = CW''$, wo C eine constante Grösse; hieraus folgt: $H + H' + H'' = C\,(W + W' + W'')$; sind aber nur drei Hypothesen möglich, so muss eine die richtige sein; es ist also $H + H' + H'' = 1$, somit:

$$C = \frac{1}{W + W' + W''},$$

und

$$H = \frac{W}{W + W' + W''},\quad H' = \frac{W'}{W + W' + W''},\quad H'' = \frac{W''}{W + W' + W''}.$$

Die Wahrscheinlichkeit der Hypothese ist also gleich der nach ihr berechneten Wahrscheinlichkeit des Ereignisses, getheilt durch die Summe der nach allen möglichen Hypothesen berechneten Wahrscheinlichkeiten derselben.

In obigem Beispiele erhält man:

$$H = \frac{405}{580},\quad H' = \frac{160}{580},\quad H'' = \frac{15}{580}.$$

I. BEGRÜNDUNG DER THEORIE DER KLEINSTEN QUADRATE. — ANWENDUNG DERSELBEN ZUR BESTIMMUNG DES WAHRSCHEINLICHSTEN WERTHES EINER UNBEKANNTEN GRÖSSE.

3. Wie unregelmässig und scheinbar gesetzlos auch das Auftreten der zufälligen Beobachtungsfehler sein mag, so lassen sich doch schon aus dem Begriffe derselben einige charakteristiche Eigenschaften folgern. Vorausgesetzt, dass die Beobachtungen unter gleichen Umständen und mit gleicher Sorgfalt angestellt sind, werden 1) bei einer grösseren Anzahl derselben positive und negative Beobachtungsfehler von derselben absoluten Grösse gleich häufig vorkommen, d. i. gleich wahrscheinlich sein; denn im Gegenfalle müsste das Ueberwiegen der einen oder der andern durch eine constant wirkende Ursache hervorgebracht, d. i. ein constanter Fehler vorhanden sein, welcher Fall im Vorhinein ausgeschlossen wurde. 2) Kleinere Fehler müssen häufiger vorkommen als grössere und sind demnach wahrscheinlicher; denn um einen grösseren Beobachtungsfehler zu erzeugen, müssen offenbar mehrere zufällig wirkende Fehlerquellen in demselben Sinne zusammenwirken oder eine oder die andere derselben in ungewöhnlich hohem Grade auftreten. 3) Theoretisch genommen wird ein beliebig grosser Beobachtungsfehler nicht als unmöglich zu betrachten sein; in der Praxis jedoch wird es bei jeder Gattung von Beobachtungen eine wenn auch nicht scharf bestimmbare Grenze geben, welche die Beobachtungsfehler nicht überschreiten, weil wir immer annehmen müssen, dass die

Beobachtungen mit jener Genauigkeit gemacht sind, welche die in Rede stehende Beobachtungsgattung gestattet.

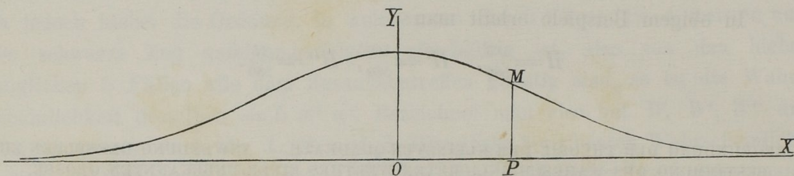
Hieraus folgt, dass die Wahrscheinlichkeit W eines zufälligen Beobachtungsfehlers $\varDelta$ von dessen Grösse abhängt und somit als Function desselben betrachtet werden darf, so dass man setzen kann:

$$W = \varphi(\varDelta), \tag{1}$$

wo φ ein Functionszeichen bedeutet. Die Function wird eine gerade sein müssen, damit sie für gleiche positive und negative Werthe von $\varDelta$ denselben Werth erhält, wie dies die erste der oben bemerkten Eigenschaften der zufälligen Beobachtungsfehler erfordert; zufolge der zweiten muss ihr Werth mit zunehmendem $\varDelta$ abnehmen und für $\varDelta = 0$ ein Maximum erreichen; aus der dritten folgt endlich, dass wenn $\varDelta$ über eine gewisse Grenze hinaus wächst, $\varphi(\varDelta)$ sehr klein werden oder der Grenze Null sich nähern muss.

Hiernach kann man sich von dem Verlaufe der Function $\varphi(\varDelta)$ schon eine Vorstellung bilden; betrachtet man nämlich die Gl. (1) als Gleichung einer Curve, indem man die Fehler $\varDelta = OP$ (Fig. 1) als Abscissen, und die

Fig. 1.



zugehörigen Wahrscheinlichkeiten $W = PM$ als Ordinaten ansieht, so wird aus der Construction derselben eine Curve von der in der Figur dargestellten Gestalt hervorgehen, welche symmetrisch ist zu beiden Seiten der y-Axe und der Axe der x sich asymtotisch nähert.

4. Kennt man die Wahrscheinlichkeit $\varphi(\varDelta)$ eines Fehlers $\varDelta$ für eine gewisse Gattung von Beobachtungen, so lässt sich auch leicht die Wahrscheinlichkeit angeben, dass der Fehler einer einzelnen Beobachtung dieser Gattung zwischen zwei gegebenen Grenzen a und b liege. Theilen wir das Intervall $b - a$ in n gleiche Theile, und setzen $\frac{b-a}{n} = \delta$, so ist die Wahrscheinlichkeit der Fehler:

$$a,\ a+\delta,\ a+2\delta, \ldots\ldots a+(n-1)\delta$$

beziehungsweise:

$$\varphi(a),\ \varphi(a+\delta),\ \varphi(a+2\delta), \ldots\ldots \varphi[a+(n-1)\delta], \tag{m}$$

und die Wahrscheinlichkeit, dass irgend einer dieser Fehler, gleichgiltig welcher, eintrete, zufolge §. 2, II:

$$\varphi(a)+\varphi(a+\delta)+\varphi(a+2\delta)+ \ldots\ldots +\varphi[a+(n-1)\delta]. \tag{n}$$

Lassen wir nun δ unendlich klein werden, so umfasst die Reihe (m) alle möglichen zwischen a und b liegenden Fehler und die Summe (n) gibt dann die Wahrscheinlichkeit, dass der Fehler überhaupt zwischen den Grenzen a und b liege. Es ist aber, wenn Δ die unabhängig Veränderliche, und δ eine unendlich abnehmende Grösse bedeutet, vermöge des Begriffes eines bestimmten Integrals:

$$\int_a^b \varphi(\Delta)\, d\Delta = \delta \Big[\varphi(a) + \varphi(a+\delta) + \varphi(a+2\delta) + \ldots + \varphi[a+(n-1)\delta] \Big],$$

oder

$$\int_a^b \varphi(\Delta)\, d\Delta = \delta \sum_a^b \varphi(\Delta), \tag{p}$$

wenn man mit $\sum_a^b \varphi(\Delta)$ die Summe der unendlich vielen Werthe bezeichnet, welche aus $\varphi(\Delta)$ hervorgehen, wenn man Δ von a bis b durch unendlich kleine Incremente δ wachsen lässt. Nennt man daher $\Phi(a, b)$ die Wahrscheinlichkeit, dass der Fehler zwischen den Grenzen a und b liege, so hat man:

$$\Phi(a, b) = \frac{1}{\delta} \int_a^b \varphi(\Delta)\, d\Delta. \tag{2}$$

Hieraus folgt weiters:

$$\frac{1}{\delta} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\Delta)\, d\Delta = 1, \tag{3}$$

da es gewiss ist, dass der Fehler zwischen den Grenzen $-\infty$ und $+\infty$ liegen m u s s, die diesem Falle entsprechende Wahrscheinlichkeit demnach zur Gewissheit wird, also der Einheit gleich ist.

Mit Hilfe der Gl. (2) kann $\Phi(a, b)$ sofort berechnet werden, sobald die Form der Function φ bekannt ist, zu deren Kenntniss wir mittelst des im folgenden §. aufgestellten Satzes gelangen.

5. W e n n z u r B e s t i m m u n g e i n e r u n b e k a n n t e n G r ö s s e m e h r e r e v o n e i n a n d e r u n a b h ä n g i g e, u n t e r g l e i c h e n U m s t ä n d e n u n d m i t g l e i c h e r S o r g f a l t a n g e s t e l l t e B e o b a c h t u n g e n v o r l i e g e n, s o i s t d a s a r i t h m e t i s c h e M i t t e l a u s a l l e n d e r w a h r s c h e i n l i c h s t e a u s d i e s e n B e o b a c h t u n g e n f o l g e n d e W e r t h d e r U n b e k a n n t e n.

Ein strenger Beweis lässt sich für diesen Satz wohl nicht führen, allein er ist so sehr in der Natur der Sache begründet, dass man ihn seit jeher als unbedingt giltig angenommen hat, und in der That nichts anderes als der einfachste Ausdruck jener Eigenschaften, welche wir in §. 3 als charakteristische Merkmale der zufälligen Beobachtungsfehler erkannt haben. Bezeichnen wir nämlich mit a_1, a_2, a_3, $\ldots a_n$ die aus n Beobachtungen hervorgegangenen

Werthe der Unbekannten, mit A den wahren uns unbekannten Werth derselben, so sind:

$$\varDelta_1 = A - a_1\,,\ \varDelta_2 = A - a_2\,,\ \varDelta_3 = A - a_3\,,\ldots \varDelta_n = A - a_n$$

die wahren Fehler der Beobachtungen; durch Addition dieser Gleichungen und Division mit n folgt:

$$A = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots + a_n}{n} + \frac{\varDelta_1 + \varDelta_2 + \varDelta_3 + \ldots\ldots + \varDelta_n}{n};$$

es ist aber

$$x = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots + a_n}{n} \tag{4}$$

das arithmetische Mittel aller Beobachtungen, folglich:

$$A = x + \frac{\varDelta_1 + \varDelta_2 + \varDelta_3 + \ldots\ldots + \varDelta_n}{n}.$$

Da nun bei Beobachtungen von gleicher Güte positive und negative Beobachtungsfehler von derselben absoluten Grösse gleich wahrscheinlich sind oder gleich häufig vorkommen werden, so muss die Summe $\varDelta_1 + \varDelta_2 + \ldots\ldots + \varDelta_n$, und um so mehr der Quotient $\frac{\varDelta_1 + \varDelta_2 + \varDelta_3 + \ldots\ldots + \varDelta_n}{n}$ sich der Grenze Null nähern und zwar um so mehr, je grösser die Anzahl der Beobachtungen ist, und folglich bei einer unendlichen Anzahl von Beobachtungen das arithmetische Mittel x dem wahren Werthe A gleich werden.

Schreibt man die Gleichung (4) in folgender Form:

$$(x - a_1) + (x - a_2) + (x - a_3) + \ldots\ldots + (x - a_n) = 0\,, \tag{5}$$

wo nun $(x - a_1)$, $(x - a_2)$, u. s. w., die sogenannten übrigbleibenden Fehler der Beobachtungen sind, wenn man das arithmetische Mittel x als den wahrscheinlichsten Werth annimmt, so sieht man, dass durch letztere Annahme die Summe der übrigbleibenden Fehler $= 0$ gemacht also die Bedingung erfüllt wird, welche strenge genommen erst bei einer unendlichen Anzahl von Fehlern stattfindet; man kann daher gewiss sein, sich durch diese Annahme der Wahrheit so weit zu nähern, als es die begrenzte Anzahl der vorliegenden Beobachtungen erlaubt und durch Vermehrung dieser Anzahl der Wahrheit immer näher zu kommen.

6. Die Bestimmung der Function $\varphi(\varDelta)$ unterliegt nunmehr keiner Schwierigkeit. Da dieselbe nur von der Natur der zufälligen Beobachtungsfehler, nicht aber von der Anzahl der zu bestimmenden Unbekannten abhängen kann, so können wir der Ableitung den einfachsten Fall zu Grunde legen, in welchem nur eine Unbekannte zu bestimmen ist.

Bezeichnen wir also wieder mit a_1, a_2, ... a_n die aus n unter gleichen Umständen und mit gleicher Sorgfalt angestellten Beobachtungen hervorgegangenen Werthe einer unbekannten Grösse, so sind, wenn wir für letztere irgend einen Werth x annehmen:

$$\Delta_1 = x - a_1, \ \Delta_2 = x - a_2, \ldots\ldots \Delta_n = x - a_n$$

die dieser Annahme entsprechenden Fehler der Beobachtungen, und die Wahrscheinlichkeit, dass bei n Beobachtungen gerade diese Fehler eintreten oder zusammentreffen, wird, vermöge §. 2. IV. ausgedrückt durch das Product:

$$W = \varphi(x-a_1) \cdot \varphi(x-a_2) \cdot \varphi(x-a_3) \ldots\ldots \varphi(x-a_n). \tag{6}$$

Jeder willkürlich angenommene Werth x (Hypothese) erzeugt ein bestimmtes Fehlersystem, welchem eine bestimmte Wahrscheinlichkeit W entspricht, und es muss nach dem in §. 2, V aufgestellten Satze jener Werth der Unbekannten (d. i. jene Hypothese) die wahrscheinlichste sein, für welche die nach Gl. (6) berechnete Wahrscheinlichkeit des resultirenden Fehlersystems ein Maximum wird. Schreibt man diese Gleichung in der Form:

$$\log W = \log \varphi(x-a_1) + \log \varphi(x-a_2) + \ldots + \log \varphi(x-a_n),$$

so erhält man durch Differenziation nach x als Bedingung des Maximums:

$$\frac{\varphi'(x-a_1)}{\varphi(x-a_1)} + \frac{\varphi'(x-a_2)}{\varphi(x-a_2)} + \ldots\ldots + \frac{\varphi'(x-a_n)}{\varphi(x-a_n)} = 0,$$

aus welcher Gleichung der wahrscheinlichste Werth von x hervorgehen muss. Dieser ist aber in dem vorausgesetzten Falle kein anderer als das arithmetische Mittel aus allen Beobachtungen, für welches die Gleichung (5):

$$(x-a_1) + (x-a_2) + \ldots\ldots + (x-a_n) = 0$$

besteht, und es müssen daher beide Gleichungen denselben Werth x darbieten. Gibt man aber der vorhergehenden Gleichung die Form:

$$(x-a_1)\frac{\varphi'(x-a_1)}{(x-a_1)\,\varphi(x-a_1)} + (x-a_2)\frac{\varphi'(x-a_2)}{(x-a_2)\,\varphi(x-a_2)} + \cdots$$
$$+ (x-a_n)\frac{\varphi'(x-a_n)}{(x-a_n)\,\varphi(x-a_n)} = 0,$$

so erkennt man leicht, dass dies nur dann möglich ist, wenn

$$\frac{\varphi'(x-a_1)}{(x-a_1)\,\varphi(x-a_1)} = \frac{\varphi'(x-a_2)}{(x-a_2)\,\varphi(x-a_2)} = \cdots = \frac{\varphi'(x-a_n)}{(x-a_n)\,\varphi(x-a_n)} = k,$$

wo k eine Constante. Man hat demnach, wenn irgend einer der Fehler mit Δ bezeichnet wird:

$$\frac{\varphi'(\Delta)}{\Delta\,\varphi(\Delta)} = k,$$

oder, da $d\varphi(\Delta) = \varphi'(\Delta)\, d\Delta$:

$$\frac{d\varphi(\Delta)}{\varphi(\Delta)} = k\Delta\, d\Delta;$$

hieraus folgt durch Integration:

$$\log \varphi(\Delta) = \tfrac{1}{2} k \Delta^2 + \log c,$$

oder

$$\varphi(\Delta) = c e^{\frac{1}{2} k \Delta^2},$$

wo c die Integrations-Constante, und e die Basis der natürlichen Logarithmen bedeutet. Da $\varphi(\Delta)$ mit zunehmendem Δ abnehmen muss, so muss k wesentlich negativ sein; setzt man also $\frac{1}{2}k = -h^2$, so wird:

$$\varphi(\Delta) = c e^{-h^2 \Delta^2}. \tag{7}$$

Die Constante c bestimmt sich mit Hilfe der Gl. (3), welche durch Substitution des eben gefundenen Werthes von $\varphi(\Delta)$ in:

$$\frac{c}{\delta} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2 \Delta^2} d\Delta = 1,$$

oder, wenn man $h\Delta = t$ setzt, in:

$$\frac{c}{\delta h} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = 1$$

sich verwandelt. Es ist aber bekanntlich:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}\,^{*}),$$

---

*) Betrachtet man zunächst das Integral $J = \int_0^\infty e^{-t^2} dt$, und beachtet, dass der Werth eines bestimmten Integrals nur von den Grenzen nicht aber von dem Namen der Veränderlichen abhänge, so hat man auch $J = \int_0^\infty e^{-x^2} dx$, und somit durch Multiplication:

$$J^2 = \int_0^\infty e^{-t^2} dt \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(t^2+x^2)} dt\, dx;$$

setzt man nun $x = yt$, wo y eine neue Veränderliche ist, in Bezug auf welche, wie man leicht sieht, die Grenzen dieselben bleiben, so wird $dx = t\,dy$, und

$$J^2 = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-t^2(1+y^2)} t\, dt\, dy = \int_0^\infty dy \int_0^\infty e^{-t^2(1+y^2)} t\, dt;$$

die Integration nach t kann nun ausgeführt werden; es ist:

$$\int e^{-t^2(1+y^2)} t\, dt = -\frac{e^{-t^2(1+y^2)}}{2(1+y^2)},$$

welcher Ausdruck, zwischen den Grenzen 0 und ∞ genommen, in $\frac{1}{2(1+y^2)}$ sich verwandelt. Hiemit wird:

$$J^2 = \tfrac{1}{2} \int_0^\infty \frac{dy}{1+y^2} = \tfrac{1}{2} \Big\{ \operatorname{arc\,tg} y \Big\}_0^\infty = \frac{\pi}{4},$$

folglich

$$\int_0^\infty e^{-t^2} dt = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}, \text{ und } \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = 2\int_0^\infty e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}.$$

somit:

$$c = \frac{\delta h}{\sqrt{\pi}},$$

und folglich:

$$\varphi(\varDelta) = \frac{\delta h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \varDelta^2}. \tag{8}$$

Die Anwesenheit eines unendlich kleinen Factors δ in diesem Ausdrucke erklärt sich dadurch, dass, bei der unendlichen Anzahl der möglichen Fehler die Wahrscheinlichkeit eines einzelnen bestimmten Fehlers nothwendig unendlich klein ist. Genauer gesprochen, drückt derselbe die Wahrscheinlichkeit aus, dass der Fehler zwischen den Grenzen $\varDelta$ und $\varDelta + \delta$ liege, unter δ eine unendlich kleine Zahl verstanden, wie aus den Glgn. (2) und (p) in §. 4 ohne Schwierigkeit erhellt.

7. Da der Ausdruck (8) für alle Gattungen von Beobachtungen gilt, so werden sich die einzelnen Gattungen nur durch den ihnen zukommenden Werth der Constante h unterscheiden können, deren Bedeutung sich aus folgender Betrachtung ergibt. Substituirt man den Ausdruck (8) in die Gl. (2), so erhält man für die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer Beobachtungsart, welcher ein bestimmter Werth von h zukommt, der Fehler einer einzelnen Beobachtung zwischen den Grenzen $-a$ und $+a$ liege, den Ausdruck:

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-a}^{+a} e^{-h^2 \varDelta^2} d\varDelta;$$

da nun positive und negative Fehler von derselben Grösse gleich wahrscheinlich sind, so wird die Wahrscheinlichkeit, dass der Fehler ohne Rücksicht auf sein Zeichen zwischen den Grenzen 0 und a liege oder die Grenze a nicht überschreite, das Doppelte des obigen Ausdruckes sein; bezeichnet man daher letztere Wahrscheinlichkeit mit $\Phi(a)$, so hat man:

$$\Phi(a) = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_0^a e^{-h^2 \varDelta^2} d\varDelta = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{ah} e^{-t^2} dt.$$

Für eine andere Beobachtungsart, welcher der Werth h' zukommt, ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Fehler einer einzelnen Beobachtung die Grösse a' nicht überschreite:

$$\Phi(a') = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{a'h'} e^{-t^2} dt.$$

Setzen wir nun $\Phi(a) = \Phi(a')$, d. i. nehmen wir an, dass bei der einen Beobachtungsart ein Fehler innerhalb der Grenzen 0 und a eben so wahrscheinlich sei, wie bei der andern ein Fehler zwischen 0 und a', so muss, da der Werth eines bestimmten Integrals nur von dem Werthe der Grenzen abhängt, zwischen welchen dasselbe genommen ist,

$$ah = a'h',$$

oder $h : h' = a' : a$ sein, d. i. die Werthe von h verhalten sich verkehrt, wie gleich wahrscheinliche Fehler bei beiden Beobachtungsarten. Eine Beobachtungsart ist aber offenbar für um so genauer zu halten, je kleiner die Wahrscheinlichkeit irgend eines Fehlers $= a$, also, vermöge der obigen Proportion, je grösser h ist. Die Grösse h ist demnach der Genauigkeit der Beobachtungen direct proportional und wird aus diesem Grunde von Gauss, dem Begründer der Theorie der kleinsten Quadrate, das Maass der Präcision genannt; sie bietet daher auch das Mittel dar, Beobachtungen von verschiedener Genauigkeit miteinander zu vergleichen und zu verbinden.

Bei irgend einer Beobachtungsart, welcher ein bestimmter Werth von h zukommt, verhält sich die Wahrscheinlichkeit, einen Fehler $= 0$ zu begehen, zur Wahrscheinlichkeit, den Fehler $= \varDelta$ zu begehen, wie $\varphi(0) : \varphi(\varDelta)$, d. i. wie $1 : e^{-h^2\varDelta^2}$. Hieraus folgt nun zunächst wieder die bereits erkannte Bedeutung von h; denn je grösser h ist, desto kleiner wird $e^{-h^2\varDelta^2}$, d. i. die Wahrscheinlichkeit, einen Fehler $= \varDelta$ zu begehen im Vergleiche zu einem Fehler $= 0$, um so genauer müssen also die Beobachtungen sein. Ueberdies zieht man daraus noch folgenden Satz: Hat man für eine gewisse Gattung von Beobachtungen auf irgend eine Weise gefunden, dass die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers $= 0$ zur Wahrscheinlichkeit eines Fehlers $= \varDelta$ sich verhalte, wie $1 : e^{-q\varDelta^2}$, so ist für diese Gattung von Beobachtungen das Maass der Präcision $h = \sqrt{q}$ zu setzen.

8. Wir haben im vorhergehenden §. für die Wahrscheinlichkeit, dass der Fehler ohne Rücksicht auf sein Zeichen zwischen den Grenzen 0 und a liege, oder absolut genommen die Grösse a nicht überschreite, den Ausdruck erhalten:

$$\varPhi(a) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{ah} e^{-t^2}\, dt. \tag{9}$$

Die Berechnung des bestimmten Integrals $\int_0^{ah} e^{-t^2}\, dt$ mittelst unendlicher Reihen, welche nach auf- oder absteigenden Potenzen von t fortschreiten oder mit Hilfe eines Kettenbruches, findet man in verschiedenen Werken über Integralrechnung dargestellt*); eine Tafel, welche den Werth des Integrals (9) von $ah = 0$ bis $ah = 2$ gibt, enthält das Berliner astronomische Jahrbuch für 1834. Diese Tafel gibt z. B.:

für	$ah = 0.47$:	$\varPhi(a) = 0.49375$,
	0.48	0.50275,
	0·49	0.51167,
	0.50	0.52050,

u. s. w.

*) Man sehe z. B. des Verfassers: „Lehrbuch der höheren Mathematik“, Wien, 1864, II. Band, Seite 378 u. ff.

Umgekehrt kann man mittelst dieser Tafel auch leicht ah finden, wenn $\Phi(a)$ gegeben ist, d. i. die Fehlergrenze a, welche zu einer gegebenen Wahrscheinlichkeit $\Phi(a)$ gehört.

Von besonderer praktischer Wichtigkeit ist hier die Bestimmung jenes Werthes des Fehlers a, für welchen die Wahrscheinlichkeit, dass dieser Werth absolut genommen nicht überschritten werde, $= \frac{1}{2}$ ist; man nennt diesen Fehler den wahrscheinlichen Fehler; es ist dies daher der Fehler, welcher bei einer gegebenen Gattung von Beobachtungen eben so leicht überschritten, als nicht erreicht wird, oder: man kann 1 gegen 1 wetten, dass bei einer einzelnen Beobachtung dieser Gattung der Fehler kleiner sei als der wahrscheinliche Fehler. Bezeichnet man also den wahrscheinlichen Fehler mit r, so hat man $\Phi(r) = \frac{1}{2}$ zu setzen, und sieht aus obigem Täfelchen, dass der zugehörige Werth von rh zwischen 0.47 und 0.48 liege; man findet durch einfache Interpolation:

$$rh = 0.47694,$$

und hat demnach, wenn man die Zahl

$$0.47694 = \varrho$$

setzt:

$$r = \frac{\varrho}{h}, \quad h = \frac{\varrho}{r}. \tag{10}$$

Man sieht hieraus, dass der wahrscheinliche Fehler dem Maasse der Präcision oder der Genauigkeit der Beobachtungen verkehrt proportional ist, und daher gleichfalls als ein Maass für die Güte der Beobachtungen angewendet werden kann. Je kleiner der wahrscheinliche Fehler einer Reihe von Beobachtungen ist, desto genauer sind dieselben, desto seltener werden Beobachtungsfehler von beträchtlicherer Grösse zu erwarten sein, weil immer die halbe Anzahl sämmtlicher Fehler der absoluten Grösse nach unter dem wahrscheinlichen Fehler liegt.

Man kann daher auch, wenn für eine grössere Beobachtungsreihe die Fehler der einzelnen Beobachtungen vorliegen, den wahrscheinlichen Fehler dieser Beobachtungen näherungsweise dadurch finden, dass man sämmtliche Fehler nach ihrer Grösse ohne Rücksicht auf das Zeichen ordnet; der in der Mitte liegende Fehler bei einer geraden Anzahl von Beobachtungen, oder das arithmetische Mittel aus den zwei mittleren bei einer ungeraden Anzahl, wird ein genäherter Werth des wahrscheinlichen Fehlers sein.

9. Setzt man in Gl. (9) $a = kr$, d. i. drückt man den Fehler a in Theilen des wahrscheinlichen Fehlers aus, so wird $ah = krh = k\varrho$, und

$$\Phi(kr) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\varrho k} e^{-t^2}\, dt; \tag{11}$$

dieser Ausdruck gibt die Wahrscheinlichkeit, dass bei Beobachtungen, deren wahrscheinlicher Fehler $= r$ ist, der Fehler einer einzelnen Beobachtung die

Grösse kr, d. i. einen gegebenen aliquoten Theil, oder ein gegebenes Vielfaches des wahrscheinlichen Fehlers nicht überschreite.

Nach dem in §. 2, II. aufgestellten Satze wird dann die Anzahl der Fehler, welche unter N Fehlern die Grösse kr nicht überschreiten, ausgedrückt durch

$$N \, . \, \Phi(kr),$$

und die Anzahl der Fehler, welche zwischen gegebenen Grenzen kr und $k'r$ liegen, wird sein:

$$N[\Phi(k'r) - \Phi(kr)].$$

Zur Berechnung des Integrals (11) kann die in §. 8 erwähnte Tafel benützt werden; ist nämlich k gegeben, so hat man sofort: $a = kr = k \, . \, \frac{\varrho}{h}$, somit $ah = k\varrho$. Sucht man z. B. die Wahrscheinlichkeit, dass der Fehler einer Beobachtung 0.1 des wahrscheinlichen Fehlers nicht überschreite, so hat man $k = 0.1$ zu setzen, womit $ah = 0.1\,\varrho = 0.047694$ wird; mit diesem Werthe von ah gibt die Tafel $\Phi(a) = 0.05377$ für die gesuchte Wahrscheinlichkeit; d. i. unter 1000 Beobachtungen irgend welcher Gattung wird man immer erwarten dürfen, sehr nahe 54 zu finden, deren Fehler 0.1 des wahrscheinlichen Fehlers nicht überschreitet. Um den Uebergang von dem gegebenen Werthe von k zu dem Argumente ah der oberwähnten Tafel zu ersparen, ist es zweckmässig die Tafel so umzuformen, dass sie die Werthe des Integrals (11) unmittelbar mit dem Argumente k gebe. Dies leistet die folgende Tafel, welche auszugsweise dem Berliner astronomischen Jahrbuche von 1834 entlehnt ist.

Aus dieser Tafel übersieht man mit einem Blick, dass unter 1000 Beobachtungen irgend welcher Gattung sich befinden werden:

264	Beob.,	deren	Fehler	nicht	grösser	als $0.5\,r$,
500	„	„	„	„	„	„ r,
688	„	„	„	„	„	„ $1.5\,r$,
823	„	„	„	„	„	„ $2.0\,r$,
908	„	„	„	„	„	„ $2.5\,r$,
957	„	„	„	„	„	„ $3.0\,r$,
982	„	„	„	„	„	„ $3.5\,r$,
993	„	„	„	„	„	„ $4.0\,r$,

also nur 7 Fehler grösser als $4r$, nur einer grösser als $5r$.

Durch Subtraction je zweier dieser Zahlen findet man weiters, dass von 1000 Fehlern:

zwischen	0	und $0.5\,r$	liegen	werden	264	Fehler,
„	$0.5\,r$	„ $1.0\,r$	„	„	236	„
„	$1.0\,r$	„ $1.5\,r$	„	„	188	„
„	$1.5\,r$	„ $2.0\,r$	„	„	135	„

u. s. w.

Wie nahe diese theoretische Bestimmung mit der Erfahrung übereinstimmt, zeigt folgendes Beispiel. Aus 470 Bradlei'schen Beobachtungen des Rectascensionsunterschiedes der Sonne und eines der beiden Sterne α Aquilae

Tafel des Integrals: $\Phi(kr)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\varrho k} e^{-t^2}\,dt;\ \varrho=0.47694.$

k	$\Phi(kr)$	k	$\Phi(kr)$	k	$\Phi(kr)$	k	$\Phi(kr)$	k	$\Phi(kr)$
0.00	0.0000	0.40	0.2127	0.80	0.4105	1.40	0.6550	2.50	0.9082
0.01	0054	0.41	2179	0.81	4152	1.42	6618	2.55	9146
0.02	0108	0.42	2230	0.82	4198	1.44	6686	2.60	9205
0.03	0161	0.43	2282	0.83	4244	1.46	6753	2.65	9261
0.04	0215	0.44	2334	0.84	4290	1.48	6818	2.70	9314
0.05	0269	0.45	2385	0.85	4336	1.50	6883	2.75	9364
0.06	0323	0.46	2436	0.86	4381	1.52	6947	2.80	9411
0.07	0377	0.47	2488	0.87	4427	1.54	7011	2.85	9454
0.08	0430	0.48	2539	0.88	4472	1.56	7073	2.90	9495
0.09	0484	0.49	2590	0.89	4517	1.58	7134	2.95	9534
0.10	0.0538	0.50	0.2641	0.90	0.4562	1.60	0.7195	3.00	9570
0.11	0591	0.51	2691	0.91	4606	1.62	7255	3.05	9603
0.12	0645	0.52	2742	0.92	4651	1.64	7313	3.10	9635
0.13	0699	0.53	2793	0.93	4695	1.66	7371	3.15	9664
0.14	0752	0.54	2843	0.94	4739	1.68	7428	3.20	9691
0.15	0806	0.55	2893	0.95	4783	1.70	7485	3.25	9716
0.16	0859	0.56	2944	0.96	4827	1.72	7540	3.30	9740
0.17	0913	0.57	2994	0.97	4871	1.74	7594	3.35	9762
0.18	0966	0.58	3044	0.98	4914	1.76	7648	3.40	9782
0.19	1020	0.59	3093	0.99	4957	1.78	7701	3.45	9800
0.20	0.1073	0.60	0.3143	1.00	0.5000	1.80	0.7753	3.50	0.9818
0.21	1126	0.61	3192	1.02	5085	1.82	7804	3.55	9834
0.22	1180	0.62	3242	1.04	5170	1.84	7854	3.60	9848
0.23	1233	0.63	3291	1.06	5254	1.86	7904	3.65	9862
0.24	1286	0.64	3340	1.08	5337	1.88	7952	3.70	9874
0.25	1339	0.65	3389	1.10	5419	1.90	8000	3.75	9886
0.26	1392	0.66	3438	1.12	5500	1.92	8047	3.80	9896
0.27	1445	0.67	3487	1.14	5581	1.94	8093	3.85	9906
0.28	1498	0.68	3535	1.16	5660	1.96	8138	3.90	9915
0.29	1551	0.69	3584	1.18	5739	1.98	8183	3.95	9923
0.30	0.1604	0.70	0.3632	1.20	0.5817	2.00	0.8227	4.00	0.9930
0.31	1656	0.71	3680	1.22	5894	2.05	8332	4.10	9943
0.32	1709	0.72	3728	1.24	5971	2.10	8433	4.20	9954
0.33	1761	0.73	3775	1.26	6046	2.15	8530	4.30	9963
0.34	1814	0.74	3823	1.28	6121	2.20	8622	4.40	9970
0.35	1866	0.75	3870	1.30	6194	2.25	8709	4.50	9976
0.36	1919	0.76	3918	1.32	6267	2.30	8792	4.60	9981
0.37	1971	0.77	3965	1.34	6339	2.35	8870	4.70	9985
0.38	2023	0.78	4012	1.36	6410	2.40	8945	4.80	9988
0.39	2075	0.79	4059	1.38	6480	2.45	9016	4.90	9991
0.40	0.2127	0.80	0.4105	1.40	0.6550	2.50	0.9082	5.00	9993

und α Canis minoris fand Bessel den wahrscheinlichen Fehler einer directen Beobachtung: $r = 0''.2637$ und verglich dann die Anzahl der Fehler, die zwischen den Grenzen $0''.0$ und $0''.1$; $0''.1$ und $0''.2$ u. s. w. immer um $0''.1$ Secunde aufsteigend der Theorie nach liegen sollen, mit den Fehlern, welche die wirkliche Erfahrung bei 470 Beobachtungen ergeben hat.

Man hat zu diesem Zwecke der Reihe nach $k = \frac{0.1}{r}, \frac{0.2}{r}, \frac{0.3}{r}$, u. s. w., also, da $\frac{1}{r} = 3.792$ ist, $k = 0.3792$, $k = 0.7584$, $k = 1.1376$ u. s. w. zu setzen, die zugehörigen Werthe von $\Phi(kr)$ aus obiger Tafel zu interpoliren und mit 470 zu multipliciren, endlich je zwei aufeinanderfolgende der so erhaltenen Zahlen von einander zu subtrahiren. Auf diese Art ergaben sich:

zwischen	Anzahl der Fehler nach der Theorie:	Erfahrung:
$0''.0$ und $0''.1$	95	94
0 .1 „ 0 .2	89	88
0 .2 „ 0 .3	78	78
0 .3 „ 0 .4	64	58
0 .4 „ 0 .5	50	51
0 .5 „ 0 .6	36	36
0 .6 „ 0 .7	24	26
0 .7 „ 0 .8	15	14
0 .8 „ 0 .9	9	10
0 .9 „ 1 .0	5	7
über 1 .0	5	8

Die Uebereinstimmung zwischen Theorie und Erfahrung lässt, wie man sieht, nichts zu wünschen übrig, und bestätiget die Richtigkeit der der Theorie zu Grunde liegenden Anschauungen über die Natur der zufälligen Beobachtungsfehler.

10. Neben dem wahrscheinlichen Fehler bedient man sich, um die Genauigkeit der Beobachtungen auszudrücken, noch des sogenannten mittleren Fehlers. Man versteht darunter jene Grösse, deren Quadrat gleich ist dem arithmetischen Mittel aus den Quadraten der wahren Beobachtungsfehler.

Bezeichnet man letztere mit Δ, Δ', Δ'', ..., so sind $\varphi(\Delta)$, $\varphi(\Delta')$, $\varphi(\Delta'')$, ... die Wahrscheinlichkeiten derselben, und es werden daher unter n Fehlern $n\varphi(\Delta)$ Fehler vorkommen von der Grösse Δ, $n\varphi(\Delta')$ von der Grösse Δ' u. s. w. Bedeutet daher ε den mittleren Fehler, so wird, zufolge der Definition:

$$\varepsilon^2 = \frac{\Delta^2 . n\varphi(\Delta) + \Delta'^2 . n\varphi(\Delta') + \Delta''^2 . n\varphi(\Delta'') + \dots}{n} = \Sigma \Delta^2 \varphi(\Delta).$$

Substituirt man in diesem Ausdruck für $\varphi(\Delta)$ den Werth aus Gl. (8) und nimmt, um alle möglichen Beobachtungsfehler zu umfassen, die Summe von $-\infty$ bis $+\infty$, so wird:

$$\varepsilon^2 = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \delta \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2\Delta^2} \Delta^2,$$

d. i. vermöge der Gl. (p) in §. 4:

$$\varepsilon^2 = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2\Delta^2} \Delta^2 d\Delta = \frac{1}{h^2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} t^2\, dt.$$

Durch Anwendung des Verfahrens der theilweisen Integration, nach der Gleichung $\int u dv = uv - \int v du$, erhält man aber, $u = t$, $dv = e^{-t^2} t\, dt$ setzend:

$$\int e^{-t^2} t^2\, dt = -\tfrac{1}{2} t e^{-t^2} + \tfrac{1}{2} \int e^{-t^2} dt.$$

Bei dem Uebergange zu den Grenzen verschwindet das Glied $t e^{-t^2}$ für $t = \pm \infty$, und es kommt:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} t^2\, dt = \tfrac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \tfrac{1}{2} \sqrt{\pi}.$$

Hiemit erhält man nun:

$$\varepsilon^2 = \frac{1}{2h^2}, \quad \varepsilon = \frac{1}{h\sqrt{2}}, \tag{12}$$

und mit Zuziehung der Gl. (10):

$$r = \varrho \sqrt{2} \cdot \varepsilon = 0.67449\, \varepsilon. \tag{13}$$

Die Gleichungen (12) und (13) geben nun das Verhältniss des mittleren Fehlers zu dem Maasse der Präcision und dem wahrscheinlichen Fehler. Man sieht, dass dieses Verhältniss ein constantes, und der wahrscheinliche Fehler nahe $= \frac{2}{3}$ des mittleren Fehlers ist.

11. Es seien a_1, $a_2, \ldots a_n$ die aus n gleich genauen Beobachtungen hervorgegangenen Werthe einer unbekannten Grösse, so ist bekanntlich der wahrscheinlichste Werth x derjenige, der den Ausdruck

$$W = \varphi(x - a_1) \cdot \varphi(x - a_2) \ldots \varphi(x - a_n)$$

zu einem Maximum macht, welcher Ausdruck die Wahrscheinlichkeit des dem Werthe x entsprechenden Fehlersystems gibt, und welchem, zufolge §. 2, V auch die Wahrscheinlichkeit des dieses Fehlersystem erzeugenden Werthes x selbst proportional ist. Mit Rücksicht auf die Gl. (8) verwandelt sich dieser Ausdruck in:

$$W = \frac{\delta^n h^n}{\pi^{\frac{n}{2}}} e^{-h^2 \left\{(x - a_1)^2 + (x - a_2)^2 + \ldots + (x - a_n)^2\right\}},$$

und dieser wird ein Maximum für jenen Werth von x, welcher die Summe

$$S = (x - a_1)^2 + (x - a_2)^2 + \ldots + (x - a_n)^2$$

zu einem Minimum macht. Es sind aber $(x - a_1)$, $(x - a_2)$, .. die übrig bleibenden Fehler der Beobachtungen, und hieraus folgt nun der Satz:

Der wahrscheinlichste Werth der unbekannten Grösse ist derjenige, welcher die Summe der Quadrate der übrig bleibenden Fehler zu einem Minimum macht.

Die Bedingung des Minimums ist bekanntlich $\frac{dS}{dx} = 0$, d. i.

$$(x - a_1) + (x - a_2) + \ldots + (x - a_n) = 0, \tag{14}$$

woraus, als wahrscheinlichster Werth:

$$x = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}, \tag{15}$$

d. i. das arithmetische Mittel folgt, was selbstverständlich ist, da bei Ableitung der Form der Function φ der Satz vom arithmetischen Mittel zu Grunde gelegt wurde.

Das eben ausgesprochene Princip, von welchem der Name: Theorie oder Methode der kleinsten Quadrate herrührt, lässt sich nun auch sehr leicht auf Beobachtungen von verschiedener Genauigkeit ausdehnen.

In diesem Falle wird jedem der beobachteten Werthe a_1, a_2, ... a_n ein anderes Maass der Präcision entsprechen; seien diese h_1, h_2, ... u. s. w., so ist, wenn der Kürze wegen:

$$v_1 = x - a_1, \; v_2 = x - a_2 \ldots v_n = x - a_n$$

die Fehler der einzelnen Beobachtungen bedeuten, die Wahrscheinlichkeit des Zusammentreffens dieser Fehler:

$$W = \frac{\delta^n h_1 h_2 \ldots h_n}{\pi^{\frac{n}{2}}} e^{-(h_1^2 v_1^2 + h_2^2 v_2^2 + \ldots + h_n^2 v_n^2)},$$

und diese wird ein Maximum für jenen Werth von x, welcher die Summe

$$S = h_1^2 v_1^2 + h_2^2 v_2^2 + \ldots + h_n^2 v_n^2$$

zu einem Minimum macht. Es muss also in diesem Falle die Summe der Quadrate der Producte der übrigbleibenden Fehler in die zugehörigen Maasse der Präcision ein Minimum werden.

12. Man kann diese Bedingung noch auf eine andere für die Praxis bequemere Weise ausdrücken. Sei h das Maass der Präcision einer willkürlich gewählten Gattung von Beobachtungen, welche wir gleichsam als Maassstab der Vergleichung der Beobachtungen a_1, a_2, ... bezüglich ihrer verschiedenen Genauigkeit annehmen, und:

$$p_1 = \frac{h_1^2}{h^2}, \quad p_2 = \frac{h_2^2}{h^2}, \ldots \; p_n = \frac{h_n^2}{h^2}; \tag{16}$$

der obige Ausdruck von W verwandelt sich dann in

$$W = \frac{\delta^n h^n \sqrt{p_1 p_2 \ldots p_n}}{\pi^{\frac{n}{2}}} e^{-h^2 (p_1 v_1^2 + p_2 v_2^2 + \ldots + p_n v_n^2)}, \tag{17}$$

und damit dieser Ausdruck ein Maximum werde, muss die Summe:

$$S = p_1 v_1^2 + p_2 v_2^2 + \dots + p_n v_n^2$$

ein Minimum werden. Man nennt die Zahlen p_1, p_2, ..., welche, wie man sieht, sich verhalten wie die Quadrate der Maasse der Präcision, die Gewichte der Beobachtungen a_1, a_2, .., und kann nun den vorhergehenden Satz auch in folgender Form aussprechen:

Der wahrscheinlichste Werth einer Grösse, für welche die Beobachtungen die Werthe a_1, a_2, .., mit den Gewichten p_1, p_2, .. ergeben haben, ist derjenige, welcher die Summe der in ihre respectiven Gewichte multiplicirten Quadrate der übrigbleibenden Fehler zu einem Minimum macht.

Schreibt man nun die letzte Gleichung in der Form:

$$S = p_1 (x - a_1)^2 + p_2 (x - a_2)^2 + \dots + p_n (x - a_n)^2,$$

so gibt die Bedingung des Minimums:

$$p_1 (x - a_1) + p_2 (x - a_2) + \dots + p_n (x - a_n) = 0, \tag{18}$$

woraus folgt:

$$x = \frac{p_1 a_1 + p_2 a_2 + \dots + p_n a_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n}. \tag{19}$$

Man erhält daher den wahrscheinlichsten Werth der Unbekannten, wenn man jede Beobachtung mit ihrem Gewichte multiplicirt, und die Summe dieser Producte durch die Summe der Gewichte dividirt, und nennt diesen Werth das arithmetische Mittel mit Rücksicht auf die Gewichte.

Setzt man der Kürze wegen:

$$p_1 a_1 + p_2 a_2 + \dots + p_n a_n = [pa],$$
$$p_1 + p_2 + \dots + p_n = [p],$$

welche Bezeichnung für Summen gleichartig gebildeter Grössen im Folgenden immer angewendet werden soll, so können die letzten Gleichungen kurz in folgender Form geschrieben werden:

$$[pv] = 0, \tag{18}$$

$$x = \frac{[pa]}{[p]}. \tag{19}$$

Ist $p_1 = p_2 = \dots = p_n$, d. i. haben die Beobachtungen gleiche Genauigkeit, so gehen beide Gleichungen über in $[v] = 0$ und $x = \frac{[a]}{n}$, übereinstimmend mit den Glgn. (14) und (15) im vorhergehenden §.

Wie schon oben bemerkt, verhalten sich die Gewichte directe wie die Quadrate der Maasse der Präcision, und da letztere vermöge der Glgn. (10) und (12) den wahrscheinlichen und mittleren Fehlern verkehrt proportional sind, so verhalten sich die Gewichte auch verkehrt wie die Quadrate der wahrscheinlichen oder mittleren Fehler.

Die Gewichte drücken daher die relative Genauigkeit der Beobachtungen aus und sind nur Verhältnisszahlen, indem hiebei das Gewicht irgend einer willkürlich gewählten Beobachtung als Einheit angenommen wird, welche Beobachtung dann die Gewichtseinheit genannt wird. So ist die oben als Vergleichungsmaassstab benützte Gattung von Beobachtungen, deren Maass der Präcision wir h genannt haben, die Gewichtseinheit, wie dies sofort erhellt, wenn man die Glgn. (16) in der Form: $p_1 : 1 = h_1^2 : h^2$, u. s. w. schreibt. Auch die Gl. (19) zeigt deutlich, dass die Gewichte nur Relativzahlen sind, indem sich der Werth von x nicht ändert, wenn man an die Stelle von $p_1, p_2, \ldots p_n : \alpha p_1, \alpha p_2, \ldots \alpha p_n$ treten lässt, unter α irgend eine beliebige Zahl verstanden.

13. Es erübrigt nun noch, die Genauigkeit des durch die Glgn. (15) oder (19) bestimmten wahrscheinlichsten Werthes der Unbekannten d. i. des arithmetischen Mittels kennen zu lernen, wobei sogleich der allgemeinere, in Gl. (19) ausgesprochene Fall betrachtet werden mag, wenn die Beobachtungen von verschiedener Genauigkeit sind.

Bedeuten wieder $v_1, v_2, \ldots$ die übrigbleibenden Fehler der einzelnen Beobachtungen bezogen auf den wahrscheinlichsten Werth x der Unbekannten, so ist die Wahrscheinlichkeit des letzteren vermöge der Gl. (17) proportional der Grösse:

$$W = \frac{\delta^n h^n \sqrt{p_1 p_2 \ldots p_n}}{\pi^{\frac{n}{2}}} e^{-h^2 [pvv]},$$

welche die Wahrscheinlichkeit des Zusammentreffens eben dieser Fehler ausdrückt, und wo h das Maass der Präcision der Gewichtseinheit bedeutet. Bezeichnet man für irgend einen andern Werth der Unbekannten, z. B. $x + \zeta$, die Fehler der Beobachtungen mit Δ_1, Δ_2, u. s. w., so wird:

$$\Delta_1 = x + \zeta - a_1 = v_1 + \zeta,$$
$$\Delta_2 = x + \zeta - a_2 = v_2 + \zeta,$$
u. s. w.

Quadrirt man diese Gleichungen, multiplicirt sodann jede derselben mit dem zugehörigen Gewichte und addirt sie, so erhält man mit Rücksicht auf die Gl. (18):

$$[p\Delta\Delta] = [pvv] + [p]\zeta^2,$$

und es ist demnach die Wahrscheinlichkeit des Werthes $x + \zeta$ proportional der Gröse:

$$W' = \frac{\delta^n h^n \sqrt{p_1 p_2 \ldots p_n}}{\pi^{\frac{n}{2}}} e^{-\{[pvv] + [p]\zeta^2\}};$$

es verhält sich demnach die Wahrscheinlichkeit W, dass der Werth $x = \frac{[pa]}{[p]}$

der wahre Werth sei oder den Fehler $=0$ habe, zur Wahrscheinlichkeit W', dass er um die Grösse ζ fehlerhaft sei, wie

$$1 : e^{-h^2[p]\zeta^2}.$$

Bezeichnet man also das Maass der Präcision des arithmetischen Mittels $x = \frac{[pa]}{[p]}$ mit H, so hat man vermöge des in §. 7 erhaltenen Satzes:

$$H = h\sqrt{[p]}; \tag{20}$$

bedeutet ferner P das Gewicht des arithmetischen Mittels x, so ist $P : 1 = H^2 : h^2$, somit:

$$P = [p]. \tag{21}$$

D a s G e w i c h t d e s a r i t h m e t i s c h e n M i t t e l s i s t d e m n a c h g l e i c h d e r S u m m e d e r G e w i c h t e d e r e i n z e l n e n B e o b a c h t u n g e n.

Bezeichnen wir ferner mit ε und ε_0 die mittleren Fehler der Gewichtseinheit und des arithmetischen Mittels, so ist zufolge Gl. (12):

$$\varepsilon = \frac{1}{h\sqrt{2}}, \quad \varepsilon_0 = \frac{1}{H\sqrt{2}},$$

folglich, mit Rücksicht auf (20):

$$\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon}{\sqrt{[p]}} \tag{22}$$

Diese Ausdrücke hängen nur noch von der Grösse h, d. i. dem Maasse der Präcision der Gewichtseinheit ab, und es ist klar, dass uns zur Bestimmung derselben kein anderes Mittel zu Gebote steht, als die Fehler der Beobachtungen selbst. Lassen wir demnach $\Delta_1, \Delta_2, \ldots$ die w a h r e n Fehler der Beobachtungen bedeuten, so ist die Wahrscheinlichkeit des Zusammentreffens derselben:

$$W = \frac{\delta^n h^n \sqrt{p_1 p_2 \cdots p_n}}{\pi^{\frac{n}{2}}} e^{-h^2[p\Delta\Delta]};$$

da nun diese Fehler wirklich eingetreten und folglich einer Aenderung nicht fähig sind, so hängt diese Wahrscheinlichkeit nur noch von dem Werthe von h ab, und es wird vermöge des Satzes V, §. 2, jener Werth von h der wahrscheinlichste sein, für welchen die Wahrscheinlichkeit W des Zusammentreffens der wirklich eingetretenen Beobachtungsfehler ein Maximum wird. Dies gibt die Bedingung $\frac{dW}{dh} = 0$, oder:

$$nh^{n-1} e^{-h^2[p\Delta\Delta]} - 2h^n e^{-h^2[p\Delta\Delta]} h\,[p\Delta\Delta] = 0,$$

d. i.:

$$n - 2h^2[p\Delta\Delta] = 0. \tag{m}$$

Hieraus folgt nun:

$$h = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{n}{[p\Delta\Delta]}},$$

und vermöge der Gl. (12):

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{[p\Delta\Delta]}{n}}. \tag{n}$$

Die wahren Beobachtungsfehler Δ sind aber unbekannt; man kennt nur ihre wahrscheinlichsten Werthe, d. i. die übrigbleibenden Fehler $v_1 = x - a_1$, u. s. w. Bezeichnet man nun mit $x + \zeta$ den wahren Werth der Unbekannten, so ist $\Delta_1 = x + \zeta - a_1 = v_1 + \zeta$ u. s. w., und man erhält auf demselben Wege, wie oben:

$$[p\Delta\Delta] = [pvv] + [p]\,\zeta^2.$$

Hieraus erhellt, dass, da $[p]\,\zeta^2$ wesentlich positiv, $[pvv]$ jedenfalls zu klein ist, was auch schon daraus folgt, dass jeder noch so wenig vom arithmetischen Mittel verschiedene Werth nothwendig eine grössere Summe der Fehlerquadrate geben muss. Der Werth von ζ ist nun allerdings unbekannt; da aber die letzte Gleichung andeutet, dass der Werth von $[pvv]$ jedenfalls vergrössert werden muss, so werden wir uns der Wahrheit so weit nähern, als es die Umstände erlauben, wenn wir für ζ den mittleren Fehler des arithmetischen Mittels nehmen und somit $\zeta = \varepsilon_0 = \frac{\varepsilon}{\sqrt{[p]}}$ setzen, wodurch die letzte Gleichung in folgende: $[p\Delta\Delta] = [pvv] + \varepsilon^2$ übergeht. Durch Verbindung dieser Gleichung mit der obigen (n) erhält man sofort:

$$[p\Delta\Delta] = \frac{n}{n-1}\,[pvv], \tag{p}$$

und:

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{[pvv]}{n-1}}. \tag{23}$$

Hiemit ist nun der mittlere Fehler der Gewichtseinheit bestimmt. Gl. (22) gibt dann den mittleren Fehler des arithmetischen Mittels; sind ferner r und r_0 die wahrscheinlichen Fehler der Gewichtseinheit und des arithmetischen Mittels, so ist:

$$r = 0.67449\,\varepsilon\,, \quad r_0 = 0.67449\,\varepsilon_0. \tag{24}$$

Sind die Beobachtungen von gleicher Genauigkeit, so entspricht allen dasselbe Gewicht, das selbstverständlich am einfachsten $= 1$ genommen wird; setzt man also in obigen Formeln $p_1 = p_2 = \ldots = p_n = 1$, so wird für Beobachtungen von gleicher Genauigkeit:

der mittlere Fehler einer Beobachtung: $\varepsilon = \sqrt{\frac{[vv]}{n-1}}$, (25)

der mittlere Fehler des arithmetischen Mittels: $\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$ (26)

das Gewicht des arithmetischen Mittels: $P = n$, (27)

wo n die Anzahl der Beobachtungen. Die Glgn. (24) bleiben ungeändert.

Aus Gl. (27) folgt sofort, dass das Gewicht eines gegebenen Werthes nichts anderes ist, als die Anzahl von Beobachtungen einer bestimmten Art, deren Gewicht hiebei als Einheit angenommen wird, welche erforderlich wäre, um aus ihrem arithmetischen Mittel eine Bestimmung von derselben Genauigkeit zu erhalten, wie jene des gegebenen Werthes.

Diese Definition des Begriffes „Gewicht" führt unmittelbar zu den Ausdrücken (18) und (19). Denn man kann vermöge derselben die Werthe a_1, a_2, a_3, u. s. w., welchen die Gewichte $p_1, p_2, p_3, \ldots$ entsprechen, als arithmetische Mittel aus beziehungsweise $p_1, p_2, p_3, \ldots$. Beobachtungen betrachten, welch' letzteren das Gewicht 1 zukommt, wodurch die Beobachtungen von verschiedener Genauigkeit auf solche von gleicher Genauigkeit zurückgeführt sind. Die Summe derjenigen Beobachtungen, welche a_1 als Mittel geben, ist dann nach Gl. (15) $= p_1 a_1$, eben so die Summe der Beobachtungen, welche a_2 zum Mittel geben, $= p_2 a_2$, u. s. w.; die Summe aller dieser Beobachtungen ist also $= p_1 a_1 + p_2 a_2 + \ldots\ldots + p_n a_n = [pa]$, die Anzahl derselben $= p_1 + p_2 + \cdots + p_n = [p]$, folglich nach Gl. (15) der wahrscheinlichste Werth der Unbekannten $= \frac{[pa]}{[p]}$, und nach Gl. (27) das Gewicht dieses Werthes $= [p]$, übereinstimmend mit den Gl. (18) und (19).

Die Gl. (26) zeigt ferner, dass der mittlere Fehler des arithmetischen Mittels im verkehrten Verhältnisse der Quadratwurzel aus der Anzahl der Beobachtungen abnimmt; es werden daher 4 Beobachtungen erfordert, um denselben auf die Hälfte; 9 Beobachtungen, um ihn auf $\frac{1}{3}$, 100 Beobachtungen, um ihn auf $\frac{1}{10}$ des mittleren Fehlers einer Beobachtung herabzudrücken; da man nun bezüglich der Vervielfältigung der Beobachtungen in jedem einzelnen Falle bald an eine durch Zeit und andere Umstände gesteckte Grenze gelangt, so erhellt von selbst, dass man trachten müsse, schon die einzelnen Beobachtungen möglichst genau zu machen, da die blosse Vermehrung der Anzahl den Mangel an innerer Güte nicht zu ersetzen vermag.

14. Die im vorhergehenden §. erhaltene Bestimmung der Grössen h, ε, r, u. s. w. aus den übrigbleibenden Fehlern der Beobachtungen ist selbstverständlich nicht als absolut genau zu betrachten, sondern gibt nur deren wahrscheinlichste Werthe; untersuchen wir also noch den Grad der Genauigkeit dieser Bestimmung. Sind wieder $\Delta_1, \Delta_2, \ldots$ die wahren Beobachtungsfehler, n an der Zahl, so ist für irgend einen Werth von h die Wahrscheinlichkeit des Zusammentreffens dieser Fehler:

$$W = \frac{\delta^n h^n \sqrt{p_1 p_2 \cdots p_n}}{\pi^{\frac{n}{2}}} e^{-h^2 [p\Delta\Delta]},$$

oder, wenn man auf die natürlichen Logarithmen übergeht:

$$\log W = \log \delta^n + \log \sqrt{p_1 p_2 \ldots p_n} - \log \pi^{\frac{n}{2}} + n \log h - h^2 [p\Delta\Delta].$$

Für einen anderen Werth von h, etwa $h+\zeta$, wird diese Wahrscheinlichkeit:

$$\log W' = \log \delta^n + \log \sqrt{p_1 p_2 \ldots p_n} - \log \pi^{\frac{n}{2}} + n \log (h+\zeta) - (h+\zeta)^2 [p\Delta\Delta].$$

Es ist aber:

$$\log (h+\zeta) = \log h \left(1+\frac{\zeta}{h}\right) = \log h + \log \left(1+\frac{\zeta}{h}\right)$$
$$= \log h + \frac{\zeta}{h} - \frac{1}{2}\frac{\zeta^2}{h^2} + \frac{1}{3}\frac{\zeta^3}{h^3} - \ldots,$$

folglich, wenn man nach Potenzen von ζ ordnet:

$$\log W' = \log \delta^n + \log \sqrt{p_1 p_2 \ldots p_n} - \log \pi^{\frac{n}{2}} + n \log h - h^2 [p\Delta\Delta]$$
$$+ \left(\frac{n}{h} - 2h[p\Delta\Delta]\right)\zeta - \left(\frac{n}{2h^2} + [p\Delta\Delta]\right)\zeta^2 + \frac{n}{3h^3}\zeta^3 - \ldots\ldots$$

Durch Subtraction beider Gleichungen für $\log W$ und $\log W'$, kommt:

$$\log \frac{W'}{W} = \frac{1}{h}\left(n - 2h^2[p\Delta\Delta]\right)\zeta - \frac{1}{2h^2}\left(n + 2h^2[p\Delta\Delta]\right)\zeta^2 + \frac{n}{3h^3}\zeta^3 - \ldots$$

Diese Gleichung liefert zunächst wieder den schon oben erhaltenen wahrscheinlichsten Werth von h, indem für diesen W ein Maximum, also $\log W' - \log W$ negativ werden muss für jeden Werth von ζ, was nur möglich, wenn der Coefficient der ersten Potenz von ζ: $n - 2h^2[p\Delta\Delta] = 0$ ist, übereinstimmend mit Gl. (m), §. 13; durch Substitution dieses wahrscheinlichsten Werthes von h verwandelt sich nun die letzte Gleichung, mit Vernachlässigung der höheren Potenzen von $\frac{\zeta}{h}$ in:

$$\log \frac{W'}{W} = -\frac{n}{h^2}\zeta^2, \quad \text{oder} \quad \frac{W'}{W} = e^{-\frac{n}{h^2}\zeta^2}.$$

Es verhält sich also die Wahrscheinlichkeit W, dass $h = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{n}{[p\Delta\Delta]}}$ der wahre Werth sei (den Fehler $= 0$ habe), zur Wahrscheinlichkeit W', dass $h+\zeta$ der wahre Werth (also h um ζ fehlerhaft) sei, wie $1 : e^{-\frac{n}{h^2}\zeta^2}$; es ist daher [§. 7] $\frac{\sqrt{n}}{h}$ das Maass der Präcision unserer Bestimmung von h, folglich, vermöge der Gl. (10), $\frac{\varrho h}{\sqrt{n}}$ der wahrscheinliche Fehler derselben, oder es ist eben so wahrscheinlich, dass der wahre Werth von h zwischen den Grenzen

$$h - \frac{\varrho h}{\sqrt{n}} = h\left(1 - \frac{\varrho}{\sqrt{n}}\right) \text{ und } h + \frac{\varrho h}{\sqrt{n}} = h\left(1 + \frac{\varrho}{\sqrt{n}}\right)$$

liege, als ausserhalb derselben, oder man kann 1 gegen 1 wetten, dass er innerhalb derselben liege.

Da ferner der mittlere Fehler $\varepsilon = \frac{1}{h\sqrt{2}}$ ist, so sind die wahrscheinlichen Grenzen desselben

$$\frac{1}{h\sqrt{2}\left(1 \pm \frac{\varrho}{\sqrt{n}}\right)} = \frac{\varepsilon}{\left(1 \pm \frac{\varrho}{\sqrt{n}}\right)},$$

wofür man genügend genau mit Vernachlässigung der höheren Potenzen von $\frac{\varrho}{\sqrt{n}}$ setzen kann:

$$\varepsilon\left(1 \mp \frac{\varrho}{\sqrt{n}}\right).$$

Dasselbe gilt in Folge des constanten Verhältnisses zwischen dem mittleren und wahrscheinlichen Fehler auch für letzteren; man erhält also die wahrscheinlichen Grenzen der Unsicherheit der nach den Formeln des §. 13 bestimmten mittleren und wahrscheinlichen Fehler, wenn man letztere mit

$$1 \mp \frac{0.47694}{\sqrt{n}} \tag{28}$$

multiplicirt, wobei n die Anzahl der Beobachtungen.

15. Beispiele. 1) Aus beobachteten Zenithdistanzen des Polarsternes wurden für die Polhöhe des Dreieckspunctes Wetrnik in Böhmen folgende Werthe (a) erhalten, welche, auf je einer Einstellung in jeder Kreislage beruhend, sämmtlich gleiche Genauigkeit besitzen.

№	a	v	vv	№	a	v	vv
1	49° 1′ 18″.19	−0″.43	0.1849	16	49° 1′ 17″.05	+0″.71	0.5041
2	17 .29	+0 .47	0.2209	17	17 .43	+0 .33	0.1089
3	18 .76	−1 .00	1.0000	18	17 .64	+0 .12	0.0144
4	17 .92	−0 16	0.0256	19	17 .99	−0 .23	0.0529
5	18 .10	−0 .34	0.1156	20	18 .08	−0 .32	0.1024
6	17 .07	+0 .69	0.4761	21	17 .43	+0 .33	0.1089
7	18 .15	−0 .39	0.1521	22	18 .07	−0 .31	0.0961
8	17 .52	+0 .24	0.0576	23	16 .94	+0 .82	0.6724
9	17 .78	−0 .02	0.0004	24	16 .89	+0 .87	0.7569
10	18 .32	−0 .56	0.3136	25	19 .41	−1 .65	2.7225
11	17 .54	+0 .22	0.0484	26	17 .72	+0 .04	0.0016
12	17 .22	+0 .54	0.2916	27	17 .61	+0 .15	0.0225
13	18 .88	−1 .12	1.2544	28	16 .68	+1 .08	1.1664
14	17 .63	+0 .13	0.0169	29	17 .69	+0 .07	0.0049
15	18 .80	−1 .04	1.0816	30	17 .08	+0 .68	0.4624

Es wird nun, wenn wir bei der Bildung von $[a]$ nur den Ueberschuss über 17″ mitnehmen, das arithmetische Mittel:

$$x = \frac{[a]}{n} = \frac{22.88}{30} = 0''.763,$$

also der wahrscheinlichste Werth:

$$x = 49^0\ 1'\ 17''.763.$$

Durch Vergleichung dieses Werthes mit den einzelnen Beobachtungen ergeben sich die übrigbleibenden Fehler v, und $[vv] = 12''.0370$. Hiemit findet man nun, da $n = 30$:

den mittleren Fehler einer Beobachtung: $\varepsilon = \sqrt{\frac{[vv]}{n-1}} = \pm 0.''644$,

den wahrscheinl. „ „ „ $r = 0.6746\,\varepsilon = 0.435$;

den mittleren Fehler des arithm. Mittels: $\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} = 0.118$,

den wahrscheinl. „ „ „ „ $r_0 = 0.6745\,\varepsilon_0 = \pm 0.079$.

Man könnte somit, in so ferne nur diese Beobachtungen in Betracht kommen, und dieselben von jedem constanten Fehler frei wären, 1 gegen 1 wetten, dass der wahre Werth der Polhöhe zwischen $x + r_0$ und $x - r_0$, d. i. zwischen $49^0\ 1'\ 17''.684$ und $49^0\ 1'\ 17''.832$, und dass der wahre Werth des wahrscheinlichen Fehlers innerhalb der Grenzen

$$r_0 \left(1 \mp \frac{0.47694}{\sqrt{n}}\right)$$

d. i. zwischen $0''.072$ und $0''.086$ liege.

2) Um ein Beispiel für Beobachtungen von verschiedener Genauigkeit zu geben, wollen wir aus den obigen 30 Beobachtungen etwa 7 Gruppen bilden, und die Beobachtungen No. 1—3, No. 4—9, No. 10—11 u. s. w. in je ein Mittel vereinigen. Wir erhalten dadurch 7 Werthe der Polhöhe von ungleicher Genauigkeit, deren Gewichte p gleich der Anzahl von einfachen Beobachtungen zu setzen sind, welche in jedem Werthe zum Mittel vereinigt wurden, wobei eine der obigen einfachen Beobachtungen die Gewichtseinheit bildet. Die Rechnung ist dann folgende:

№	a	p	ap	v	v^2	pv^2
1	$49^0 1' 18''.080$	3	3.240	-0.317	0.100489	0.3015
2	17 .757	6	4.542	$+0.006$	0.000036	0.0002
3	17 .930	2	1.860	-0.167	0.027889	0.0558
4	17 .807	7	5.649	-0.044	0.001936	0.0135
5	17 .892	4	3.568	-0.129	0.016641	0.0666
6	17 .714	5	3.570	$+0.049$	0.002401	0.0120
7	17 .150	3	0.450	$+0.613$	0.375769	1.1273
		30	22.879			1.5769

Es ist nun, wenn bei der Bildung der Producte ap wieder nur der Ueberschuss über 17'' mitgenommen wird, das arithmetische Mittel mit Rücksicht auf die Gewichte:

$$x = \frac{[ap]}{[p]} = \frac{22''.879}{30} = 0''.763\,,$$

also der wahrscheinlichste Werth:

$$x = 49^0\ 1'\ 17''.763,$$

nothwendig übereinstimmend mit dem oben erhaltenen Werthe.

Aus den übrigbleibenden Fehlern folgt ferner (mit $n = 7$):

Mittlerer Fehler der Gewichtseinheit: $\varepsilon = \sqrt{\frac{[pvv]}{n-1}} = \pm\ 0''.513\,,$

Wahrscheinl. „ „ „ $r = 0.6745\,\varepsilon = \pm\ 0.346\,,$

Mittlerer Fehler des arithm. Mittels: $\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon}{\sqrt{[p]}} = \pm\ 0.094\,,$

Wahrscheinl. „ „ „ „ $r_0 = 0.6745\,\varepsilon = \pm\ 0.063.$

Dass diese Werthe der Fehler mit den im ersten Beispiele erhaltenen nicht genau übereinstimmen, hat darin seinen Grund, weil unsere Formeln auf der Voraussetzung beruhen, dass die verschiedenen Fehler im Verhältnisse zu ihrer Wahrscheinlichkeit vorhanden sind, wozu offenbar eine viel grössere Zahl von Beobachtungen, als in unserem Beispiele, erfordert würde.

16. Der Ableitung des wahrscheinlichsten Werthes einer Unbekannten aus Beobachtungen von verschiedener Genauigkeit muss selbstverständlich die Feststellung der Gewichte vorausgehen. Sind, wie dies häufig vorkommt, die gegebenen Werthe a_1, a_2, u. s. w. selbst arithmetische Mittel aus Beobachtungen, welche sämmtlich gleiche Genauigkeit haben, so wird sofort die Anzahl der in jedem dieser Werthe zum Mittel vereinigten Beobachtungen als Gewicht desselben anzunehmen sein, wie dies in dem zweiten der obigen Beispiele geschehen ist.

In anderen Fällen sind die mittleren oder wahrscheinlichen Fehler der gegebenen Werthe bekannt; dann wird man als Gewichte Zahlen anzuwenden haben, welche sich verkehrt verhalten wie die Quadrate dieser Fehler; nimmt man eine Beobachtung, deren mittlerer Fehler ein beliebig gewählter $= m$ ist, als Gewichtseinheit an und bezeichnet mit m_1, m_2, u. s. w. die bekannten mittleren Fehler der Beobachtungen a_1, a_2, u. s. w., so sind die Gewichte derselben:

$$p_1 = \frac{m^2}{m_1^2}\,, \quad p_2 = \frac{m^2}{m_2^2}\,, \quad p_3 = \frac{m^2}{m_3^2}\,, \ldots.$$

In beiden Fällen wird aber auf diese Art nur dann eine richtige Gewichtsbestimmung erhalten, wenn man sicher ist, dass nicht noch Fehlerquellen vorhanden sind, welche, während sie für alle Beobachtungen, die einen einzelnen der Werthe a liefern, constant bleiben, auf die verschiedenen Werthe a_1, a_2, ... in ungleicher Weise einwirken. Dies gibt sich sofort dadurch zu erkennen, dass die Uebereinstimmung dieser Werthe unter einander geringer ist, als es mit Rücksicht auf ihre mittleren Fehler der Fall sein sollte. Häufig führt dann folgender Weg zu einer richtigeren Bestimmung der Gewichte.

Man berechnet zunächst mit obigen, auf die Gewichtseinheit m sich beziehenden Gewichten nach (Gl. 19) den wahrscheinlichsten Werth der Unbekannten, bildet durch Vergleichung desselben mit den einzelnen Beobachtungen die v, und erhält nach Gl. (23) für den mittleren Fehler der Gewichtseinheit den Werth:

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{[pvv]}{n-1}},$$

(wo n die Anzahl der Beobachtungen); die mittleren Fehler der einzelnen Beobachtungen a_1, a_2, ... würden hiemit:

$$\varepsilon_1^2 = \frac{\varepsilon^2}{p_1}, \quad \varepsilon_2^2 = \frac{\varepsilon^2}{p_2}, \quad \varepsilon_3^2 = \frac{\varepsilon^2}{p_3}, \text{ u. s. w.}$$

Wären nun die Beobachtungen von keinen anderen Fehlerquellen beeinflusst, als jenen zufälligen, welche die mittleren Fehler m_1, m_2, ... erzeugen, so müsste wenigstens sehr nahe

$$p_1\varepsilon_1^2 + p_2\varepsilon_2^2 + p_3\varepsilon_3^2 + \ldots = p_1 m_1^2 + p_2 m_2^2 + p_3 m_3^2 + \ldots$$

d. i. $n\varepsilon^2 = nm^2$, oder $\varepsilon = m$ sich ergeben. Zeigt sich aber $\varepsilon > m$, so deutet dies eben darauf hin, dass auf die einzelnen Werthe a noch andere Fehlerquellen eingewirkt haben, welche bei der obigen Gewichtsbestimmung unberücksichtiget blieben. Bezeichnet man nun mit f den aus diesen letzteren Fehlerquellen entspringenden mittleren Fehler, so sind, vermöge eines später [§. 18] zu erweisenden Satzes die Quadrate der vollständigen Fehler der einzelnen Beobachtungen a_1, a_2, a_3, ...:

$$f^2 + m_1^2, \; f^2 + m_2^2, \; f^2 + m_3^2, \ldots$$

oder

$$f^2 + \frac{m^2}{p_1}, \; f^2 + \frac{m^2}{p_2}, \; f^2 + \frac{m^2}{p_3}, \ldots$$

und es muss nun die Gleichung bestehen:

$$p_1\varepsilon_1^2 + p_2\varepsilon_2^2 + p_3\varepsilon_3^2 + \ldots = p_1\left(f^2 + \frac{m^2}{p_1}\right) + p_2\left(f^2 + \frac{m^2}{p_2}\right) + \ldots,$$

d. i.

$$n\varepsilon^2 = nm^2 + [p]f^2,$$

woraus folgt:

$$f = \sqrt{\frac{n(\varepsilon^2 - m^2)}{[p]}}. \tag{29}$$

Hiemit ergeben sich dann die richtigeren Gewichte:

$$p'_1 = \frac{m^2}{f^2 + \frac{m^2}{p_1}},\; p'_2 = \frac{m^2}{f^2 + \frac{m^2}{p_2}},\; p'_3 = \frac{m^2}{f^2 + \frac{m^2}{p_3}}, \text{ etc.} \qquad (30)$$

Die Sicherheit dieser Bestimmung hängt, wie leicht einzusehen, wesentlich davon ab, dass die Anzahl n der Beobachtungen nicht zu gering ist und dass die constanten Fehler, mit welchen die einzelnen Werthe a_1, a_2, u. s. w. behaftet sind, und als deren mittlerer Werth f betrachtet wird, hinreichend nahe das Gesetz der zufälligen Beobachtungsfehler befolgen, d. i. dass positive und negative Werthe derselben von gleicher absoluter Grösse gleich häufig auftreten. Man sieht aus den Ausdrücken (30), dass, je grösser f ist im Verhältniss zu den mittleren Fehlern m_1, m_2, ... der einzelnen Beobachtungen, um so mehr die Gewichte p' einander gleich werden; gestatten daher die Umstände nicht eine genügend sichere Bestimmung von f, so wird es vortheilhafter sein, die Werthe a_1, a_2, u. s. w. mit gleichem Gewichte zum Mittel stimmen zu lassen, als dieselben mit Rücksicht auf die Anzahl der Beobachtungen oder ihre mittleren Fehler zu verbinden, weil auf diese Weise der überwiegende Einfluss der constanten Fehler sicherer eliminirt wird.

Weit schwieriger wird aber die Feststellung der Gewichte, wenn der Beobachter nur in Folge der äusseren Umstände, welche bei den einzelnen Beobachtungen obwalteten, oder durch ein gewisses Gefühl sich zu der Annahme berechtigt hält, dass die Genauigkeit derselben eine merklich verschiedene sei; für solche häufig vorkommende Fälle lässt sich keine bestimmte Regel aufstellen und es erfordert Erfahrung, Umsicht und Unbefangenheit von Seite des Rechners, um in jedem einzelnen Falle eine möglichst richtige Wahl zu treffen. Nur kann im Allgemeinen bemerkt werden, dass es in diesen Fällen sicherer ist, den Beobachtungen, wenn sie nicht überhaupt als misslungen zu betrachten sind, lieber gleiches oder wenigstens nicht zu sehr verschiedenes Gewicht zu geben, als einzelne derselben durch allzu grosse Verringerung ihres Gewichtes von dem Resultate mehr oder weniger auszuschliessen.

17. Bei einer grösseren Anzahl von Beobachtungen ist die Bildung der Summe der Fehlerquadrate $[vv]$ der beschwerlichste Theil der Rechnung und es wäre wünschenswerth, auf einem bequemeren Wege zur Kenntniss des wahrscheinlichen Fehlers gelangen zu können. Man kann zu diesem Zwecke das arithmetische Mittel aus allen Fehlern, diese sämmtlich mit positivem Zeichen genommen, benützen, welches der durchschnittliche Fehler heissen mag. Bezeichnen wir denselben mit η, mit Δ, Δ', Δ'', ... die wahren Beobachtungsfehler, sämmtlich mit positivem Zeichen genommen, so sind $\varphi(\Delta)$, $\varphi(\Delta')$ u. s. w. die Wahrscheinlichkeiten dieser Fehler und unter n Beobachtungen werden daher $n\varphi(\Delta)$ von der Grösse Δ, $n\varphi(\Delta')$ von der Grösse Δ', u. s. w. vorkommen; die Summe aller Fehler ist daher

$\Delta \,.\, n\varphi(\Delta) + \Delta' \,.\, n\varphi(\Delta') + \ldots$, und der durchschnittliche Fehler, zufolge der Definition:

$$\eta = \frac{\Delta \,.\, n\varphi(\Delta) + \Delta' \,.\, n\varphi(\Delta') + \Delta'' n\varphi(\Delta'') + \ldots}{n} = \Sigma \Delta \varphi(\Delta).$$

Substituirt man nun den Werth von $\varphi(\Delta)$ aus Gl. (8) und nimmt, um alle möglichen Beobachtungsfehler zu umfassen, die Summe von $\Delta = -\infty$ bis $\Delta = +\infty$, so wird, mit Rücksicht auf die Gl. p, §. 4:

$$\eta = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2 \Delta^2} \Delta \, d\Delta = \frac{1}{h\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} t \, dt = \frac{2}{h\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-t^2} t \, dt = \frac{1}{h\sqrt{\pi}}.$$

Es ist aber der wahrscheinliche Fehler $r = \frac{\varrho}{h}$, somit

$$r = \varrho \sqrt{\pi} \,.\, \eta = 0.84535 \, \eta. \tag{31}$$

Sind nun $\Delta_1, \Delta_2, \ldots \Delta_n$ die wahren Fehler der Beobachtungen $a_1, a_2, \ldots a_n$, welche wir von gleicher Genauigkeit voraussetzen, so ist

$$\eta = \frac{\Sigma \Delta}{n}$$

zu setzen, wo $\Sigma \Delta$ die Summe der Fehler, sämmtlich mit positivem Zeichen genommen, und n die Anzahl der Beobachtungen bedeutet. Zwischen den unbekannten wahren Beobachtungsfehlern Δ und den bekannten übrigbleibenden Fehlern v haben wir aber als wahrscheinlichste Relation erhalten:

$$[\Delta\Delta] = \frac{n}{n-1}[vv],$$

welche aus Gl. (p) [§. 13] sofort sich ergibt, wenn wir daselbst die Beobachtungen als gleich genau, somit $p_1 = p_2 = \ldots = p_n$ annehmen. Aus dieser Gleichung folgt:

$$\sqrt{\frac{[\Delta\Delta]}{n}} = \sqrt{\frac{n}{n-1}} \sqrt{\frac{[vv]}{n}},$$

wo nun $\sqrt{\frac{[\Delta\Delta]}{n}}$ den mittleren Werth der wahren, und $\sqrt{\frac{[vv]}{n}}$ den mittleren Werth der übrigbleibenden Fehler darstellt und deren Verhältniss durch $\sqrt{\frac{n}{n-1}}$ ausgedrückt ist; in demselben Verhältnisse wird man auch die Summen $\Sigma\Delta$ und Σv anzunehmen, und somit

$$\Sigma \Delta = \sqrt{\frac{n}{n-1}} \, \Sigma v,$$

zu setzen haben, wo Σv die Summe der übrigbleibenden Fehler, sämmtlich mit positivem Zeichen genommen, bedeutet. Hiemit wird

$$\eta = \frac{\Sigma v}{\sqrt{n(n-1)}},$$

und der wahrscheinliche Fehler:

$$r = 0.84535 \frac{\Sigma v}{\sqrt{n(n-1)}}. \tag{32}$$

In dem obigen Beispiele, §. 15, ist $\Sigma v = 15''.06$, $n = 30$; hiemit folgt als wahrscheinlicher Fehler einer Beobachtung nach Gl. (32):

$$r = \pm\, 0''.431;$$

die in diesem Falle so gut wie vollkommene Uebereinstimmung dieses Werthes mit dem oben erhaltenen ($0''.435$) ist wohl mehr zufällig; der aus (32) folgende Werth wird übrigens praktisch immer genügend genau sein, wenn n nicht zu klein ist. Ja man kann, bei grösserem n, statt der Gl. (32) ohne merklichen Fehler die einfachere:

$$r = 0.84535 \frac{\Sigma v}{n} \tag{32*}$$

anwenden; sie gibt in unserem Beispiele $r = \pm\, 0''.424$.

II. Genauigkeit der Functionen mehrerer von einander unabhängiger beobachteter Grössen.

18. Es sei $X = f(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ eine Function mehrerer von einander unabhängiger Grössen, für welche aus directen Beobachtungen beziehungsweise die wahrscheinlichsten Werthe $a_1, a_2, a_3, \ldots$ mit den mittleren Fehlern $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots$ erhalten wurden, so ist sofort klar, dass der wahrscheinlichste Werth von $X = f(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ sein müsse, und es handelt sich daher nur noch um die Bestimmung des mittleren oder wahrscheinlichen Fehlers dieses Werthes.

Betrachten wir zunächst den einfachsten Fall, wenn X die Summe oder Differenz zweier beobachteter Grössen also

$$X = x_1 \pm x_2$$

ist. Wie immer die wahrscheinlichsten Werthe a_1, a_2 der Grössen x_1 und x_2 erhalten worden sein mögen, so kann man immer annehmen, dass beide Werthe aus einer grossen Anzahl von Beobachtungen hervorgegangen seien, und diese Anzahl für beide gleich sei, wo dann die Genauigkeiten der beiden Beobachtungsreihen den mittleren Fehlern ε_1 und ε_2 der Werthe a_1 und a_2 verkehrt proportional sein werden. Bezeichnen wir dann die wahren Fehler der angenommenen Beobachtungen

$$\text{für } x_1 \text{ mit } \Delta_1, \Delta_1', \Delta_1'', \ldots$$
$$\text{für } x_2 \text{ mit } \Delta_2, \Delta_2', \Delta_2'', \ldots$$

so sind die Fehler von X:

$$\Delta_1 \pm \Delta_2,\ \Delta_1' \pm \Delta_2',\ \Delta_1'' \pm \Delta_2'', \ldots.$$

wo bei jedem derselben beide Zeichen gleich möglich sind. Bedeutet ferner E

den mittleren Fehler von X, und n die Anzahl der angenommenen Beobachtungen, so ist zufolge der Definition des mittleren Fehlers [§. 10]:

$$\begin{aligned} n\,E^2 &= (\Delta_1 \pm \Delta_2)^2 + (\Delta_1{}' \pm \Delta_2{}')^2 + (\Delta_1{}'' + \Delta_2{}'')^2 + \ldots \\ &= [\Delta_1\Delta_1] \pm 2\,[\Delta_1\Delta_2] + [\Delta_2\Delta_2]. \end{aligned}$$

Bei einer grossen Anzahl von Beobachtungen werden aber die positiven und negativen Producte von der Form $\Delta_1\Delta_2$ gleich häufig vorkommen, so dass wir als wahrscheinlichsten Werth $[\Delta_1\Delta_2] = 0$ zu setzen haben. Da nun überdies $[\Delta_1\Delta_1] = n\,\varepsilon_1^2$, $[\Delta_2\Delta_2] = n\,\varepsilon_2^2$, so wird:

$$E^2 = \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 .$$

Ist

$$X = x_1 \pm x_2 \pm x_3 ,$$

so setze man $x_1 \pm x_2 = x_0$; dann wird $X = x_0 \pm x_3$, und, wenn ε_0 der mittlere Fehler von x_0, dem Vorhergehenden zufolge: $\varepsilon_0^2 = \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2$, $E^2 = \varepsilon_0^2 + \varepsilon_3^2$, somit

$$E^2 = \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 ,$$

und der Satz kann auf diese Art auf die algebraische Summe einer beliebigen Anzahl beobachteter Grössen ausgedehnt werden. In Folge des constanten Verhältnisses zwischen dem mittleren und wahrscheinlichen Fehler gilt derselbe auch für letzteren. Ist daher:

$$X = x_1 \pm x_2 \pm x_3 \pm \ldots ,$$

und sind r_1, r_2, $r_3, \ldots, R$ die wahrscheinlichen Fehler von x_1, x_2, $x_3, \ldots, X$, so hat man:

$$R = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + \ldots\ldots} = \sqrt{[rr]}. \qquad (33)$$

Bezeichnen wir mit p_1, p_2, $p_3, \ldots$ die Gewichte von x_1, x_2, $x_3, \ldots$ mit P das Gewicht von X, so ist, wenn r_0 der wahrscheinliche Fehler der Gewichtseinheit:

$$P = \frac{r_0^2}{R^2},\ p_1 = \frac{r_0^2}{r_1^2},\ p_2 = \frac{r_0^2}{r_2^2},\ p_3 = \frac{r_0^2}{r_3^2} \ldots ,$$

folglich, zufolge der Gl. (33):

$$\frac{r_0^2}{P} = \frac{r_0^2}{p_1} + \frac{r_0^2}{p_2} + \frac{r_0^2}{p_3} + \ldots ,$$

d. i.

$$P = \frac{1}{\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} + \ldots\ldots} = \frac{1}{\left[\frac{1}{p}\right]} \qquad (34)$$

In dem häufig vorkommenden Falle, dass $X = x_1 \pm x_2$, also aus 2 Theilen zusammengesetzt ist, hat man

$$R = \sqrt{r_1^2 + r_2^2}, \quad P = \frac{p_1 p_2}{p_1 + p_2}. \qquad (35)$$

Sind die Werthe von x_1, x_2, x_3, ... gleich genau, so wird $r_1 = r_2 = r_3 \ldots = r$, $p_1 = p_2 = \ldots p$, somit, wenn n die Anzahl dieser Werthe:

$$R = r\sqrt{n}, \quad P = \frac{p}{n}. \tag{36}$$

Aus diesen Formeln folgt der für die Praxis wichtige Satz, dass, wenn eine Grösse durch Zusammenlegung mehrerer Theile bestimmt werden muss, der wahrscheinliche Fehler der algebraischen Summe wie die Quadratwurzel aus der Anzahl der Theile zunimmt, oder das Gewicht der Summe der Anzahl der Theile verkehrt proportional ist. Man wird daher immer trachten, in solchen Fällen die Anzahl der Theile möglichst gering zu machen.

Beispiel. Man habe die Zenithdistanz eines Sternes im Meridiane beobachtet: $z = 19^0\, 48'\, 12''.7$ mit einem wahrscheinlichen Fehler $r_1 = \pm 2''.5$; die Declination des Sternes sei $\delta = 28^0\, 12'\, 27''.7$ und der wahrscheinliche Fehler derselben $r_2 = \pm 0''.8$; hieraus findet man die Breite φ des Beobachtungsortes mittelst der Formel $\varphi = z + \delta = 48^0\, 0'\, 40''.4$ und der wahrscheinliche Fehler dieser Bestimmung ist, nach (33):

$$R = \pm \sqrt{(2.5)^2 + (0.8)^2} = \pm 2''.62.$$

Dieser Satz findet auch Anwendung auf den Fall, wenn ein Resultat durch mehrere von einander unabhängige Beobachtungen zu Stande kommt, deren jede einem gewissen Fehler unterworfen ist. So erfordert z. B. die Beobachtung einer Richtung mit einem Winkelmessinstrumente die Einstellung des Fernrohres auf das Object und die Ablesung des Kreises; nennt man daher α den mittleren Einstellungsfehler (Visurfehler), β den mittleren Fehler einer Ablesung, so ist der mittlere Fehler einer beobachteten Richtung $\varepsilon = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$. Die Messung eines Winkels erfordert die Beobachtung zweier Richtungen, deren jede dem mittleren Fehler ε unterworfen ist; der mittlere Fehler des gemessenen Winkels ist daher nach Gl. (36) $= \varepsilon\sqrt{2} = \sqrt{2\alpha^2 + 2\beta^2}$.

19. Die gegebene Function sei nun:

$$X = \alpha x,$$

wo α einen bekannten Coefficienten bedeutet. Ist aus Beobachtungen der wahrscheinlichste Werth $x = a$ hervorgegangen mit einem wahrscheinlichen Fehler r, so ist offenbar $X = \alpha a$ der wahrscheinlichste Werth von X, und da jeder Fehler $\pm \Delta$ in x den Fehler $\pm \alpha \Delta$ in X erzeugt, so wird der wahrscheinliche Fehler in X:

$$R = \pm \alpha r. \tag{37}$$

Hieraus folgt nun mit Rücksicht auf Gl. (33) im vorhergehenden §. der folgende Satz:

Ist:

$$X = \alpha_1 x_1 \pm \alpha_2 x_2 \pm \alpha_3 x_3 \pm \ldots, \tag{38}$$

und sind $r_1, r_2, r_3, \ldots$ die wahrscheinlichen Fehler der wahrscheinlichsten Werthe von $x_1, x_2, x_3, \ldots, R$ jener von X, so hat man:

$$R^2 = \alpha_1^2 r_1^2 + \alpha_2^2 r_2^2 + \alpha_3^2 r_3^2 + \ldots = [\alpha^2 r^2]. \tag{39}$$

Dieselbe Relation gilt für die mittleren Fehler. Bezeichnet man mit P das Gewicht von X, mit $p_1, p_2, \ldots$ die Gewichte der wahrscheinlichsten Werthe von $x_1, x_2, \ldots$, so wird

$$\frac{1}{P} = \frac{\alpha_1^2}{p_1} + \frac{\alpha_2^2}{p_2} + \frac{\alpha_3^2}{p_3} + \ldots = \left[\frac{\alpha\alpha}{p}\right]. \tag{40}$$

Häufig kommt der Fall vor, dass eine Grösse X durch die halbe Summe oder Differenz zweier beobachteter Grössen x_1, x_2 bestimmt wird, also:

$$X = \tfrac{1}{2}(x_1 \pm x_2)$$

ist; für diesen Fall folgt aus (40):

$$P = \frac{4 p_1 p_2}{p_1 + p_2}, \tag{41}$$

wenn p_1 und p_2 die Gewichte von x_1 und x_2.

Ist $r_1 = r_2 = r_3 = \ldots = r$, also auch $p_1 = p_2 = p_3 = \ldots = p$, d. h. sind die beobachteten Werthe von $x_1, x_2, x_3, \ldots$ gleich genau, so hat man:

$$R = \pm r\sqrt{[\alpha\alpha]}, \quad \frac{1}{P} = \frac{[\alpha\alpha]}{p}. \tag{42}$$

Diese Formeln führen, noch weiter specialisirt, wieder auf die bekannten Ausdrücke des wahrscheinlichen Fehlers und Gewichtes des arithmetischen Mittels zurück. Lässt man nämlich den Ausdruck (38) rechter Hand aus n positiven Gliedern bestehen, und setzt $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 \ldots = \alpha_n = \frac{1}{n}$, so wird $X = \frac{[x]}{n}$ das arithmetische Mittel aus $x_1, x_2, \ldots x_n$, und vermöge der Glgn. (42) wird der wahrscheinliche Fehler desselben $R = r\sqrt{n \cdot \frac{1}{n^2}} = \frac{r}{\sqrt{n}}$, und dessen Gewicht $P = np$, oder für $p = 1: P = n$, übereinstimmend mit den Formeln (26) und (27).

Aus der Vergleichung der beiden Formeln (36) und (37) folgt weiters, dass, wenn eine Grösse X nicht unmittelbar als Ganzes bestimmt werden kann, es vortheilhafter ist, dieselbe aus mehreren direct beobachteten Theilen zusammenzusetzen, als einen aliquoten Theil zu messen, und durch Vervielfachung desselben X zu bilden. Im ersteren Falle ist nämlich, wenn n Theile gemessen wurden, deren Summe $= X$ ist, zufolge der Glgn. (36):

$$R = r\sqrt{n}, \quad P = \frac{p}{n},$$

wenn r der wahrscheinliche Fehler, und p das Gewicht eines Theiles. Hat man aber mit derselben Genauigkeit nur den n^{ten} Theil von X, d. i. $x = \frac{X}{n}$ gemessen, wo dann $X = nx$ ist, so wird, nach Gl. (37) und (40)

$$R = nr, \quad P = \frac{p}{n^2},$$

somit der wahrscheinliche Fehler von X, im letzteren Falle $\sqrt{n}$ mal grösser, das Gewicht n mal kleiner, als im ersteren, und man müsste, um in X dieselbe Genauigkeit zu erlangen, den n^{ten} Theil x n mal messen.

20. Betrachten wir nun den allgemeinen Fall, wo

$$X = f(x_1, x_2, x_3, \ldots) \tag{43}$$

irgend eine beliebige Function von $x_1, x_2, \ldots$ bedeuten mag, und setzen $x_1 = a_1 + \xi_1$, $x_2 = a_2 + \xi_2$, $x_3 = a_3 + \xi_3, \ldots$, unter $a_1, a_2, \ldots$ wieder die wahrscheinlichsten Werthe von $x_1, x_2, \ldots$ verstanden, so werden $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots$ sehr kleine Grössen sein, deren wahrscheinlichster Werth $= 0$ ist, mit den wahrscheinlichen Fehlern $r_1, r_2, r_3, \ldots$, welche den Werthen $a_1, a_2, a_3, \ldots$ zukommen. Nach dem Taylor'schen Lehrsatze hat man nun, mit Vernachlässigung der höheren Potenzen der kleinen Grössen $\xi_1, \xi_2, \ldots$:

$$X = f(a_1, a_2, a_3, \ldots) + \frac{dX}{dx_1}\xi_1 + \frac{dX}{dx_2}\xi_2 + \frac{dX}{dx_3}\xi_3 + \ldots.$$

Setzt man die constante Grösse $f(a_1, a_2, a_3, \ldots) = A$, schreibt die Gleichung in der Form:

$$X - A = \frac{dX}{dx_1}\xi_1 + \frac{dX}{dx_2}\xi_2 + \frac{dX}{dx_3}\xi_3 + \ldots,$$

und beachtet, dass auch die Differenzialquotienten $\frac{dx}{dx_1}$ u. s. w. constante Grössen sind, da in denselben $x_1 = a_1$, $x_2 = a_2$ u. s. w. gesetzt werden muss, so haben wir es wieder mit dem im vorhergehenden §. behandelten Falle zu thun, und der wahrscheinliche Fehler von X wird nach Gl. (39):

$$R = \pm\sqrt{\left(\frac{dX}{dx_1}\right)^2 r_1^2 + \left(\frac{dX}{dx_2}\right)^2 r_2^2 + \left(\frac{dX}{dx_3}\right)^2 r_3^2 + \ldots} \tag{44}$$

Beispiel. Zur Bestimmung einer Distanz $AB = a$, welche nicht direct gemessen werden konnte, wurden die Entfernungen $AC = b$ und $BC = c$ von einem dritten Puncte und der Winkel $ACB = A$ gemessen und folgende Werthe erhalten:

$b = 53.466$ Meter, m. d. wahrscheinlichen Fehler $r_1 = \pm 0.0025$ Meter,
$c = 60.611$ „ „ „ „ „ $r_2 = \pm 0.0030$ „
$A = 163^0\ 15'\ 20''$ „ „ „ „ $r_3 = \pm 10''$.

Es ist nun: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$, woraus sich $a = 112.866$ Meter ergibt; ferner findet man:

$$\frac{da}{db} = \frac{b - c\cos A}{a} = 0.988\,, \quad \frac{da}{dc} = \frac{c - b\cos A}{a} = 0.991\,,$$

$$\frac{da}{dA} = \frac{bc\sin A}{a} = 8.272.$$

Der Fehler des Winkels A, in Bogenmaass für den Halbmesser 1 ausgedrückt, ist $r_3 = 10'' \sin 1'' = 0.00004848$, und man erhält daher als wahrscheinlichen Fehler von a

$$R = \sqrt{\{(0.988 \times 0.0035)^2 + (0.991 \times 0.0040)^2 + (8.27 \times 10'' \sin 1'')^2\}}$$
$$= \pm\ 0.0053 \text{ Meter.}$$

II. BESTIMMUNG DER WAHRSCHEINLICHSTEN WERTHE MEHRERER VON EINANDER UNABHÄNGIGER GRÖSSEN AUS BEOBACHTETEN WERTHEN VON FUNCTIONEN DERSELBEN.

21. Es seien x, y, z, u. s. w. unbekannte Grössen, k an der Zahl, und

$$V = f(x, y, z, \ldots a, b, c, \ldots)$$

eine beliebige Function derselben, deren analytischer Ausdruck bekannt ist. Aus Beobachtungen habe man einen Werth M_1 der Function V_1 erhalten, welcher den bekannten Werthen a_1, b_1, c_1, ... der Coefficienten $a, b, c, \ldots$ entspricht, so folgt hieraus die Gleichung:

$$M_1 = f(x, y, z, \ldots a_1\,, b_1\,, c_1\,, \ldots).$$

Jede neu hinzukommende, unter anderen Umständen, d. h. bei geänderten Werthen von $a, b, c, \ldots$ angestellte Beobachtung liefert eine neue Gleichung:

$$M_2 = f(x, y, z, \ldots a_2\,, b_2\,, c_2\,, \ldots),$$
$$M_3 = f(x, y, z, \ldots a_3\,, b_3\,, c_3\,, \ldots),$$
u. s. w.

So lange die Anzahl der Beobachtungen, also auch der Gleichungen kleiner ist als die Anzahl der Unbekannten, ist es bekanntlich unmöglich, bestimmte Werthe der Unbekannten zu finden. Ist die Anzahl der Gleichungen gleich jener der Unbekannten, so lässt sich nichts thun, als die Gleichungen auf gewöhnliche Weise aufzulösen; übersteigt aber die Anzahl m der Gleichungen jene k der Unbekannten, so wird es, in Folge der den beobachteten Functionswerthen M_1, M_2, u. s. w, anhaftenden Beobachtungsfehler kein System von Werthen der Unbekannten geben, welches sämmtlichen Gleichungen strenge Genüge leistet, und es entsteht nun die Aufgabe, jenes System zu finden, welches sämmtliche Gleichungen möglichst nahe befriediget oder mit Rücksicht auf die vorliegenden Beobachtungen das wahrscheinlichste ist.

Hiebei sind zwei Classen von Aufgaben zu unterscheiden. Die unbekannten Grössen x, y, z, u. s. w. sind entweder von einander völlig unabhängig, so dass theoretisch jeder Werth irgend einer derselben mit jedem Werthe aller übrigen verträglich ist; oder es können gewisse Bedingungen existiren, welchen die zu findenden wahrscheinlichsten Werthe der Unbekannten jedenfalls genügen müssen; bedeuten z. B. drei derselben die Winkel eines Dreieckes, so sind offenbar nur solche Werthe zulässig, welche der geometrischen Bedingung, dass die Summe der Winkel in einem Dreiecke eine theoretisch bestimmte ist, Genüge leisten. Die Betrachtung des zweiten Falles dem folgenden Abschnitte vorbehaltend, beschäftigen wir uns im Folgenden mit den Aufgaben der ersten Classe, wenn die Unbekannten von einander unabhängig sind.

22. Es ist offenbar nicht nothwendig, dass, wie oben angenommen wurde, die verschiedenen Gleichungen aus derselben Function $V = f(x, y, z, \ldots)$ entspringen; dieselben können vielmehr aus verschiedenen Functionen:

$V = f(x, y, z, \ldots)$, $V' = \varphi(x, y, z, \ldots)$, $V'' = F(x, y, z, \ldots)$, u. s. w.

hervorgehen, für welche aus Beobachtungen die Werthe $V = M_1$, $V' = M_2$, $V'' = M_3$, u. s. w. erhalten wurden. Die weitere Behandlung der Aufgabe setzt jedoch wesentlich voraus, dass die Gleichungen von linearer Form seien; und es ist daher, wenn dies nicht der Fall ist, vor Allem nothwendig, sie auf diese Form zu bringen, was immer möglich ist. Zu diesem Zwecke seien $X, Y, Z, \ldots$ genäherte Werthe der Unbekannten, die man sich immer verschaffen kann, z. B. durch Auflösung von k Gleichungen, welche man aus den m vorhandenen zweckmässig auswählt. Setzt man dann:

$$x = X + \xi, \quad y = Y + \eta, \quad z = Z + \zeta, \ldots$$

so hat man es mit der Bestimmung der wahrscheinlichsten Werthe der Correctionen $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ zu thun, welche, wenn die genäherten Werthe mit gehöriger Sorgfalt bestimmt sind, immer so klein sein werden, dass die Quadrate und Producte derselben vernachlässiget werden können. Durch Substitution der obigen Werthe wird nun

$$V = f(X + \xi, \ Y + \eta, \ Z + \zeta, \ldots),$$

und hieraus folgt, zufolge des Taylor'schen Theorems und mit Vernachlässigung der höheren Glieder:

$$V = f(X, Y, Z, \ldots) + \frac{dV}{dx}\xi + \frac{dV}{dx}\eta + \frac{dV}{dz}\zeta + \ldots,$$

wo in den Differenzialquotienten $\frac{dV}{dx}$, u. s. w. für $x, y, z, \ldots$ die genäherten Werthe $X, Y, Z, \ldots$ zu substituiren sind, wodurch dieselben, eben so wie die Grösse $f(X, Y, Z, \ldots)$ bekannte Zahlen werden. Hat man nun durch die Beobachtung den Werth $V = M$ erhalten, und setzt die bekannten Grössen:

$$f(X, Y, Z, \ldots) - M = n, \quad \frac{dV}{dx} = a, \quad \frac{dV}{dy} = b, \quad \frac{dV}{dz} = c, \ldots,$$

so verwandelt sich die Gleichung in folgende:

$$a\xi + b\eta + c\zeta + \ldots + n = 0,$$

welche in Bezug auf die Unbekannten $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ linear ist. Hiedurch tritt noch der für die weitere Rechnung sehr erhebliche Vortheil ein, dass man es jetzt nur mit den kleinen Grössen $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ zu thun hat, zu deren Bestimmung die Anwendung von Logarithmen mit einer geringeren Anzahl von Decimalstellen ausreicht, als wenn die vollständigen Werthe der Grössen $x, y, z, \ldots$ aus der Rechnung hervorgehen sollten. Aus diesem Grunde ist sehr häufig die Einführung genäherter Werthe auch in dem Falle lohnend, wenn die gegebenen Gleichungen schon linear sind, wo dann selbstverständlich die Differenziation entfällt, und in den Gleichungen nur $X+\xi$, $Y+\eta$, etc. an die Stelle von x, y, etc. zu setzen ist.

23. Da der Rechnungsmechanismus, welchen die Auflösung unserer Aufgabe erfordert, derselbe bleibt, die Anzahl der Unbekannten mag welche immer sein, so wollen wir uns im folgenden auf vier Unbekannte beschränken. Die gegebenen Gleichungen, m an der Zahl, seien:

$$\begin{aligned} a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 w + n_1 &= 0, \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 w + n_2 &= 0, \\ &\vdots \\ a_m x + b_m y + c_m z + d_m w + n_m &= 0, \end{aligned} \tag{45}$$

in welchen die Grössen a, b, c, d, bekannte Coefficienten bedeuten und die Werthe der absoluten Glieder $n_1, n_2, \ldots.$ aus Beobachtungen hervorgegangen sind. Man pflegt diese Gleichungen gewöhnlich die B e d i n g u n g s g l e i c h u n g e n zu nennen.

Irgend ein System von Werthen der Unbekannten, in diese Gleichungen substituirt, erzeugt die Gleichungen:

$$\begin{aligned} a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 w + n_1 &= v_1, \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 w + n_2 &= v_2, \\ &\vdots \\ a_m x + b_m y + c_m z + d_m w + n_m &= v_m, \end{aligned} \tag{46}$$

wo $v_1, v_2, \ldots. v_m$ die Fehler der Beobachtungen $n_1, n_2, \ldots n_m$ bedeuten, welche dem angenommenen Systeme von Werthen der Unbekannten entsprechen. Sind nun $p_1, p_2, \ldots p_m$, die Gewichte der Beobachtungen $n_1, n_2, \ldots n_m$, oder der zugehörigen Gleichungen, und bezeichnet man mit h das Maass der Präcision der Gewichtseinheit, so sind bekanntlich $h_1 \sqrt{p_1}$, $h_2 \sqrt{p_2}$, u. s. w. die Maasse der Präcision der Beobachtungen n_1, n_2, u. s. w.; die Wahrscheinlichkeit des Zusammentreffens der Fehler $v_1, v_2, \ldots$ ist dann bekanntlich proportional der Grösse:

$$e^{-h^2(p_1 v_1^2 + p_2 v_2^2 + \ldots + p_m v_m^2)},$$

und es wird jenes Fehlersystem, also auch, vermöge des V. Satzes in §. 2, jenes System von Werthen der Unbekannten das wahrscheinlichste sein, welches diese Grösse zu einem Maximum, also die Summe:

$$S = p_1 v_1^2 + p_2 v_2^2 + \ldots . + p_m v_m^2 = [pvv]$$

zu einem Minimum macht.

Man sieht leicht, dass diess Summe entsteht, wenn man jede der Glgn. (46) mit der Quadratwurzel aus ihrem Gewichte multiplicirt, sodann quadrirt und sämmtliche Quadrate addirt. Diese, im Falle einer ungleichen Genauigkeit der Bedingungsgleichungen erforderliche Multiplication derselben mit der Quadratwurzel aus den respectiven Gewichten, wodurch dieselben auf einerlei Genauigkeit, nämlich jene der Gewichtseinheit reducirt werden, wollen wir nun bereits an den Gleichungen (45) u. (46) ausgeführt denken, so dass im Folgenden die Buchstaben a, b, c, d, n, v nicht mehr die ursprünglichen, sondern die in die Quadratwurzeln der Gewichte multiplicirten Grössen bedeuten. Unter dieser Annahme ist nunmehr die Function:

$$S = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + \ldots . + v_m^2 = [vv] \tag{47}$$

zu einem Minimum zu machen, unter welcher einfacheren Form übrigens diese Summe sofort erscheint, wenn sämmtliche Beobachtungen gleiche Genauigkeit haben und daher das Gewicht aller Gleichungen $= 1$ angenommen werden kann.

Vermöge der Voraussetzung, dass die Unbekannten von einander unabhängig sind, werden die Bedingungsgleichungen des Minimums:

$$\frac{1}{2}\frac{dS}{dx} = v_1 \frac{dv_1}{dx} + v_2 \frac{dv_2}{dx} + v_3 \frac{dv_3}{dx} + \ldots + v_m \frac{dv_m}{dx} = 0,$$

$$\frac{1}{2}\frac{dS}{dy} = v_1 \frac{dv_1}{dy} + v_2 \frac{dv_2}{dy} + v_3 \frac{dv_3}{dy} + \ldots + v_m \frac{dv_m}{dy} = 0,$$

$$\frac{1}{2}\frac{dS}{dz} = v_1 \frac{dv_1}{dz} + v_2 \frac{dv_2}{dz} + v_3 \frac{dv_3}{dz} + \ldots + v_m \frac{dv_m}{dz} = 0,$$

$$\frac{1}{2}\frac{dS}{dw} = v_1 \frac{dv_1}{dw} + v_2 \frac{dv_2}{dw} + v_3 \frac{dv_3}{dw} + \ldots + v_m \frac{dv_m}{dw} = 0.$$

Aus (46) folgt aber durch Differenziation:

$$\frac{dv_1}{dx} = a_1, \quad \frac{dv_2}{dx} = a_2, \ldots; \qquad \frac{dv_1}{dy} = b_1, \quad \frac{dv_2}{dy} = b_2, \ldots,$$

$$\frac{dv_1}{dz} = c_1, \quad \frac{dv_2}{dz} = c_2, \ldots; \qquad \frac{dv_1}{dw} = d_1, \quad \frac{dv_2}{dw} = d_2, \ldots,$$

womit die Gleichungen des Minimums in Folgende übergehen:

$$\left.\begin{aligned} a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 + \ldots + a_m v_m &= [av] = 0, \\ b_1 v_1 + b_2 v_2 + b_3 v_3 + \ldots + b_m v_m &= [bv] = 0, \\ c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 + \ldots + c_m v_m &= [cv] = 0, \\ d_1 v_1 + d_2 v_2 + d_3 v_3 + \ldots + d_m v_m &= [dv] = 0, \end{aligned}\right\} \tag{48}$$

deren Anzahl nothwendig jener der Unbekannten gleichkommt.

Substituirt man endlich in diese Gleichungen die Werthe von v_1, v_2, v_3,... aus (46), und setzt der Kürze halber:

$$\begin{aligned} a_1 a_1 + a_2 a_2 + a_3 a_3 + \ldots + a_m a_m &= [aa], \\ a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + \ldots + a_m b_m &= [ab], \\ a_1 n_1 + a_2 n_2 + a_3 n_3 + \ldots + a_m b_m &= [an], \end{aligned}$$
u. s. w.

so erhält man:

$$\left.\begin{aligned} [aa]\,x + [ab]\,y + [ac]\,z + [ad]\,w + [an] &= 0, \\ [ab]\,x + [bb]\,y + [bc]\,z + [bd]\,w + [bn] &= 0, \\ [ac]\,x + [bc]\,y + [cc]\,z + [cd]\,w + [cn] &= 0, \\ [ad]\,x + [bd]\,y + [cd]\,z + [dd]\,w + [dn] &= 0, \end{aligned}\right\} \quad (49)$$

aus welchen Gleichungen, den sogenannten Normal-Gleichungen, die wahrscheinlichsten Werthe der Unbekannten folgen.

Man wird leicht bemerken, dass diese Gleichungen aus den Bedingungsgleichungen (45) auf folgende einfache Weise gebildet werden. Multiplicirt man letztere der Reihe nach mit a_1, a_2, a_3, u. s. w., und addirt die Producte, so entsteht die erste der Glgn. (49). Die zweite wird erhalten, wenn die Glgn. (45) mit b_1, b_2, b_3, u. s. w. multiplicirt und die Producte addirt werden; u. s. w. Hieraus folgt auch das leicht in die Augen springende Bildungsgesetz der Coefficienten der Normal-Gleichungen. Jede derselben enthält einen quadratischen Coefficienten, d. i. einen solchen, welcher eine Summe von Quadraten und daher nothwendig positiv ist; in der ersten, welche durch Differenziation von S nach x entsteht, ist x mit dem quadratischen Coefficienten $[aa]$ versehen, in der zweiten y, u. s. w. Nach diesem Merkmale pflegt man auch die einzelnen Normal-Gleichungen von einander zu unterscheiden und nennt die erste die Normal-Gl. für x, u. s. w. Von dem Gliede mit dem quadratischen Coefficienten in irgend einer Gleichung ausgehend, folgen die übrigen Coefficienten in horizontaler Richtung nach rechts und in verticaler Richtung nach abwärts in derselben Reihenfolge aufeinander, so dass jeder nicht quadratische Coefficient zweimal erscheint, und somit die Anzahl sämmtlicher von einander verschiedenen Summen-Coefficienten, mit Einschluss der absoluten Glieder, bei k Unbekannten $= \frac{1}{2} k (k+3)$ ist.

24. Bevor man an die Auflösung der Glgn. (49) schreitet, kann es wünschenswerth scheinen, die Richtigkeit der Summen-Coefficienten prüfen zu können. Zu diesem Zwecke bilde man die Summen der Coefficienten der einzelnen Bedingungsgleichungen (45):

$$\left.\begin{aligned} a_1 + b_1 + c_1 + d_1 &= s_1, \\ a_2 + b_2 + c_2 + d_2 &= s_2, \\ a_3 + b_3 + c_3 + d_3 &= s_3, \end{aligned}\right\} \quad (50)$$
u. s. w.

Multiplicirt man nun diese Gleichungen der Reihe nach mit n_1, n_2, n_3, ... und addirt die Producte, so folgt:

$$[an]+[bn]+[cn]+[dn]=[sn], \tag{51}$$

d. i. die Summe der absoluten Glieder der Normal-Gleichungen muss gleich $[sn]$ sein.

In gleicher Weise erhält man, wenn man die Glgn. (50) der Reihe nach mit a_1, a_2, a_3, ..., dann mit b_1, b_2, b_3, ... u. s. w. multiplicirt und jedesmal die Producte addirt:

$$\left.\begin{aligned}
&[aa]+[ab]+[ac]+[ad]=[as],\\
&[ab]+[bb]+[bc]+[bd]=[bs],\\
&[ac]+[bc]+[cc]+[cd]=[cs],\\
&[ad]+[bd]+[cd]+[dd]=[ds],
\end{aligned}\right\} \tag{52}$$

welchen Gleichungen die Coefficienten der Unbekannten der einzelnen Gleichungen Genüge leisten müssen. Bildet man also gleichzeitig mit der Berechnung der Coefficienten und absoluten Glieder der Normal-Gleichungen noch die Summen $[sn]$, $[as]$, $[bs]$, $[cs]$, $[ds]$, so werden durch diese sämmtliche Summengrössen der Normal-Gleichungen controlirt.

25. Die Auflösung der Normal-Gleichungen (49) wird am leichtesten mittelst der gewöhnlichen Substitutionsmethode bewerkstelliget, welche, nach den Vorschriften von G a u s s ausgeführt, den Vortheil eines gleichförmigen und durchsichtigen Rechnungsmechanismus gewährt. Die Normal-Gleichungen sind folgende:

$$\left.\begin{aligned}
&[aa]\,x+[ab]\,y+[ac]\,z+[ad]\,w+[an]=0,\\
&[ab]\,x+[bb]\,y+[bc]\,z+[bd]\,w+[bn]=0,\\
&[ac]\,x+[bc]\,y+[cc]\,z+[cd]\,w+[cn]=0,\\
&[ad]\,x+[bd]\,y+[cd]\,z+[dd]\,w+[dn]=0.
\end{aligned}\right\} \tag{53}$$

Multipliciren wir nun die erste dieser Gleichungen successive mit $\frac{[ab]}{[aa]}$, dann mit $\frac{[ac]}{[aa]}$, endlich mit $\frac{[ad]}{[aa]}$, und ziehen die so entstehenden Gleichungen der Reihe nach von der 2ten, 3ten und 4ten Gleichung ab, so erhalten wir drei neue Gleichungen:

$$\left\{[bb]-\frac{[ab]}{[aa]}[ab]\right\}y+\left\{[bc]-\frac{[ab]}{[aa]}[ac]\right\}z+\left\{[bd]-\frac{[ab]}{[aa]}[ad]\right\}w+\left\{[bn]-\frac{[ab]}{[aa]}[an]\right\}=0,$$

$$\left\{[bc]-\frac{[ac]}{[aa]}[ab]\right\}y+\left\{[cc]-\frac{[ac]}{[aa]}[ac]\right\}z+\left\{[cd]-\frac{[ac]}{[aa]}[ad]\right\}w+\left\{[cn]-\frac{[ac]}{[aa]}[an]\right\}=0,$$

$$\left\{[bd]-\frac{[ad]}{[aa]}[ab]\right\}y+\left\{[cd]-\frac{[ad]}{[aa]}[ac]\right\}z+\left\{[dd]-\frac{[ad]}{[aa]}[ad]\right\}w+\left\{[dn]-\frac{[ad]}{[aa]}[an]\right\}=0,$$

welche die Unbekannte x nicht mehr enthalten. Führen wir zur Abkürzung für die Coefficienten dieser Gleichungen die folgenden Bezeichnungen ein:

$$[bb]-\frac{[ab]}{[aa]}[ab]=[bb\,.\,1],\qquad [cc]-\frac{[ac]}{[aa]}[ac]=[cc\,.\,1],$$

$$[bc]-\frac{[ab]}{[aa]}[ac]=[bc\,.\,1],\qquad [cd]-\frac{[ac]}{[aa]}[ad]=[cd\,.\,1],$$

$$[bd]-\frac{[ab]}{[aa]}[ad]=[bd\,.\,1],\qquad [dd]-\frac{[ad]}{[aa]}[ad]=[dd\,.\,1],$$

$$[bn]-\frac{[ab]}{[aa]}[an]=[bn\,.\,1], \tag{54}$$

$$[cn]-\frac{[ac]}{[aa]}[an]=[cn\,.\,1],$$

$$[dn]-\frac{[ad]}{[aa]}[an]=[dn\,.\,1],$$

so erhalten obige Gleichungen folgende mit den Normal-Gleichungen vollkommen symmetrische Form:

$$\begin{aligned}[bb\,.\,1]\,y+[bc\,.\,1]\,z+[bd\,.\,1]\,w+[bn\,.\,1]&=0,\\ [bc\,.\,1]\,y+[cc\,.\,1]\,z+[cd\,.\,1]\,w+[cn\,.\,1]&=0,\\ [bd\,.\,1]\,y+[cd\,.\,1]\,z+[dd\,.\,1]\,w+[dn\,.\,1]&=0.\end{aligned} \tag{55}$$

Multiplicirt man abermals die erste dieser Gleichungen mit $\frac{[bc\,.\,1]}{[bb\,.\,1]}$, dann mit $\frac{[bd\,.\,1]}{[bb\,.\,1]}$, zieht die so entstehenden Gleichungen von der zweiten und dritten ab, und setzt, wie nun leicht zu übersehen ist:

$$[cc\,.\,1]-\frac{[bc\,.\,1]}{[bb\,.\,1]}[bc\,.\,1]=[cc\,.\,2],\qquad [cn\,.\,1]-\frac{[bc\,.\,1]}{[bb\,.\,1]}[bn\,.\,1]=[cn\,.\,2],$$

$$[cd\,.\,1]-\frac{[bc\,.\,1]}{[bb\,.\,1]}[bd\,.\,1]=[cd\,.\,2],\qquad [dn\,.\,1]-\frac{[bd\,.\,1]}{[bb\,.\,1]}[bn\,.\,1]=[dn\,.\,2], \tag{56}$$

$$[dd\,.\,1]-\frac{[bd\,.\,1]}{[bb\,.\,1]}[bd\,.\,1]=[dd\,.\,2],$$

so erhält man die Gleichungen:

$$\begin{aligned}[cc\,.\,2]\,z+[cd\,.\,2]\,w+[cn\,.\,2]&=0,\\ [cd\,.\,2]\,z+[dd\,.\,2]\,w+[dn\,.\,2]&=0.\end{aligned} \tag{57}$$

Wird endlich die erste dieser Gleichungen mit $\frac{[cd\,.\,2]}{[cc\,.\,2]}$ multiplicirt, von der zweiten abgezogen, und:

$$[dd\,.\,2]-\frac{[cd\,.\,2]}{[cc\,.\,2]}[cd\,.\,2]=[dd\,.\,3],\qquad [dn\,.\,2]-\frac{[cd\,.\,2]}{[cc\,.\,2]}[cn\,.\,2]=[dn\,.\,3] \tag{58}$$

gesetzt, so folgt

$$[dd\,.\,3]\,w+[dn\,.\,3]=0, \tag{59}$$

welche Gleichung nur mehr die Unbekannte w enthält. Der hieraus gezogene

Werth von w in die 1te der Glgn. (57) substituirt, liefert den Werth von z; die 1te der Glgn. (55) gibt dann y, endlich die 1te der Glgn. (53) den Werth von x. Durch Zusammenstellung dieser Gleichungen ergibt sich daher folgendes System von Gleichungen, aus welchem die wahrscheinlichsten Werthe der Unbekannten hervorgehen:

$$\left.\begin{aligned}[aa]\,x+[ab]\,y+[ac]\,z+[ad]\,w+[an]&=0,\\ [bb.1]\,y+[bc.1]\,z+[bd.1]\,w+[bn.1]&=0,\\ [cc.2]\,z+[cd.2]\,w+[cn.2]&=0,\\ [dd.3]\,w+[dn.3]&=0.\end{aligned}\right\}\quad(60)$$

25. Die practische Ausführung des im vorhergehenden vorgetragenen Eliminationsverfahrens kann etwa nach folgendem Schema (siehe Seite 44 und 45) geschehen, in welchem die successive Bildung der Hilfsgrössen $[bb.1]$, $[bc.1]$, etc. so wie der Glgn. (60) ersichtlich wird.

Das Schema besteht, wie man sieht, aus vier (gleich der Anzahl der Unbekannten), durch stärkere Linien getrennten Abtheilungen, welche in der ersten Zeile die Coefficienten der vier Normal-Gleichungen, immer vom quadratischen angefangen, enthalten. In der ersten Abtheilung, entsprechend der 1. Normal-Gleichung, setzt man nun unter diese Coefficienten ihre Logarithmen, bildet auf einem Streifen Papier den $\log\frac{[ab]}{[aa]}$, und addirt diesen, den Streifen der Reihe nach über $\log[ab]$, $\log[ac]$, $\log[ad]$ und $\log[an]$ schiebend, zu diesen Logarithmen, wodurch die in der 3. Zeile der 1. Abtheilung befindlichen Logarithmen entstehen; in ähnlicher Weise werden die in der 4. und 5. Zeile stehenden Logarithmen gebildet. Die diesen Logarithmen entsprechenden Zahlen werden nun aufgeschlagen und der Reihe nach in die 2. Zeile der drei folgenden Abtheilungen geschrieben, von den darüber stehenden Coefficienten abgezogen und dadurch die Zahlen der 3. Zeile von $[bb.1]$ bis $[dn.1]$ erhalten, welche, wie man sieht, die Coefficienten der Glgn. (55) sind. Mit diesen wird nun wieder in derselben Weise operirt, wie so eben bezüglich der Grössen $[an]$ bis $[dn]$ in der 1. Zeile erklärt worden, wodurch sich die Zahlen $[cc.2]$ bis $[dn.2]$ in der 5. Zeile der 3. und 4. Abtheilung ergeben, welche die Coefficienten der Glgn. (57) sind, aus welchen endlich durch Anwendung desselben Verfahrens in Zeile 7 der 4. Abtheilung die Coefficienten der Gl. (59) oder der letzten der Glgn. (60) folgen, unter welche wieder ihre Logarithmen gesetzt werden. Aus letzteren erhält man nun durch Subtraction $\log w$ (wobei das Zeichen von $[dn.3]$ geändert werden muss, wenn, wie dies bei unseren Gleichungen der Fall ist, diese auf 0 reducirt sind). Die weitere Rechnung, um, durch Substitution nach rückwärts, successive z, y, x zu finden, bedarf wohl keiner weiteren Erklärung und erscheint in obigem Schema unter der Doppellinie der drei ersten Abtheilungen.

$[aa]$	$[ab]$	$[ac]$	$[ad]$	$[an]$	$[bb]$	$[bc]$
$\lg[aa]$	$\lg[ab]$	$\lg[ac]$	$\lg[ad]$	$\lg[an]$	$\frac{[ab]}{[aa]}[ab]$	$\frac{[ab]}{[aa]}[ac]$
	$\lg\frac{[ab]}{[aa]}[ab]$	$\lg\frac{[ab]}{[aa]}[ac]$	$\lg\frac{[ab]}{[aa]}[ad]$	$\lg\frac{[ab]}{[aa]}[an]$		
		$\lg\frac{[ac]}{[aa]}[ac]$	$\lg\frac{[ac]}{[aa]}[ad]$	$\lg\frac{[ac]}{[aa]}[an]$	$[bb.1]$	$[bc.1]$
					$\lg[bb.1]$	$\lg[bc.1]$
			$\lg\frac{[ad]}{[aa]}[ad]$	$\lg\frac{[ad]}{[aa]}[an]$		$\lg\frac{[bc.1]}{[bb.1]}[bc.1]$
	$\lg[ab]\,y$	$\lg[ac]\,z$	$\lg[ad]\,w$	$[ab]\,y$		
				$[ac]\,z$		$\lg[bc.1]\,z$
				$[ad]\,w$		
				$[ab]\,y+[ac]\,z$ $+[ad]w+[an]$ $=S$		
				$\lg(-S)$		
			$x=$	$\lg x=\frac{\lg(-S)}{\lg[aa]}$		

27. Nachdem die wahrscheinlichsten Werthe der Unbekannten berechnet sind, ergeben sich durch Substitution derselben in die Bedingungsgleichungen (46) die übrigbleibenden Fehler v der einzelnen Gleichungen, deren Quadratsumme $[vv]$ ein Minimum ist.

Zu den Gl. (60) kann man übrigens noch auf einem anderen Wege gelangen, welcher zugleich einen leicht zu berechnenden Ausdruck für das Minimum $[vv]$ liefert und hiedurch eine Controle für die Richtigkeit der Elimination darbietet.

Aus den Gleichungen (46) folgt, indem man dieselben quadrirt und addirt:

$$\begin{aligned}[vv] &= (a_1x+b_1y+c_1z+d_1w+n_1)^2 \\ &+ (a_2x+b_2y+c_2z+d_2w+n_2)^2 \\ &+ \text{u. s. w.,}\end{aligned} \tag{61}$$

oder nach Entwickelung der Quadrate:

$[bd]$	$[bn]$	$[cc]$	$[cd]$	$[cn]$	$[dd]$	$[dn]$
$\frac{[ab]}{[aa]}[ad]$	$\frac{[ab]}{[aa]}[an]$	$\frac{[ac]}{[aa]}[ac]$	$\frac{[ac]}{[aa]}[ad]$	$\frac{[ac]}{[aa]}[an]$	$\frac{[ad]}{[aa]}[ad]$	$\frac{[ad]}{[aa]}[an]$
$[bd.1]$	$[bn.1]$	$[cc.1]$	$[cd.1]$	$[cn.1]$	$[dd.1]$	$[dn.1]$
$\lg [bd.1]$	$\lg [bn.1]$	$\frac{[bc.1]}{[bb.1]}[bc.1]$	$\frac{[bc.1]}{[bb.1]}[bd.1]$	$\frac{[bc.1]}{[bb.1]}[bn.1]$	$\frac{[bd.1]}{[bb.1]}[bd.1]$	$\frac{[bd.1]}{[bb.1]}[bn.1]$
$\lg \frac{[bc.1]}{[bb.1]}[bd.1]$	$\lg \frac{[bc.1]}{[bb.1]}[bn.1]$					
$\lg \frac{[bd.1]}{[bb.1]}[bd.1]$	$\lg \frac{[bd.1]}{[bb.1]}[bn.1]$	$[cc.2]$	$[cd.2]$	$[cn.2]$	$[dd.2]$	$[dn.2]$
		$\lg [cc.2]$	$\lg [cd.2]$	$\lg [cn.2]$	$\frac{[cd.2]}{[cc.2]}[cd.2]$	$\frac{[cd.2]}{[cc.2]}[cn.2]$
$\lg [bd.1]\, w$	$[bc.1]\, z$		$\lg \frac{[cd.2]}{[cc.2]}[cd.2]$	$\lg \frac{[cd.2]}{[cc.2]}[cn.2]$		
	$[bd.1]\, w$				$[dd.3]$	$[dn.3]$
	$[bc.1]z + [bd.1]w + [bn.1] = S$		$\lg [cd.2]\, w$	$[cd.2]\, w$	$\lg [dd.3]$	$\lg [dn.3]$
	$\lg(-S)$			$[cd.2]w + [cn.2] = S$		
$y =$	$\lg y = \frac{\lg(-S)}{\lg [bb.1]}$			$\lg(-S)$	$\lg w = \lg \left\{-\frac{[dn.3]}{[dd.3]}\right\}$	
		$z =$		$\lg z = \frac{\lg(-S)}{\lg [cc.2]}$	$w =$	

$$\begin{aligned}[vv] = [aa]\,x^2 + [bb]\,y^2 + [cc]\,z^2 + [dd]w^2 + [nn] \\ + 2[ab]xy + 2[ac]xz + 2[ad]xw + 2[an]x \\ + 2[bc]\,yz + 2[bd]yw + 2[bn]y \\ + 2[cd]zw + 2[cn]z \\ + 2[dn]w,\end{aligned} \tag{62}$$

welcher Ausdruck offenbar die Summe der Fehlerquadrate für ein beliebiges System von Werthen der Unbekannten gibt. Bringen wir nun diesen Ausdruck auf folgende Form:

$$\begin{aligned}[vv] = (\alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z + \alpha_4 w + \alpha_5)^2 + (\beta_1 y + \beta_2 z + \beta_3 w + \beta_4)^2 \\ + (\gamma_1 z + \gamma_2 w + \gamma_3)^2 + (\delta_1 w + \delta_2)^2 + \varepsilon^2,\end{aligned} \tag{k}$$

welche gleichfalls, so wie jene (61), aus einer Summe von Quadraten besteht, jedoch mit dem Unterschiede, dass jedes folgende um eine Unbekannte weniger enthält als das vorhergehende.

Entwickeln wir zu diesem Zwecke in (k) die Quadrate und setzen die Coefficienten der gleichnamigen Potenzen und Producte in beiden Ausdrücken

(62) und (k) einander gleich, so erhalten wir zur Bestimmung der Coefficienten α, β, γ, etc. folgende Gleichungen:

$$\alpha_1^2 = [aa]\,;\ \alpha_1\alpha_2 = [ab]\,;\ \alpha_1\alpha_3 = [ac]\,;\ [\alpha_1\alpha_4] = [ad]\,;\ \alpha_1\alpha_5 = [an] \quad (m)$$

$$\alpha_2^2 + \beta_1^2 = [bb]\,;\ \alpha_2\alpha_3 + \beta_1\beta_2 = [bc]\,;\ \alpha_2\alpha_4 + \beta_1\beta_3 = [bd]\,;\ a_2\alpha_5 + \beta_1\beta_4 = [bn] \quad (n)$$

$$\alpha_3^2 + \beta_2^2 + \gamma_1^2 = [cc]\,;\ \alpha_3\alpha_4 + \beta_2\beta_3 + \gamma_1\gamma_2 = [cd]\,;\ \alpha_3\alpha_5 + \beta_2\beta_4 + \gamma_1\gamma_3 = [cn] \quad (p)$$

$$\alpha_4^2 + \beta_3^2 + \gamma_2^2 + \delta_1^2 = [dd]\,;\ \alpha_4\alpha_5 + \beta_3\beta_4 + \gamma_2\gamma_3 + \delta_1\delta_2 = [dn] \quad (q)$$

$$\alpha_5^2 + \beta_4^2 + \gamma_3^2 + \delta_2^2 + \varepsilon^2 = [nn] \quad (r)$$

Es folgt nun aus den Glgn. (m):

$$\alpha_1^2 = [aa],\ \alpha_2^2 = \frac{[ab]^2}{[aa]},\ \alpha_3^2 = \frac{[ac]^2}{[aa]},\ \alpha_4^2 = \frac{[ad]^2}{[aa]},\ \alpha_5^2 = \frac{[an]^2}{[aa]}.$$

Hiemit erhält man aus den Glgn. (n), mit Rücksicht auf die Glgn. (54):

$$\beta_1^2 = [bb.1],\ \beta_2^2 = \frac{[bc.1]^2}{[bb.1]},\ \beta_3^2 = \frac{[bd.1]^2}{[bb.1]},\ \beta_4^2 = \frac{[bn.1]^2}{[bb.1]};$$

ferner aus den Glgn. (p) mit Zuziehung der (54) und (56):

$$\gamma_1^2 = [cc.2],\ \gamma_2^2 = \frac{[cd.2]^2}{[cc.2]},\ \gamma_3^2 = \frac{[cn.2]^2}{[cc.2]};$$

aus den Glgn. (q) mit Rücksicht auf (54), (56) und (58):

$$\delta_1^2 = [dd.3],\ \delta_2^2 = \frac{[dn.3]^2}{[dd.3]},$$

endlich aus Gl. (r):

$$\varepsilon^2 = [nn] - \frac{[an]^2}{[aa]} - \frac{[bn.1]^2}{[bb.1]} - \frac{[cn.2]}{[cc.2]} - \frac{[dn.3]^2}{[dd.3]}.$$

Führt man noch die folgenden Hilfsgrössen ein:

$$\left.\begin{aligned} [nn.1] &= [nn] - \frac{[an]^2}{[aa]}, \\ [nn.2] &= [nn.1] - \frac{[bn.1]^2}{[bb.1]}, \\ [nn.3] &= [nn.2] - \frac{[cn.2]^2}{[cc.2]}, \\ [nn.4] &= [nn.3] - \frac{[dn.3]^2}{[dd.3]}, \end{aligned}\right\} \quad (63)$$

so wird $\varepsilon^2 = [nn.4]$.

Substituirt man nun die erhaltenen Werthe der Coefficienten α, β, etc. in den Ausdruck (k), so erhält man:

$$
\begin{aligned}
[vv] = & \frac{\{[aa]\,x + [ab]\,y + [ac]\,z + [ad]\,w + [an]\}^2}{[aa]} \\
& + \frac{\{[bb.1]\,y + [bc.1]\,z + [bd.1]\,w + [bn.1]\}^2}{[bb.1]} \\
& + \frac{\{[cc.2]\,z + [cd.2]\,w + [cn.2]\}^2}{[cc.2]} \\
& + \frac{\{[dd.3]\,w + [dn.3]\}^2}{[dd.3]}, \\
& + [nn.4],
\end{aligned} \tag{64}
$$

oder, wenn man die in den Zählern der Brüche erscheinenden Polynome mit A, B, C, D bezeichnet:

$$
[vv] = \frac{A^2}{[aa]} + \frac{B^2}{[bb.1]} + \frac{C^2}{[cc.2]} + \frac{D^2}{[dd.3]} + [nn.4]. \tag{65}
$$

In diesem Ausdrucke sind nun alle Nenner rechter Hand, somit die Brüche selbst wesentlich positive Grössen. Von $[aa]$, als einer Summe von Quadraten ist dies selbstverständlich. Um die gleiche Eigenschaft zunächst für $[bb.1]$ nachzuweisen, wollen wir, da die Gleichung (64) für beliebige Werthe der Unbekannten gilt, für x den aus der Gleichung $A = 0$ folgenden Werth:

$$
x = -\frac{[ab]}{[aa]}\,y - \frac{[ac]}{[aa]}\,z - \frac{[ad]}{[aa]}\,w - \frac{[an]}{[aa]}
$$

substituiren; hiedurch verschwindet die erste Zeile rechter Hand in (64), die folgenden bleiben unverändert, da sie x nicht enthalten. Zu demselben Resultate müssen wir aber auch gelangen, wenn wir, vor Ausführung der eben bewerkstelligten Umformung des Ausdruckes (61) in jenen (64), den obigen Werth von x sofort in die Glgn. (46) einführen, und erst hiernach dieselbe Umformung vornehmen. Substituiren wir also diesen Werth von x in die Gleichungen (46), so werden diese:

$$
\begin{aligned}
v_1 &= b_1'y + c_1'z + d_1'w + n_1', \\
v_2 &= b_2'y + c_2'z + d_3'w + n_2',
\end{aligned}
$$

u. s. w.,

wenn der Kürze wegen:

$$
\begin{aligned}
b_1' &= b_1 - a_1\frac{[ab]}{[aa]}, \quad & c_1' &= c_1 - a_1\frac{[ac]}{[aa]}, \quad & d_1' &= d_1 - a_1\frac{[ad]}{[aa]}, \\
b_2' &= b_2 - a_2\frac{[ab]}{[aa]}, \quad & c_2' &= c_2 - a_2\frac{[ac]}{[aa]}, \quad & d_2' &= d_2 - a_2\frac{[ad]}{[aa]},
\end{aligned}
$$

u. s. w.

gesetzt wird. Aus diesen Gleichungen erhalten wir nun:

$$
\begin{aligned}
[vv] &= (b_1'y + c_1'z + d_1'w + n_1')^2 \\
&+ (b_2'y + c_2'z + d_2'w + n_2')^2
\end{aligned}
$$

u. s. w.,

welche Summe von Quadraten sich wieder, in derselben Weise wie (61), auf die Form (64) bringen lässt, wodurch wir erhalten:

$$[vv] = \frac{\{[b'b']\,y + [b'c']\,z + [b'd']\,w + [b'n']\}^2}{[b'b']}$$
$$+ \frac{\{[c'c'.1]\,z + [c'd'.1]\,w + [c'n'.1]\}^2}{[c'c'.1]}$$
$$+ \frac{\{[d'd'.2]\,w + [d'n'.2]\}^2}{[d'd'.2]}$$
$$+ [n'n'.4].$$

Dieser Ausdruck muss nun, wie schon oben bemerkt, für jeden Werth von y, z, w identisch sein mit jenem (64), wenn wir in letzterem den aus $A = 0$ folgenden Werth von x substituiren, d. i. die erste Zeile rechter Hand weglassen. Hiezu wird aber erfordert, dass die Coefficienten der gleichnamigen Potenzen und Producte der Unbekannten y, z, w in beiden Ausdrücken identisch gleich seien; hieraus folgt also, da y^2 nur einmal in jedem Ausdrucke erscheint: $[bb.1] = [b'b']$, d. i. gleich einer Summe von Quadraten, also wesentlich positiv. Ganz in gleicher Weise lässt sich diese Eigenschaft für $[cc.2]$ nachweisen, indem man die aus $A = 0$ und $B = 0$ folgenden Werthe von x und y substituirt, und ähnlich für $[dd.3]$.

Sind aber die Glieder rechter Hand in (64) wesentlich positiv, so ist klar, dass der kleinste Werth von $[vv]$ nur dadurch erhalten wird, dass wir

$$A = 0,\quad B = 0,\quad C = 0,\quad D = 0$$

setzen, aus welchen Gleichungen daher die wahrscheinlichsten Werthe der Unbekannten hervorgehen müssen, welche $[vv]$ zu einem Minimum machen. Diese Gleichungen sind aber, wie man aus der Bedeutung der Buchstaben A, B, C, D ersieht, identisch mit den Glgn. (60) in §. 24.

Für diese Werthe der Unbekannten gibt aber dann die Gl. (64):

$$[vv] = [nn.4], \tag{66}$$

woraus erhellt, dass die Grösse $[nn.4]$ die Quadratsumme der nach den wahrscheinlichsten Werthen der Unbekannten übrig bleibenden Fehler darstellt. Hat man daher die v durch Substitution der wahrscheinlichsten Werthe in die Bedingungsgleichungen erhalten, und aus denselben $[vv]$ gebildet, so muss der so erhaltene Werth, so genau als es die angewendeten Logarithmen gestatten, mit $[nn.4]$, welche Grösse mittelst der Glgn. (63) leicht berechnet werden kann, übereinstimmen, wodurch die ganze Rechnung, von den Glgn. (46) angefangen controlirt wird.

28. Die vorhergehenden Betrachtungen setzen uns nun auch in den Stand, den m i t t l e r e n F e h l e r einer Bedingungsgleichung, d. i. der Beobachtungen n_1, n_2, n_3, ... n_m zu finden, welcher zugleich der mittlere Fehler der Gewichtseinheit ist, da wir die Glgn. (45), im Falle sie von verschiedener

Genauigkeit sind, durch Multiplication mit der Quadratwurzel aus ihren respectiven Gewichten auf gleiche Genauigkeit, und zwar jene der Gewichtseinheit reducirt, vorausgesetzt haben.

Bezeichnen wir diesen mittleren Fehler mit ε; ferner mit $\varDelta_1, \varDelta_2, \ldots \varDelta_m$ die wahren Fehler der Bedingungsgleichungen oder der Grössen $n_1, n_2, \ldots n_m$ d. i. diejenigen Werthe, welche die v erhalten, wenn wir in (46) für x, y, z, w die wahren Werthe der Unbekannten substituiren, so ist, wenn m die Anzahl der Bedingungsgleichungen oder der Fehler bedeutet, vermöge des Begriffes des mittleren Fehlers:

$$m\varepsilon^2 = [\varDelta\varDelta]. \tag{67}$$

Da aber die $\varDelta$ unbekannt sind, so müssen wir die Grösse $[\varDelta\varDelta]$ auf eine Form zu bringen suchen, welche einen Schluss auf ihren wahrscheinlichsten Werth zulässt. Eine solche bietet aber die Gl. (64) oder (65) unmittelbar dar, welche, wie wir wissen, die Summe der Fehlerquadrate für ein beliebiges System von Werthen der Unbekannten darstellt; substituiren wir in dieser Gleichung für x, y, z, w die wahren Werthe der Unbekannten, so geht $[vv]$ in $[\varDelta\varDelta]$ über. Bezeichnen wir also im Folgenden mit x_0, y_0, z_0, w_0 die wahrscheinlichsten aus den Glgn. (60) hervorgehenden Werthe der Unbekannten, mit

$$x_0+\xi,\quad y_0+\eta,\quad z_0+\zeta,\quad w_0+\varphi$$

die wahren Werthe derselben, so erhalten wir durch Substitution der letzteren in die Gl. (64):

$$[\varDelta\varDelta] = [nn.4] + \frac{A'^2}{[aa]} + \frac{B'^2}{[bb.1]} + \frac{C'^2}{[cc.2]} + \frac{D'^2}{[dd.3]}, \tag{68}$$

wo

$$\begin{aligned}
A' &= [aa](x_0+\xi) + [ab](y_0+\eta) + [ac](z_0+\zeta) + [ad](w_0+\varphi) + [an], \\
B' &= [bb.1](y_0+\eta) + [bc.1](z_0+\zeta) + [bd.1](w_0+\varphi) + [bn.1], \\
C' &= [cc.2](z_0+\zeta) + [cd.2](w_0+\varphi) + [cn.2], \\
D' &= [dd.3](w_0+\varphi) + [dn.3],
\end{aligned} \tag{69}$$

und $[nn.4] = [vv]$ das bekannte Minimum der Fehlerquadratsumme ist. Mit Rücksicht auf die Glgn. (60), welchen die wahrscheinlichsten Werthe x_0, y_0, z_0, w_0 Genüge leisten, folgt übrigens aus (69) auch:

$$\begin{aligned}
A' &= [aa]\xi + [ab]\eta + [ac]\zeta + [ad]\varphi, \\
B' &= [bb.1]\eta + [bc.1]\zeta + [bd.1]\varphi, \\
C' &= [cc.2]\zeta + [cd.2]\varphi, \\
D' &= [dd.3]\varphi,
\end{aligned}$$

woraus deutlich erhellt, dass A', B', C', D' kleine Grössen sind von der Ordnung der Abweichungen ξ, η, etc. der wahrscheinlichsten Werthe von den wahren, und dass wir Null als wahrscheinlichsten Werth derselben zu betrachten haben, weil eben 0 der wahrscheinlichste Werth der Grössen $\xi, \eta, \zeta, \varphi$ ist.

Aus Gl. (68) folgt nun, dass, da die auf $[nn.4]=[vv]$ folgenden Glieder, deren Anzahl nothwendig gleich jener der Unbekannten ist, wesentlich positiv sind, $[\varDelta\varDelta]$ immer grösser ist als $[vv]$, wie natürlich, weil $[vv]$ ein Minimum ist. Da wir nun von den Grössen A', B', C', D' nur wissen, dass ihr wahrscheinlichster Werth $=0$ ist, so werden wir uns, in Ermanglung der Kenntniss ihres wahren, jedenfalls von 0 verschiedenen Werthes, der Wahrheit so weit nähern, als es die Umstände erlauben, wenn wir für diese Grössen die mittleren Fehler derselben setzen.

Da nun in den Glgn. (69) nur das letzte die beobachteten Grössen n enthaltende Glied Fehlern unterworfen ist, so ist klar, dass die mittleren Fehler von A', B', C', D' beziehungsweise mit jenen von $[an]$, $[bn.1]$, $[cn.2]$, $[dn.3]$ übereinstimmen müssen.

Es ist aber $[an]=a_1n_1+a_2n_2+\ldots+a_mn_m$, und ε der mittlere Fehler der Grössen n_1, n_2, u. s. w., somit vermöge der Gl. (42), der mittlere Fehler von $[an]$:

$$=\varepsilon\sqrt{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_m^2}=\varepsilon\sqrt{[aa]}.$$

Ferner ist:

$$[bn.1]=[bn]-\frac{[ab]}{[aa]}[an]=b_1n_1+b_2n_2+b_3n_3+\cdots$$

$$-\frac{[ab]}{[aa]}a_1n_1-\frac{[ab]}{[aa]}a_2n_2-\frac{[ab]}{[aa]}a_3n_3-\cdots$$

$$=\left(b_1-\frac{[ab]}{[aa]}a_1\right)n_1+\left(b_2-\frac{[ab]}{[aa]}a_2\right)n_2+\ldots,$$

folglich der mittlere Fehler von $[bn.1]$:

$$=\varepsilon\sqrt{\left(b_1-\frac{[ab]}{[aa]}a_1\right)^2+\left(b_2-\frac{[ab]}{[aa]}a_2\right)^2+\ldots};$$

entwickelt man aber die Quadrate unter dem Wurzelzeichen, so erhält man als Summe derselben:

$$[bb]-2\frac{[ab]}{[aa]}[ab]+\frac{[ab]^2}{[aa]^2}[aa]^2=[bb]-\frac{[ab]^2}{[aa]}=[bb.1],$$

folglich $\varepsilon\sqrt{[bb.1]}$ als mittleren Fehler von $[bn.1]$.

Auf dieselbe Weise findet man:

$\varepsilon\sqrt{[cc.2]}$ als mittleren Fehler von $[cn.2]$,

$\varepsilon\sqrt{[dd.3]}$ als mittleren Fehler von $[dn.3]$.

Substituirt man nun diese Werthe der mittleren Fehler für A', B', C', D' in Gl. (68), und setzt zugleich, vermöge (67), $m\varepsilon^2$ für $[\varDelta\varDelta]$, so hat man:

$$m\varepsilon^2=[vv]+\varepsilon^2+\varepsilon^2+\varepsilon^2+\varepsilon^2,$$

wo die Anzahl der auf $[vv]$ folgenden ε^2 nothwendig gleich jener der Unbekannten ist. In unserem Falle wird daher

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{[vv]}{m-4}}, \tag{70}$$

und allgemein bei k Unbekannten:

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{[vv]}{m-k}}, \tag{71}$$

womit der mittlere Fehler der Gewichtseinheit, oder der Bedingungsgleichungen bestimmt ist. Durch Multiplication desselben mit 0.67449 ergibt sich sodann der wahrscheinliche Fehler.

29. Es erübrigt nun noch die Bestimmung der mittleren Fehler der aus den Normal-Gleichungen erhaltenen wahrscheinlichsten Werthe der Unbekannten. Bezeichnen wir die mittleren Fehler dieser Werthe mit ε_x, ε_y, ε_z, ε_w, mit p_x, p_y, p_z, p_w die Gewichte derselben, mit ε den durch Gl. (71) gegebenen Werth des mittleren Fehlers der Gewichtseinheit, so ist, da sich die Gewichte wie verkehrt die Quadrate der mittleren Fehler verhalten:

$$\varepsilon_x = \frac{\varepsilon}{\sqrt{p_x}}, \quad \varepsilon_y = \frac{\varepsilon}{\sqrt{p_y}}, \quad \varepsilon_z = \frac{\varepsilon}{\sqrt{p_z}}, \quad \varepsilon_w = \frac{\varepsilon}{\sqrt{p_w}}, \tag{72}$$

und wir haben uns demnach noch mit der Bestimmung der Gewichte p_x, p_y, u. s. w. zu beschäftigen.

Kehren wir zu diesem Zwecke wieder zu den Normal-Gleichungen (49) zurück, aus welchen die wahrscheinlichsten Werthe der Unbekannten, welche wieder mit x_0, y_0, z_0, w_0 bezeichnet werden mögen, hervorgehen; sie sind folgende:

$$\begin{aligned}
&[aa]\,x_0 + [ab]\,y_0 + [ac]\,z_0 + [ad]\,w_0 + [an] = 0,\\
&[ab]\,x_0 + [bb]\,y_0 + [bc]\,z_0 + [bd]\,w_0 + [bn] = 0,\\
&[ac]\,x_0 + [bc]\,y_0 + [cc]\,z_0 + [cd]\,w_0 + [cn] = 0,\\
&[ad]\,x_0 + [bd]\,y_0 + [cd]\,z_0 + [dd]\,w_0 + [dn] = 0.
\end{aligned} \tag{73}$$

Denken wir uns diese Gleichungen aufgelöst, jedoch in der Art, dass wir in den Summen: $[an] = a_1 n_1 + a_2 n_2 + \ldots$, u. s. w., die Buchstabengrössen n_1, n_2, etc. beibehalten, so erhalten wir offenbar die Unbekannten als lineare Functionen der Grössen n_1, n_2, n_3, ..., in der Form:

$$\begin{aligned}
&x_0 + \alpha_1 n_1 + \alpha_2 n_2 + \alpha_3 n_3 + \ldots + \alpha_m n_m = 0,\\
&y_0 + \beta_1 n_1 + \beta_2 n_2 + \beta_3 n_3 + \ldots + \beta_m n_m = 0,\\
&z_0 + \gamma_1 n_1 + \gamma_2 n_2 + \gamma_3 n_3 + \ldots + \gamma_m n_m = 0,\\
&w_0 + \delta_1 n_1 + \delta_2 n_2 + \delta_3 n_3 + \ldots + \delta_m n_m = 0,
\end{aligned} \tag{74}$$

wo die Zahlenwerthe der Coefficienten α, β, γ, δ durch die Auflösung selbst bekannt werden, falls letztere in dieser Art vollzogen würde. In dieser Form erscheint nun jede Unbekannte unmittelbar durch die beobachteten Grössen

n_1, n_2, n_3, .. dargestellt, und da der mittlere Fehler der letzteren $=\varepsilon$ ist, so hat man sofort, vermöge Gl. (42), §. 19:

$$\varepsilon_x=\varepsilon\sqrt{[\alpha\alpha]},\quad \varepsilon_y=\varepsilon\sqrt{[\beta\beta]},\quad \varepsilon_z=\varepsilon\sqrt{[\gamma\gamma]},\quad \varepsilon_w=\varepsilon\sqrt{[\delta\delta]},$$

und

$$p_x=\frac{1}{[\alpha\alpha]},\quad p_y=\frac{1}{[\beta\beta]},\quad p_z=\frac{1}{[\gamma\gamma]},\quad p_w=\frac{1}{[\delta\delta]}. \tag{75}$$

Die Bestimmung der einzelnen Grössen α_1, α_2, ..., β_1, β_2, ... u. s. w. wäre sehr umständlich und ist unnöthig, da man nur die Summen $[\alpha\alpha]$, $[\beta\beta]$, etc. braucht, zu welchen man auf verschiedenen Wegen gelangen kann.

30. 1. Methode. Wenden wir zur Auflösung der Glgn. (73) die Methode der unbestimmten Multiplicatoren an; multipliciren wir zu diesem Zwecke die Gleichungen mit Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, und addiren die Producte, so haben wir, um x_0 zu bestimmen, in der Summe den Coefficienten von x_0 gleich 1, jene der übrigen Unbekannten $=0$ zu setzen; wir erhalten hiedurch zur Bestimmung der Multiplicatoren Q die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
[aa]\,Q_1+[ab]\,Q_2+[ac]\,Q_3+[ad]\,Q_4&=1,\\
[ab]\,Q_1+[bb]\,Q_2+[bc]\,Q_3+[bd]\,Q_4&=0,\\
[ac]\,Q_1+[bc]\,Q_2+[cc]\,Q_3+[cd]\,Q_4&=0,\\
[ad]\,Q_1+[bd]\,Q_2+[cd]\,Q_3+[dd]\,Q_4&=0,
\end{aligned} \tag{76}$$

und zur Bestimmung von x_0:

$$x_0+[an]\,Q_1+[bn]\,Q_2+[cn]\,Q_3+[dn]\,Q_4=0. \tag{77}$$

Da nun aus den Glgn. (73) dieselben Werthe der Unbekannten sich ergeben, gleichgiltig welches Eliminationsverfahren auch angewendet werden mag, so muss aus (77) und der ersten der Glgn. (74) derselbe Werth von x_0 folgen, somit die Gleichung bestehen:

$$\alpha_1 n_1+\alpha_2 n_2+\dots+\alpha_m n_m=[an]\,Q_1+[bn]\,Q_2+[cn]\,Q_3+[dn]\,Q_4,$$

und zwar identisch für beliebige Werthe der Grössen n_1, n_2, u. s. w. Löst man daher im zweiten Theile die Summen auf, und setzt die Coefficienten von n_1, n_2, u. s. w. einander gleich, so erhält man:

$$\begin{aligned}
\alpha_1&=a_1\,Q_1+b_1\,Q_2+c_1\,Q_3+d_1\,Q_4,\\
\alpha_2&=a_2\,Q_1+b_2\,Q_2+c_2\,Q_3+d_2\,Q_4,\\
&\;\vdots\qquad\qquad\quad\vdots\\
\alpha_m&=a_m Q_1+b_m Q_2+c_m Q_3+d_m Q_4.
\end{aligned} \tag{78}$$

Multiplicirt man nun diese Gleichungen der Reihe nach mit α_1, α_2, ... α_m, und addirt die Producte, so kommt:

$$[\alpha\alpha]=[a\alpha]\,Q_1+[b\alpha]\,Q_2+[c\alpha]\,Q_3+[d\alpha]\,Q_4. \tag{79}$$

Multiplicirt man aber die Glgn. (78) zuerst mit a_1, a_2, ... a_m, dann mit b_1, b_2, .. b_m, mit c_1, c_2, .. c_m, endlich mit d_1, d_2, .. d_m und addirt jedesmal die Producte, so erhält man:

$$[a\alpha] = [aa]\,Q_1 + [ab]\,Q_2 + [ac]\,Q_3 + [ad]\,Q_4\,,$$
$$[b\alpha] = [ab]\,Q_1 + [bb]\,Q_2 + [bc]\,Q_3 + [bd]\,Q_4\,,$$
$$[c\alpha] = [ac]\,Q_1 + [bc]\,Q_2 + [cc]\,Q_3 + [cd]\,Q_4\,,$$
$$[d\alpha] = [ad]\,Q_1 + [bd]\,Q_2 + [cd]\,Q_3 + [dd]\,Q_4\,,$$

und aus der Vergleichung dieser Gleichungen mit jenen (76) folgt sofort:

$$[a\alpha] = 1\,,\ [b\alpha] = 0\,,\ [c\alpha] = 0\,,\ [d\alpha] = 0. \tag{80}$$

Hiemit gibt nun Gl. (79):

$$[\alpha\alpha] = Q_1\,,\ \text{folglich ist}\ p_x = \frac{1}{[\alpha\alpha]} = \frac{1}{Q_1}. \tag{81}$$

Betrachtet man nun die Glgn. (76), welche die Grössen Q geben, so sieht man, dass sie sich, abgesehen von der Bezeichnung der Unbekannten, nur dadurch von den Normal-Gleichungen unterscheiden, dass an die Stelle des absoluten Gliedes, in der Normal-Gleichung für x: -1, in den übrigen Gleichungen aber 0 getreten ist. Hieraus folgt also der Satz:

Um das Gewicht von x_0 zu finden, setze man in der (auf 0 reducirten) Normal-Gleichung von x an die Stelle des absoluten Gliedes -1, in den übrigen Normal-Gleichungen aber 0; der aus den so modificirten Gleichungen (man kann sie Gewichtsgleichungen nennen) folgende Werth von x ist der reciproke Werth des Gewichtes von x_0.

Man sieht nun leicht, dass dieselbe Analyse für jede der übrigen Unbekannten ausgeführt werden kann. Man hat auf diese Art zur Bestimmung der Gewichte von y_0, z_0, w_0 noch folgende drei Systeme von Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
[aa]\,Q_1' + [ab]\,Q_2' + [ac]\,Q_3' + [ad]\,Q_4' &= 0,\\
[ab]\,Q_1' + [bb]\,Q_2' + [bc]\,Q_3' + [bd]\,Q_4' &= 1,\\
[ac]\,Q_1' + [bc]\,Q_2' + [cc]\,Q_3' + [cd]\,Q_4' &= 0,\\
[ad]\,Q_1' + [bd]\,Q_2' + [cd]\,Q_3' + [dd]\,Q_4' &= 0,
\end{aligned}\right\} \tag{82}$$

$$p_y = \frac{1}{[\beta\beta]} = \frac{1}{Q_2'}.$$

$$\left.\begin{aligned}
[aa]\,Q_1'' + [ab]\,Q_2'' + [ac]\,Q_3'' + [ad]\,Q_4'' &= 0,\\
[ab]\,Q_1'' + [bb]\,Q_2'' + [bc]\,Q_3'' + [bd]\,Q_4'' &= 0,\\
[ac]\,Q_1'' + [bc]\,Q_2'' + [cc]\,Q_3'' + [cd]\,Q_4'' &= 1,\\
[ad]\,Q_1'' + [bd]\,Q_2'' + [cd]\,Q_3'' + [dd]\,Q_4'' &= 0,
\end{aligned}\right\} \tag{83}$$

$$p_z = \frac{1}{[\gamma\gamma]} = \frac{1}{Q_3''}.$$

$$\left.\begin{aligned}
[aa]\,Q_1''' + [ab]\,Q_2''' + [ac]\,Q_3''' + [ad]\,Q_4''' &= 0,\\
[ab]\,Q_1''' + [bb]\,Q_2''' + [bc]\,Q_3''' + [bd]\,Q_4''' &= 0,\\
[ac]\,Q_1''' + [bc]\,Q_2''' + [cc]\,Q_3''' + [cd]\,Q_4''' &= 0,\\
[ad]\,Q_1''' + [bd]\,Q_2''' + [cd]\,Q_3''' + [dd]\,Q_4''' &= 1,
\end{aligned}\right\} \tag{84}$$

$$p_w = \frac{1}{[\delta\delta]} = \frac{1}{Q_4'''}.$$

Es seien z. B., im Falle zweier Unbekannten, die Normal-Gleichungen gegeben:

$$7x + 4y - 12 = 0, \quad 4x + 5y + 3 = 0;$$

man findet hieraus die Werthe:

$$x = 3\tfrac{15}{19}, \quad y = -3\tfrac{12}{19},$$

und hat zur Bestimmung ihrer Gewichte folgende Gleichungen:

für x: $7x + 4y - 1 = 0, \quad 4x + 5y = 0,$

hieraus $x = \frac{5}{19}$, somit $p_x = \frac{19}{5}$;

für y: $7x + 4y = 0, \quad 4x + 5y - 1 = 0,$

hieraus $y = \frac{7}{19}$, somit $p_y = \frac{19}{7}$.

31. Die Bestimmung der Werthe von Q_1, Q_2', Q_3'', Q_4''', welche allein zur Gewichtsbestimmung benöthiget werden, aus den vier Systemen von Gleichungen (76), (82), (83), (84) ist, bei Anwendung des in §. 25 dargestellten Eliminationsverfahrens, nicht so umständlich, als es auf den ersten Blick scheinen möchte. Da nämlich dieselben nur in den absoluten Gliedern sich von den Normal-Gleichungen unterscheiden, so ist klar, dass bei dem Schema in §. 25 nur die 4 letzten Spalten in den 4 Abtheilungen sich ändern, welche die Rechnung für die absoluten Glieder der Gleichungen enthalten, indem alles übrige ungeändert bleibt, und wobei überdies diese Rechnung durch den Umstand vereinfacht wird, dass die absoluten Glieder der Gewichtsgleichungen, bis auf eines, $=0$ sind. Uebrigens ist einleuchtend, dass hiebei auch ohne viele Mühe die Werthe der übrigen Q erhalten werden können, welche nicht selten zu anderen Zwecken benöthiget werden. Hiebei ist es nun wesentlich, zu bemerken, dass diese Q nicht sämmtlich von einander verschieden sind, wie sich sogleich zeigt, wenn die Entwickelung, welche wir oben in Bezug auf die Unbekannte x_0 nur in so weit, als es die Bestimmung ihres Gewichtes erforderte, vorgenommen haben, vollständig, und auch für die übrigen Unbekannten ausgeführt wird. Zu den Glgn. (78) treten dann offenbar die analogen:

$$\beta_1 = a_1 Q_1' + b_1 Q_2' + c_1 Q_3' + d_1 Q_4',$$
$$\beta_2 = a_2 Q_1' + b_2 Q_2' + c_2 Q_3' + d_2 Q_4',$$

u. s. w.;

$$\gamma_1 = a_1 Q_1'' + b_1 Q_2'' + c_1 Q_3'' + d_1 Q_4'',$$
$$\gamma_2 = a_2 Q_1'' + b_2 Q_2'' + c_2 Q_3'' + d_2 Q_4'',$$

u. s. w.;

$$\delta_1 = a_1 Q_1''' + b_1 Q_2''' + c_1 Q_3''' + d_1 Q_4''',$$
$$\delta_2 = a_2 Q_1''' + b_2 Q_2''' + c_2 Q_3''' + d_2 Q_4''',$$

u. s. w.

Aus diesen vier Systemen von Gleichungen erhält man nun, indem man jedes derselben der Reihe nach mit a_1, a_2, ...; b_1, b_2, ...; u. s. w. multiplicirt und addirt, mit Rücksicht auf die Glgn. (76), (82), (83) und (84) die Relationen:

$$\begin{array}{llll} [a\alpha]=1, & [b\alpha]=0, & [c\alpha]=0, & [d\alpha]=0, \\ [a\beta]=0, & [b\beta]=1, & [c\beta]=0, & [d\beta]=0, \\ [a\gamma]=0, & [b\gamma]=0, & [c\gamma]=1, & [d\gamma]=0, \\ [a\delta]=0, & [b\delta]=0, & [c\delta]=0, & [d\delta]=1, \end{array} \tag{85}$$

von welchen die in erster Zeile stehenden die bereits oben [Gl. (80)] entwickelten sind.

Multiplicirt man aber dieselben vier Systeme von Gleichungen mit $\alpha_1, \alpha_2, \ldots; \beta_1, \beta_2, \ldots;$ u. s. w., und addirt dieselben, so folgt mit Rücksicht auf die Glgn. (85):

$$\begin{array}{llll} Q_1 \;=[\alpha\alpha], & Q_2 \;=[\alpha\beta], & Q_3 \;=[\alpha\gamma], & Q_4 \;=[\alpha\delta], \\ Q_1' =[\alpha\beta], & Q_2' =[\beta\beta], & Q_3' =[\beta\gamma], & Q_4' =[\beta\delta], \\ Q_1'' =[\alpha\gamma], & Q_2'' =[\beta\gamma], & Q_3'' =[\gamma\gamma], & Q_4'' =[\gamma\delta], \\ Q_1''' =[\alpha\delta], & Q_2''' =[\beta\delta], & Q_3''' =[\gamma\delta], & Q_4''' =[\delta\delta], \end{array}$$

woraus erhellt, dass $Q_1' = Q_2$, $Q_1'' = Q_3$, u. s. w. ist, übereinstimmend mit dem den Coefficienten der Normal-Gleichungen eigenthümlichen Bildungsgesetze.

Substituirt man in Gl. (77) für Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 die so eben erhaltenen Werthe in Function von $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, und bedenkt, dass auf dem im vorigen §. betretenen Wege auch für die übrigen Unbekannten, y_0, z_0, w_0 die analogen Ausdrücke sich ergeben, so erhält man folgende Gleichungen:

$$\begin{array}{l} x_0+[\alpha\alpha][an]+[\alpha\beta][bn]+[\alpha\gamma][cn]+[\alpha\delta][dn]=0, \\ y_0+[\alpha\beta][an]+[\beta\beta][bn]+[\beta\gamma][cn]+[\beta\delta][dn]=0, \\ z_0+[\alpha\gamma][an]+[\beta\gamma][bn]+[\gamma\gamma][cn]+[\gamma\delta][dn]=0, \\ w_0+[\alpha\delta][an]+[\beta\delta][bn]+[\gamma\delta][cn]+[\delta\delta][dn]=0, \end{array} \tag{86}$$

welche Gleichungen die unbestimmte Auflösung der Normal-Gleichungen enthalten, indem hiebei die wahrscheinlichsten Werthe der Unbekannten durch die vorläufig unbestimmt belassenen absoluten Glieder der Normal-Gleichungen ausgedrückt erscheinen. Auf welche Weise die Coefficienten $[\alpha\alpha]$, $[\alpha\beta]$, u. s. w. leicht erhalten werden können, wurde bereits im Eingange dieses §. bemerkt.

32. Aus dem so eben Vorgetragenen lassen sich nun unmittelbar noch einige andere Methoden zur Bestimmung der Gewichte ableiten.

Zweite Methode. Man löse die Normal-Gleichungen unbestimmt auf, wodurch man die wahrscheinlichsten Werthe der Unbekannten in der Form der Glgn. (86) erhält; dann ist der Coefficient von $[an]$ in dem Ausdrucke von x_0 der reciproke Werth des Gewichtes von x_0; der Coefficient von $[bn]$ in dem Ausdrucke für y_0 der reciproke Werth des Gewichtes von y_0, u. s. w.

Die Richtigkeit dieser Regel erhellt unmittelbar aus dem Anblicke der Glgn. (86), in Verbindung mit jenen (75). Setzen wir im Beispiele des vorhergehenden §. an die Stelle der absoluten Glieder -12 und $+3$ die allgemeinen Symbole $[an]$, $[bn]$, so erhalten wir die Gleichungen:

$$4x+4y+[an]=0, \quad 4x+5y+[bn]=0,$$

und durch Auflösung derselben:

$$x+\tfrac{5}{19}[an]-\tfrac{4}{19}[bn]=0, \quad y-\tfrac{4}{19}[an]+\tfrac{7}{19}[bn]=0,$$

folglich:

$$p_x=\frac{19}{5}, \quad p_y=\frac{19}{7}.$$

Dritte Methode. Setzen wir in den auf 0 reducirten Normal-Gleichungen (73) an die Stelle der Nulle rechts vom Gleichheitszeichen allgemeine Symbole, z. B. X, Y, Z, W. So wie nun durch unbestimmte Auflösung der Normal-Gleichungen (73) für die wahrscheinlichsten Werthe der Unbekannten die Ausdrücke (86) sich ergeben, so müssen aus den in der besagten Weise modificirten Normal-Gleichungen Werthe der Unbekannten x, y, z, w folgen, die wir sofort erhalten, wenn wir in (86) $[an]-X$, $[bn]-Y$, $[cn]-Z$, $[dn]-W$ an die Stelle von $[an]$, $[bn]$, $[cn]$, $[dn]$ treten lassen; es wird sich also zur Bestimmung von x die Gleichung ergeben:

$$x+[\alpha\alpha]\{[an]-X\}+[\alpha\beta]\{[bn]-Y\}+[\alpha\gamma]\{[cn]-Z\}+[\alpha\delta]\{[dn]-W\}=0,$$

d. i. mit Rücksicht auf die 1te der Glgn. (86):

$$x-x_0-[\alpha\alpha]X-[\alpha\beta]Y-[\alpha\gamma]Z-[\alpha\delta]W=0.$$

Aus dieser Gleichung erhalten wir nun, $X=Y=Z=W=0$ setzend, $x=x_0$ d. i. den wahrscheinlichsten Werth, wie es sein muss, zugleich aber auch in dem Coefficienten von X, $[\alpha\alpha]$, den reciproken Werth des Gewichtes von x_0. Dasselbe gilt selbstverständlich auch für die übrigen Unbekannten. Hieraus folgt also folgende Regel:

Man setze in den auf 0 reducirtem Normal-Gleichungen allgemeine Zeichen X, Y, Z, W an die Stelle der Nulle, und löse die Gleichungen (nach einer beliebigen Eliminationsmethode) auf, so erhält man für die Unbekannten Ausdrücke von der Form:

$$\begin{aligned}
x&=x_0+[\alpha\alpha]X+[\alpha\beta]Y+[\alpha\gamma]Z+[\alpha\delta]W,\\
y&=y_0+[\alpha\beta]X+[\beta\beta]Y+[\beta\gamma]Z+[\beta\delta]W,\\
z&=z_0+[\alpha\gamma]X+[\beta\gamma]Y+[\gamma\gamma]Z+[\gamma\delta]W,\\
w&=w_0+[\alpha\delta]X+[\beta\delta]Y+[\gamma\delta]Z+[\delta\delta]W,
\end{aligned} \tag{87}$$

welche sofort die wahrscheinlichsten Werthe darbieten, indem man

$$X=Y=Z=W=0$$

setzt; ferner ist der Coefficient von X in der Gleichung für x, jener von Y in der Gleichung für y, jener von Z in der Gleichung für z, u. s. w. der reciproke Werth des Gewichtes beziehungsweise von x_0, y_0, z_0, u. s. w.

In dem obigen Beispiele haben wir die Gleichungen:

$$7x+4y-12=X, \quad 4x+5y+3=Y;$$

die Auflösung derselben ergibt:

$$x=\tfrac{72}{19}+\tfrac{5}{19}X-\tfrac{4}{19}Y, \quad y=-\tfrac{69}{19}-\tfrac{4}{19}X+\tfrac{7}{19}Y;$$

hieraus folgt:

der wahrscheinlichste Werth von $x:x_0 = \frac{72}{19}$, m. d. Gew. $= \frac{19}{5}$,

" " " " $y:y_0 = -\frac{69}{19}$, " " " $= \frac{19}{7}$.

Vierte Methode. Führt man, zur Bestimmung der wahrscheinlichsten Werthe der Unbekannten aus den Normal-Gleichungen, die Elimination nach dem in §. 25 gelehrten Verfahren aus, wodurch successive die Gleichgn. (60) erhalten werden, so ist in der letzten derselben:

$$[dd\,.\,3]\,w + [dn\,.\,3] = 0,$$

welche nur mehr eine Unbekannte w enthält, der Coefficient derselben: $[dd\,.\,3]$ das Gewicht dieser Unbekannten.

Man überzeugt sich hievon leicht auf folgende Weise. Um nach der ersten, in §. 30 vorgetragenen Methode das Gewicht von w zu finden, hat man, vermöge der Glgn. (84), in der Normal-Gleichung für w, -1, in allen übrigen 0 an die Stelle des absoluten Gliedes zu setzen, wonach der aus den so modificirten Gleichungen folgende Werth von w der reciproke Werth des Gewichtes von w_0 ist. Setzen wir also in §. 25:

$$[an] = [bn] = [cn] = 0, \text{ und } -1 \text{ statt } + [dn],$$

so wird, zufolge der Glgn. (54), (56) und (58):

$$\begin{aligned} [bn\,.\,1] = [cn\,.\,1] = 0,\ & [dn\,.\,1] = -1, \\ [cn\,.\,2] = 0,\ & [dn\,.\,2] = -1, \\ & [dn\,.\,3] = -1, \end{aligned}$$

wodurch die Gl. (59) in folgende:

$$[dd\,.\,3]\,w - 1 = 0$$

sich verwandelt, aus welcher sofort

$$w = \frac{1}{p_w} = \frac{1}{[dd\,.\,3]}, \text{ somit } p_w = [dd\,.\,3] \tag{88}$$

folgt. Auf diese Weise kann das Gewicht jeder Unbekannten gefunden werden, indem man, die Elimination wiederholend, hiebei die Reihenfolge der Unbekannten ändert und successive jede derselben zur letzten macht. Es ist jedoch nicht nothwendig, die Elimination so oft zu wiederholen, als Unbekannte sind, weil bei jeder Elimination sich auch das Gewicht der vorletzten Unbekannten mit Leichtigkeit ergibt. Um nämlich zunächst das Gewicht von z zu finden, hat man nur die Ordnung der Elimination in den zwei letzten Gleichungen (57) [§. 25] umzukehren und z zur letzten Unbekannten zu machen; dadurch erhält man, w eliminirend, als Endgleichung

$$[cc\,.\,3]\,z + [cn\,.\,3] = 0,$$

und somit $p_z = [cc\,.\,3]$. Es ist aber

$$[cc\,.\,3] = [cc\,.\,2] - \frac{[cd\,.\,2]}{[dd\,.\,2]}\,[cd\,.\,2],$$

oder, wenn man die rechte Seite mit $\frac{[cc\,.\,2]}{[dd\,.\,2]}$ multiplicirt und dividirt:

$$[cc\,.\,3] = \frac{[cc\,.\,2]}{[dd\,.\,2]}\left\{[dd\,.\,2] - \frac{[cd\,.\,2]}{[cc\,.\,2]}[cd\,.\,2]\right\} = \frac{[cc\,.\,2]}{[dd\,.\,2]}[dd\,.\,3],$$

somit:

$$p_z = \frac{[cc\,.\,2]}{[dd\,.\,2]}[dd\,.\,3], \tag{89}$$

wo die drei Hilfsgrössen rechter Hand aus der ersten Elimination bekannt sind. Um nun auch die Gewichte von x und y zu finden, ist es am zweckmässigsten, die Elimination in umgekehrter Ordnung zu wiederholen, so dass, wenn das erstemal in der Ordnung x, y, z, w eliminirt wurde, nunmehr die Ordnung w, z, y, x eingehalten wird, wodurch sich das Gewicht von x unmittelbar, und jenes von y wieder durch drei bekannte Hilfsgrössen ergibt. Hiedurch wird zugleich die Richtigkeit der Elimination geprüft, indem der bei der zweiten erhaltene Werth von x mit dem bei der ersten Elimination durch Substitution nach rückwärts gewonnenen übereinstimmen muss. Bei einer grösseren Zahl von Unbekannten wird man gleichfalls die Ordnung der Elimination einmal vollständig umkehren und dadurch die Gewichte von vier Unbekannten und die Prüfung der Rechnung erlangen; die Gewichte der übrigen Unbekannten ergeben sich dann, indem man in jeder der beiden Eliminationen bis zur halben Anzahl der Unbekannten zurückgeht, und innerhalb derselben die Ordnung der Elimination entsprechend ändert.

In dem oben benützten Beispiele sind die Normal-Gleichungen:

$$7x + 4y - 12 = 0, \quad 4x + 5y + 3 = 0;$$

die erste mit $\frac{4}{7}$ multiplicirt gibt: $4x + \frac{16}{7}y - \frac{48}{7} = 0$, und diese von der 2ten abgezogen: $\frac{19}{7}y + \frac{69}{7} = 0$; somit $y = -\frac{69}{19}$ mit dem Gewichte $= \frac{19}{7}$. Die 2te mit $\frac{4}{5}$ multiplicirt gibt: $\frac{16}{5}x + 4y + \frac{12}{5} = 0$, und diese von der ersten abgezogen: $\frac{19}{5}x - \frac{72}{5} = 0$; hieraus $x = \frac{72}{19}$; Gewicht $= \frac{19}{5}$.

33. In Bezug auf die numerische Ausführung der in diesem Abschnitte behandelten Aufgabe mögen noch einige Bemerkungen Platz finden.

Sobald die Bedingungsgleichungen aufgestellt sind und, im Falle sie verschiedene Genauigkeit haben, jede mit der Quadratwurzel aus ihrem Gewichte multiplicirt ist, handelt es sich zunächst um die Bildung der Summen-coefficienten der Normal-Gleichungen ($[aa]$, $[ab]$, $[an]$, u. s. w.) aus den Coefficienten der Bedingungsgleichungen. Bei diesem Geschäfte wird es immer genügen, vier- bis höchstens fünfstellige Logarithmen anzuwenden, vorausgesetzt, dass man in dem Falle, wenn die gesuchten Werthe der Unbekannten Zahlen mit mehr als 3 bis 4 Ziffern sind, genäherte Werthe derselben in die Bedingungsgleichungen eingeführt und auf diese Weise, wie schon in

§. 22 bemerkt wurde, die Auflösung der Aufgabe auf die Bestimmung der wahrscheinlichsten Werthe der kleinen Correctionen dieser Näherungswerthe reducirt hat.

Die Rechnung selbst wird tabellarisch angeordnet, etwa nach folgendem Schema:

	№ der Bedingungsgleichung				
	1	2	3	4	u. s. w.
Absolute Glieder	$\log n_1$	$\log n_2$	$\log n_3$	$\log n_4$	. . . .
Coefficienten von x . . . . . a	$\log a_1$	$\log a_2$	$\log a_3$	$\log a_4$	. . . .
Coefficienten von y . . . . . b	$\log b_1$	$\log b_2$	$\log b_3$	$\log b_4$	. . . .
Coefficienten von z c	$\log c_1$	$\log c_2$	$\log c_3$	$\log c_4$	. . . .
u. s. w.	⋮	⋮	⋮	⋮	

oder auch umgekehrt, so dass die Bedingungsgleichungen in verticaler und die Coefficienten der einzelnen Gleichungen in horizontaler Richtung gereiht werden. Man bildet nun die Logarithmen der einzelnen Producte: $a_1 n_1$, $a_2 n_2, \ldots$; $a_1 a_1$, $a_2 a_2, \ldots$; $a_1 b_1$, $a_2 b_2, \ldots$, u. s. w. und setzt die Zahlen in weitere Columnen. Hiebei wird, wenn man von der in §. 24 erklärten Controle Gebrauch machen will, auch die Bildung der Summen $[sn]$, $[as]$, $[bs]$, u. s. w. mitgenommen.

Wenn die Bedingungsgleichungen von verschiedener Genauigkeit sind, so kann es, statt jede derselben mit der Quadratwurzel aus ihrem Gewichte zu multipliciren, bisweilen (wenn Coefficienten und Gewichte sehr einfache Zahlen sind) bequemer sein, die Multiplication mit den Gewichten selbst erst an den Producten aa, ab, an, u. s. w. zu vollziehen, indem es offenbar auf dasselbe hinauskommt, jeden der beiden Factoren eines solchen Productes mit $\sqrt{p}$, oder das Product selbst mit p zu multipliciren. In diesem Falle erhält man dann durch Substitution der wahrscheinlichsten Werthe der Unbekannten in die Bedingungsgleichungen auch die v in ihrem ursprünglichen Werthe, und man hat, um den mittleren Fehler ε der Gewichtseinheit zu finden, in Gl. (71) $[pvv]$ statt $[vv]$ zu setzen, also die Formel:

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{[pvv]}{m-k}}$$

zu gebrauchen.

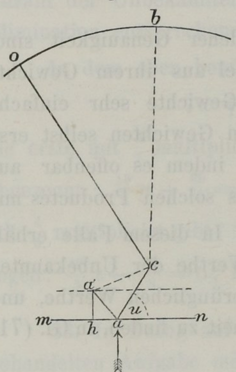
Häufig sind die absoluten Glieder der Bedingungsgleichungen sehr kleine Decimalbrüche mit mehreren der ersten bedeutenden Ziffer vorausgehenden Nullen; in solchem Falle kann man die absoluten Glieder aller Gleichungen mit einer zweckmässig gewählten Potenz von 10 multipliciren und hat dann die resultirenden wahrscheinlichsten Werthe der Unbekannten wieder durch dieselbe Potenz von 10 zu dividiren.

Eben so kommt es nicht selten vor, dass eine Unbekannte gegen die andern sehr klein oder sehr gross ist, wo dann die Coefficienten derselben im ersteren Falle in Vergleich zu den übrigen sehr gross im zweiten sehr klein sein werden. Es ist dann vortheilhaft, für diese Unbekannte, etwa x, eine neue x' mittelst der Gleichung $x = \alpha x'$ einzuführen, wo man bei kleinem x für α einen Werth < 1, z. B. 0.1 oder 0.01, etc., bei grossem x einen Werth > 1, z. B. 10, oder 100 etc. wählen wird. Die Auflösung der Gleichungen ergibt nun x' und das Gewicht $p_{x'}$ von x', und man hat dann $x = \alpha x'$ und, vermöge der Gl. (40), das Gewicht von $x = \frac{p_{x'}}{\alpha^2}$.

Bei der Auflösung der Normal-Gleichungen, deren Coefficienten in der Regel grössere Zahlen sind, ist es rathsam, Logarithmen mit 6 bis 7 Stellen anzuwenden, da die Coefficienten der durch die Elimination successive entstehenden Gleichungen nicht selten beträchtlich kleiner werden, und daher bei etwa nur fünfstelliger Rechnung in diesen Coefficienten nicht die hinreichende Anzahl von sicheren Ziffern übrig bleibt, um die Werthe der Unbekannten mit genügender Genauigkeit zu erhalten.

34. Beispiel. Zur Erläuterung der vorgetragenen Methoden möge die Bestimmung der Constanten der Gleichung eines Fühlhebels dienen. Der Apparat wird zur scharfen Messung kleiner linearer Dimensionen, z. B. des Unterschiedes der Länge zweier nahe gleich langer Stäbe gebraucht und besteht im Wesentlichen aus einem ungleicharmigen Hebel aco (Fig. 2), welcher um c drehbar ist, auf dessen kurzen Hebelarm ac die zu messende in der Richtung des Pfeiles liegende Dimension wirkt, während der längere Arm an einem getheilten Gradbogen spielt, an welchem sein Ort bei irgend einer Stellung des Hebels in Graden und Minuten abgelesen werden kann.

Fig. 2.



Sei aco die Stellung des Fühlhebels bei der Lesung $= 0$ am Gradbogen, $a'cb$ dessen Stellung bei der Lesung μ; ziehen wir durch den Angriffspunct a die mn senkrecht zur Richtung der zu messenden Dimension, und $a'h$ senkrecht auf mn, so ist $a'h = e$ die in der Richtung des Pfeiles stattfindende Bewegung des Angriffspunctes a, während der Hebel sich von der Lesung 0 bis zur Lesung μ bewegt, und es handelt sich darum, e aus μ zu finden. Zieht man die Sehne aa', und setzt die Länge des kurzen Hebelarmes $ac = a'c = r$, so hat man, da $\angle aca' = \angle ocb = \mu$ ist: $aa' = 2r \sin \frac{1}{2}\mu$. Ferner ist $a'h = e = aa' \sin a'ah$, und $\angle a'ah = 180^0 - a'ac - can = 180 - (90 - \frac{1}{2}\mu) - u = 90 - (u - \frac{1}{2}\mu)$, wenn mit u der constante Winkel bezeichnet wird, welchen der kurze Hebelarm bei der Lesung 0^0 mit der auf die Richtung der zu messenden Dimensionen Senkrechten *mn* einschliesst. Hieraus folgt:

$$e = 2r \sin \tfrac{1}{2}\mu \cos (u - \tfrac{1}{2}\mu), \qquad (m)$$

mittelst welcher Gleichung e berechnet werden kann, sobald die Constanten r und a des Apparates bekannt sind.

Zur Bestimmung dieser Constanten lässt man nun auf den Fühlhebel eine Schraube wirken, deren Ganghöhe $= g$ genau bekannt ist, indem man die Schraube, von einer bestimmten Stellung derselben, welcher die Lesung μ_0 entspricht, beginnend, immer genau um einen Gang dreht und jedesmal die Stellung des Fühlhebels abliest; jede solche Beobachtung gibt dann eine Gleichung von obiger Form; da diese aber in Bezug auf die Unbekannten r und u nicht linear ist, so muss sie zuerst auf lineare Form gebracht werden, was nach §. 22, oder in unserem Falle einfacher auf folgende Weise bewirkt werden kann. Durch Auflösung des $\cos (u - \tfrac{1}{2}\mu)$ erhält man:

$$e = 2r \cos u \cos \tfrac{1}{2}\mu \sin \tfrac{1}{2}\mu + 2r \sin u \sin \tfrac{1}{2}\mu^2;$$

setzt man nun:

$$r \cos u = x, \qquad r \sin u = y,$$

so verwandelt sich die Gleichung in folgende:

$$e = \sin \mu \,.\, x + 2 \sin \tfrac{1}{2}\mu^2 \,.\, y,$$

welche in Bezug auf die Unbekannten x und y linear ist. Sobald diese bekannt geworden, hat man dann:

$$r = \frac{x}{\cos u} = \frac{y}{\sin u} = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad tg\, u = \frac{y}{x}. \qquad (n)$$

Ist nun z die unbekannte Bewegung des Fühlhebels von der Lesung 0^0 bis zur ersten Lesung μ_0, und sind $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots$ die Lesungen nach der Drehung der Schraube um 1, 2, 3, ... Gänge, so hat man die Bedingungsgleichungen:

$$\begin{aligned} z &= \sin \mu_0 \,.\, x + 2 \sin \tfrac{1}{2}\mu_0^2 \,.\, y, \\ g + z &= \sin \mu_1 \,.\, x + 2 \sin \tfrac{1}{2}\mu_0^2 \,.\, y, \\ 2g + z &= \sin \mu_2 \,.\, x + 2 \sin \tfrac{1}{2}\mu_0^2 \,.\, y, \end{aligned}$$

u. s. w.

oder, wenn man $g = 1$ setzt, d. i. x, y, z zunächst in Schraubengängen ausdrückt:

$$\begin{aligned} \sin \mu_0 \,.\, x + 2 \sin \tfrac{1}{2}\mu_0^2 \,.\, y - z \phantom{{}-1} &= 0, \\ \sin \mu_1 \,.\, x + 2 \sin \tfrac{1}{2}\mu_1^2 \,.\, y - z - 1 &= 0, \qquad (p) \\ \sin \mu_2 \,.\, x + 2 \sin \tfrac{1}{2}\mu_2^2 \,.\, y - z - 2 &= 0, \end{aligned}$$

u. s. w.

An einem Fühlhebel des im k. k. polytechnischen Institute befindlichen Comparators wurden folgende Beobachtungen gemacht:

Schraube g	μ	$\log \sin \mu$	$\log 2 \sin \frac{1}{2}\mu^2$
0	3° 14'.6	8.7526370	7.2045920
1	8 6 .3	9.1491810	7.9995064
2	12 49 .7	9.3464130	8.3972522
3	17 27 .1	9.4769781	8.6630384
4	22 0 .7	9.5737942	8.8626824
5	26 32 .8	9.6502362	9.0229616
6	31 4 .7	9.7128260	9.1569658
7	35 38 .3	9.7654203	9.2725120
8	40 15 .3	9.8103606	9.3744256
9	44 57 .3	9.8491437	9.4658854

Aus einigen Combinationen dieser Beobachtungen ergaben sich vorläufig die genäherten Werthe:

$$x = 11.28940\,, \quad y = 5.71919\,, \quad z = 0.64874;$$

setzen wir daher

$$x = 11.28940 + \xi\,, \quad y = 5.71919 + \eta\,, \quad z = 0.64874 + \zeta\,,$$

so erhalten wir durch Substitution derselben, so wie der Werthe von $\sin \mu$ und $2 \sin \frac{1}{2} \mu^2$ in die Glgn. (p) folgende Bedingungsgleichungen:

	v	vv	
$0.05658\,\xi + 0.00160\,\eta - \zeta - 86 = 0\,,$	-47.5	2256	
$0.14099\,\xi + 0.00999\,\eta - \zeta + 5 = 0\,,$	$+28.8$	829	
$0.22203\,\xi + 0.02496\,\eta - \zeta + 61 = 0\,,$	$+72.6$	5271	
$0.29990\,\xi + 0.04603\,\eta - \zeta + 22 = 0\,,$	$+23.9$	571	
$0.37480\,\xi + 0.07289\,\eta - \zeta - 64 = 0\,,$	-69.6	4844	
$0.44693\,\xi + 0.10543\,\eta - \zeta - 23 = 0\,,$	-34.0	1156	(q)
$0.51621\,\xi + 0.14354\,\eta - \zeta - 12 = 0\,,$	-26.1	681	
$0.58267\,\xi + 0.18729\,\eta - \zeta + 36 = 0\,,$	$+21.0$	441	
$0.64619\,\xi + 0.23682\,\eta - \zeta + 81 = 0\,,$	$+67.3$	4529	
$0.70655\,\xi + 0.29234\,\eta - \zeta - 26 = 0\,,$	-36.1	1303	
	$[vv] =$	21881	

wo die absoluten Glieder Einheiten der 5. Decimalstelle eines Schraubenganges sind, d. h. es wurden die absoluten Glieder aller Gleichungen mit 100000 multiplicirt. Hiebei ist noch zu bemerken, dass, wie man leicht übersieht, bei dieser Substitution Logarithen von 7 Decimalstellen verwendet werden müssen, wenn man in den absoluten Gliedern noch die 5. Decimalstelle sicher erhalten will. In den Bedingungsgleichungen genügt es dann, die Coefficienten mit 5 Decimalstellen anzusetzen.

Es folgt nun, da sämmtliche Gleichungen von gleicher Genauigkeit sind, die Multiplication mit den Quadratwurzeln aus den Gewichten daher entfällt, die Berechnung der Producte *aa*, *ab*, *ac*, *bb*, *bc*, *cc*, *an*, *bn*, *cn* (mit fünfstelligen Logarithmen) und die Bildung der Summencoefficienten der Normal-Gleichungen, welche des Raumes wegen, und da sie keine Schwierigkeit bietet, hier weggelassen wird; man erhält dann folgende Normal-Gleichungen:

$$2.02530\,\xi + 0.63809\,\eta - 3.99285\,\zeta + 30.466 = 0,$$
$$0.63809\,\xi + 0.21649\,\eta - 1.12089\,\zeta + 11.959 = 0,$$
$$-3.99285\,\xi - 1.12089\,\eta + 10.00000\,\zeta + 6.000 = 0.$$

Die Prüfung der Richtigkeit der Coefficienten dieser Gleichungen nach §. 24 stellt sich folgendermassen:

$$[an] + [bn] + [cn] = 48.4251\,, \quad [ns] = 48.4271\,,$$
$$[aa] + [ab] + [ac] = -1.32946\,, \quad [as] = -1.32946\,,$$
$$[ab] + [bb] + [bc] = -0.26631\,, \quad [bs] = -0.26630\,,$$
$$[ac] + [bc] + [cc] = 4.88626\,, \quad [cs] = 4.88626\,;$$

die Uebereinstimmung ist, mit Rücksicht auf die Rechnung mit nur fünfstelligen Logarithmen eine genügende.

Die Auflösung der Normal-Gleichungen ist in folgendem Tableau enthalten, wobei, unter der ersten fetten Linie, auch die Berechnung der Grössen $[\alpha\alpha]$, $[\alpha\beta]$, etc. [§. 31] beigefügt ist, um auch diese an dem Beispiele zu erläutern.

+ 2.02530	+ 0.63809	− 3.99285	+ 30.466	+ 0.21649	− 1.12089	+ 11.959	+ 10.0000	+ 6.000
0.306489	9.804882	0.601283*n*	1.483815	+ 0.201036	− 1.25799	+ 9.59860	+ 7.87185	− 60.0633
	9.303275	0.099676*n*	0.982208	+ 0.015454	+ 0.13710	+ 2.36040	+ 2.12815	+ 66.0633
		0.896077	1.778609*n*	8.189041	9.137037	0.372986	+ 1.21628	+ 20.9402
	2.261643	2.295749	+ 182.660		0.085033	1.320982	+ 0.91187	+ 45.1231
			+ 197.583		0.831503*n*	− 6.78427	9.959933	1.654399
			+ 410.709			− 4.42387	lg ζ =	1.694466*n*
			2.613534			0.645802*n*	ζ =	− 49.5
		lg ξ =	2.307045*n*		lg η =	2.456761		
		ξ =	− 202.8		η =	+ 286.3		
			− 1			0		0
			0. . . . . *n*			+ 0.31506		− 1.9715
						9.49839		+ 2.7950
	1.62940*n*	1.31955*n*	− 42.599			0.44639		− 4.7665
			− 20.871		9.85531	+ 0.71665		0.67820*n*
			− 64.470			+ 1.03171	lg$[\alpha\gamma]$ =	0.71827
			1.80936*n*			0.01356	$[\alpha\gamma]$ =	+ 5.227
		lg$[\alpha\alpha]$ =	1.50287		lg$[\alpha\beta]$ =	1.82452*n*		
		$[\alpha\alpha]$ =	+ 31.832		$[\alpha\beta]$ =	− 66.761		
			0			− 1		0
						0. . . . . *n*		0.94800
					0.12511*n*	− 1.3339	lg$[\beta\gamma]$ =	0.98807*n*
						− 2.3339	$[\beta\gamma]$ =	− 9.729
						0.36808*n*		
					lg$[\beta\beta]$ =	2.17904		
					$[\beta\beta]$ =	+ 151.022		
			0			0		− 1
								0. . . . *n*
							lg$[\gamma\gamma]$ =	0.04007
							$[\gamma\gamma]$ =	+ 1.097

Die Elimination liefert also folgende wahrscheinlichste Werthe:

$$\xi = -202.8, \quad \eta = +286.3, \quad \zeta = -49.5,$$

ausgedrückt in Einheiten der 5. Decimalstelle, und gleichzeitig in dem Coefficienten von ζ in der letzten Gleichung das Gewicht dieser Unbekannten $= 0.91187$. Das Gewicht von η ergibt sich nach Gl. (89):

$$= \frac{[bb \,.\, 1]}{[cc \,.\, 1]} [cc \,.\, 2] = \frac{0.015454}{2.12815} \times 0.91187 = 0.00662.$$

Um endlich auch das Gewicht von ξ zu erhalten, wiederholen wir die Elimination, in umgekehrter Ordnung ξ zur letzten Unbekannten machend, und erhalten hieraus $\xi = -202.8$ mit dem Gewichte 0.03140. Die Uebereinstimmung dieses Werthes von ξ mit dem in der ersten Elimination erhaltenen zeugt für die Richtigkeit der Rechnung. Uebrigens sind, durch die Berechnung der Grössen $[\alpha\alpha]$, $[\beta\beta]$, $[\gamma\gamma]$ die Gewichte auch nach der zweiten der in §. 32 angeführten Methoden bestimmt; es ist nämlich

$$p_\xi = \frac{1}{[\alpha\alpha]} = 0.03141, \quad p_\eta = \frac{1}{[\beta\beta]} = 0.00662, \quad p_\zeta = \frac{1}{[\gamma\gamma]} = 0.91187,$$

übereinstimmend mit den obigen Werthen.

Substituirt man die erhaltenen Werthe von ξ, η, ζ in die Bedingungsgleichungen (q), so ergeben sich die übrigbleibenden Fehler v, welche sammt deren Quadraten den Bedingungsgleichungen in den zwei Spalten rechts beigefügt sind, und hieraus in Einheiten der 5. Decimalstelle:

$$[vv] = 21881.$$

Diese Quadratsumme kann aber auch nach den Formeln (63) und (64) berechnet werden, indem in unserem Falle $[vv] = [nn \,.\, 3]$. Man findet zunächst die Summe der Quadrate der absoluten Glieder der Bedingungsgleichungen

$$[nn] = 24928,$$

und hat aus der Elimination die Hilfsgrössen:

$$[bn \,.\, 1] = 2.36040, \quad [bb \,.\, 1] = 0.015454, \quad [cn \,.\, 2] = 45.1231, \quad [cc \,.\, 2] = 0.91187;$$

mit diesen erhält man nun mittelst der Glgn. (63):

$$[nn \,.\, 1] = 24469.7$$
$$[nn \,.\, 2] = 24109.2$$
$$[nn \,.\, 3] = 21876.3 = [vv],$$

welcher Werth mit dem durch unmittelbare Substitution erhaltenen genügend genau stimmt, wenn man beachtet, dass bei letzterer nur eine Decimalstelle in den v angesetzt wurde.

Hiemit ergibt sich nun der mittlere Fehler einer Gleichung nach Gl. (71):

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{[vv]}{10-3}} = \pm 55.9,$$

und hieraus die mittleren Fehler von ξ, η, ζ, nämlich:

$$\varepsilon_\xi = \frac{\varepsilon}{\sqrt{p_\xi}} = \pm 315, \quad \varepsilon_\eta = \frac{\varepsilon}{\sqrt{p_\eta}} = \pm 687, \quad \varepsilon_\zeta = \frac{\varepsilon}{\sqrt{p_\zeta}} = \pm 58.$$

Fügt man ferner die gefundenen Werthe von ξ, η, ζ zu den angenommenen genäherten Werthen von x, y, z hinzu, so hat man als wahrscheinlichste Werthe, in Schraubengängen ausgedrückt:

$$\begin{array}{lll} x = 11^g.28737 & \text{m. d. mittleren Fehler} & \pm 0^g.00315, \\ y = 5\ .72205 & \text{,, ,, ,, ,,} & \pm 0\ .00687, \\ z = 0\ .64825 & \text{,, ,, ,, ,,} & \pm 0\ .00058. \end{array}$$

Mit diesen Werthen erhält man endlich mittelst der Glgn. (n):

$$r = 12^g.65490, \quad u = 26^0\, 53'.0.$$

Will man auch noch den mittleren oder wahrscheinlichen Fehler von r und u bestimmen, so muss der im folgenden §. vorzutragende Satz zu Hilfe genommen werden.

35. Beschäftigen wir uns noch mit der Aufgabe, das Gewicht des wahrscheinlichsten Werthes einer linearen Function:

$$K = k_0 + k_1 x + k_2 y + k_3 z + k_4 w \tag{90}$$

der Grössen x, y, z, w zu bestimmen, deren wahrscheinlichste Werthe x_0, y_0, u. s. w. aus Normal-Gleichungen hervorgegangen sind. Es ist an und für sich klar, dass der wahrscheinlichste Werth K_0 der Function durch den Ausdruck:

$$K_0 = k_0 + k_1 x_0 + k_2 y_0 + k_3 z_0 + k_4 w_0 \tag{91}$$

gegeben ist, und es handelt sich daher nur noch um die Bestimmung des Gewichtes desselben.

Man sieht leicht, dass die unmittelbare Anwendung des in der Gl. (40) ausgesprochenen Satzes auf die obige Function nicht zulässig ist, weil zwar, der Voraussetzung nach, die Grössen x, y, z, u. s. w. von einander unabhängig sind, nicht aber ihre wahrscheinlichsten Werthe x_0, y_0, etc., welche vielmehr in Folge ihres gemeinschaftlichen Ursprunges aus den Normal-Gleichungen von einander abhängig sind. Wir müssen daher zunächst wieder, so wie in §. 28, diese Grössen durch die von einander unabhängigen $n_1, n_2, \ldots. n_m$ ausdrücken. Substituiren wir zu diesem Zwecke für x, y, z, w ihre wahrscheinlichsten Werthe aus (74), so erhalten wir:

$$\begin{aligned} K_0 = k_0 &- k_1(\alpha_1 n_1 + \alpha_2 n_2 + \alpha_3 n_3 + \ldots. + \alpha_m n_m) \\ &- k_2(\beta_1 n_1 + \beta_2 n_2 + \beta_3 n_3 + \ldots. + \beta_m n_m) \\ &- k_3(\gamma_1 n_1 + \gamma_2 n_2 + \gamma_3 n_3 + \ldots. + \gamma_m n_m) \\ &- k_4(\delta_1 n_1 + \delta_2 n_2 + \delta_3 n_3 + \ldots. + \delta_m n_m), \end{aligned}$$

oder, nach den n ordnend:

$$\begin{aligned}K_0 = k_0 &- n_1(\alpha_1 k_1 + \beta_1 k_2 + \gamma_1 k_3 + \delta_1 k_4)\\ &- n_2(\alpha_2 k_1 + \beta_2 k_2 + \gamma_2 k_3 + \delta_2 k_4)\\ &- n_3(\alpha_3 k_1 + \beta_3 k_2 + \gamma_3 k_3 + \delta_3 k_4)\\ &- \text{etc.}\end{aligned}$$

Da nun die beobachteten Werthe $n_1, n_2, \ldots$ von einander unabhängig sind, so wird, wenn wir das Gewicht von K mit P bezeichnen und berücksichtigen, dass in Folge der an den Bedingungsgleichungen bereits vollzogenen Multiplication derselben mit den Quadratwurzeln aus ihren Gewichten [§. 23], dieselben auf einerlei Genauigkeit, jene der Gewichtseinheit reducirt sind, somit das Gewicht unserer n der Einheit gleich zu setzen ist, zufolge der Gl. (40):

$$\begin{aligned}\frac{1}{P} = &(\alpha_1 k_1 + \beta_1 k_2 + \gamma_1 k_3 + \delta_1 k_4)^2\\ &+ (\alpha_2 k_1 + \beta_2 k_2 + \gamma_2 k_3 + \delta_2 k_4)^2\\ &+ (\alpha_3 k_1 + \beta_3 k_2 + \gamma_3 k_3 + \delta_3 k_4)^2\\ &+ \text{etc.}\end{aligned}$$

Erhebt man die Polynome zum Quadrate, so kommt:

$$\begin{aligned}\frac{1}{P} = [\alpha\alpha]\,k_1 k_1 + [\beta\beta]\,k_2 k_2 + [\gamma\gamma]\,k_3 k_3 + [\delta\delta]\,k_4 k_4 &\\ + 2\,[\alpha\beta]\,k_1 k_2 + 2\,[\alpha\gamma]\,k_1 k_3 + 2\,[\alpha\delta]\,k_1 k_4 &\\ + 2\,[\beta\gamma]\,k_2 k_3 + 2\,[\beta\delta]\,k_2 k_4 &\\ + 2\,[\gamma\delta]\,k_3 k_4\,, &\end{aligned} \tag{92}$$

wo das Bildungsgesetz des Ausdruckes rechter Hand leicht in die Augen fällt; die Werthe der Summencoefficienten $[\alpha\alpha]$, $[\beta\beta]$, $[\alpha\beta]$, u. s. w. werden auf die in §. 31 erklärte Weise erhalten.

Die Glgn. (75) sind, wie man leicht sieht, nur specielle Fälle des obigen allgemeineren Ausdruckes (92); denn setzt man z. B. in (91):

$$k_0 = k_2 = k_3 = k_4 = 0\,,\ k_1 = 1\,,$$

so wird $K_0 = x_0$, und aus (92) folgt $\frac{1}{P} = [\alpha\alpha]$, übereinstimmend mit der ersten der Glgn. (75).

Der obige Ausdruck (92) lässt sich noch in einer einfacheren Gestalt darstellen. Schreibt man denselben in folgender Form:

$$\begin{aligned}\frac{1}{P} = &k_1\,([\alpha\alpha]\,k_1 + [\alpha\beta]\,k_2 + [\alpha\gamma]\,k_3 + [\alpha\delta]\,k_4)\\ &+ k_2\,([\alpha\beta]\,k_1 + [\beta\beta]\,k_2 + [\beta\gamma]\,k_3 + [\beta\delta]\,k_4)\\ &+ k_3\,([\alpha\gamma]\,k_1 + [\beta\gamma]\,k_2 + [\gamma\gamma]\,k_3 + [\gamma\delta]\,k_4)\\ &+ k_4\,([\alpha\delta]\,k_1 + [\beta\delta]\,k_2 + [\gamma\delta]\,k_3 + [\delta\delta]\,k_4)\,,\end{aligned}$$

und setzt:

$$\begin{aligned}X &= [\alpha\alpha]\,k_1 + [\alpha\beta]\,k_2 + [\alpha\gamma]\,k_3 + [\alpha\delta]\,k_4\,,\\ Y &= [\alpha\beta]\,k_1 + [\beta\beta]\,k_2 + [\beta\gamma]\,k_3 + [\beta\delta]\,k_4\,,\\ Z &= [\alpha\gamma]\,k_1 + [\beta\gamma]\,k_2 + [\gamma\gamma]\,k_3 + [\gamma\delta]\,k_4\,,\\ W &= [\alpha\delta]\,k_1 + [\beta\delta]\,k_2 + [\gamma\delta]\,k_3 + [\delta\delta]\,k_4\,,\end{aligned} \tag{m}$$

so wird:

$$\frac{1}{P}=k_1 X+k_2 Y+k_3 Z+k_4 W; \tag{93}$$

man erkennt nun unmittelbar aus der Vergleichung der Glgn. (m) mit jenen (86), dass X, Y, Z, W nichts anderes sind als die Werthe der Unbekannten x, y, z, w, welche aus der Auflösung der Normal-Gleichungen hervorgehen, wenn man in letzteren an die Stelle der absoluten Glieder $[an]$, $[bn]$, $[cn]$, $[dn]$ beziehungsweise $-k_1$, $-k_2$, $-k_3$, $-k_4$ setzt.

Bezeichnet man mit ε_k den mittleren Fehler von K_0, so hat man:

$$\varepsilon_k=\frac{\varepsilon}{\sqrt{P}}=\varepsilon\sqrt{k_1 X+k_2 Y+k_3 Z+k_4 W}, \tag{94}$$

wo ε durch die Gl. (71) bestimmt ist.

Ist die Function K in Bezug auf x, y, u. s. w. nicht linear, so muss sie zuvor auf die lineare Form der Gl. (90) gebracht werden, was mittelst des in §. 22 vorgetragenen Verfahrens immer möglich ist.

B e i s p i e l. Im vorhergehenden §. haben wir die wahrscheinlichsten Werthe der Constanten r und u des Fühlhebels mittelst der Gleichungen

$$r=\sqrt{x^2+y^2}, \quad \operatorname{tg} u=\frac{y}{x} \tag{n}$$

aus den Grössen x und y erhalten, deren wahrscheinlichste Werthe aus Normal-Gleichungen hervorgingen. Mit Hilfe des obigen Satzes kann nun das Gewicht der erlangten Werthe von r und u leicht bestimmt werden, zu welchem Zwecke die Gleichungen (n) zunächst auf lineare Form gebracht werden müssen. Lassen wir wieder x und y unsere angenommenen genäherten Werthe dieser Grössen bedeuten, und setzen in (n) $x+\xi$ statt x und $y+\eta$ statt y, so wird vermöge des Taylor'schen Satzes:

$$r=\sqrt{x^2+y^2}+\frac{dr}{dx}\xi+\frac{dr}{dy}\eta; \quad u=\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}+\frac{du}{dx}\xi+\frac{du}{dy}\eta;$$

durch Differentiation der Glgn. (n) findet man aber leicht:

$$\frac{dr}{dx}=\frac{x}{r}, \quad \frac{dr}{dy}=\frac{y}{r}; \quad \frac{du}{dx}=-\frac{y}{r^2}, \quad \frac{du}{dy}=\frac{x}{r^2},$$

somit, wenn wir der Kürze wegen $\sqrt{x^2+y^2}=r_0$, $\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}=u_0$ setzen, wo r_0 und u_0 die mit den genäherten Werthen von x und y berechneten Werthe von r und u bedeuten:

$$r=r_0+\frac{x}{r}\xi+\frac{y}{r}\eta,$$

$$u=u_0-\frac{y}{r^2}\xi+\frac{x}{r^2}\eta.$$

Vergleicht man diese Gleichungen mit (90), so hat man

$$\text{für die erstere: } k_1 = \frac{x}{r}, \quad k_2 = \frac{y}{r}, \quad k_3 = k_4 = 0,$$

$$\text{„ „ zweite: } k_1 = -\frac{y}{r^2}, \quad k_2 = \frac{x}{r^2}, \quad k_3 = k_4 = 0,$$

somit, vermöge der Gl. (92):

$$\text{für das Gewicht von } r: \quad \frac{1}{P_r} = [\alpha\alpha]\frac{x^2}{r^2} + [\beta\beta]\frac{y^2}{r^2} + 2[\alpha\beta]\frac{xy}{r^2},$$

$$\text{„ „ „ „ } u: \quad \frac{1}{P_u} = [\alpha\alpha]\frac{y^2}{r^4} + [\beta\beta]\frac{x^2}{r^4} - 2[\alpha\beta]\frac{xy}{r^4}.$$

Substituirt man nun in diesen Ausdrücken für x, y, r, $[\alpha\alpha]$, $[\alpha\beta]$, $[\beta\beta]$ die in §. 34 erhaltenen Werthe, so folgt:

$$\text{Gewicht von } r: \; P_r = 0.4252, \quad \text{Gewicht von } u: \; P_u = 0.8833,$$

somit der mittlere Fehler

$$\text{von } r: \; \varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{\sqrt{P_r}} = \pm 85.7; \quad \text{von } u: \; \varepsilon_u = \frac{\varepsilon}{\sqrt{P_u}} = \pm 20.2;$$

durch Multiplication mit 0.6745 erhält man die wahrscheinlichen Fehler:

$$\pm 57.8, \text{ bez. } \pm 13.6.$$

Diese Fehler sind noch in Einheiten der 5ten Decimalstelle ausgedrückt, also durch 100000 zu dividiren; ferner liegt ersterem 1 Schraubengang g, letzterem als Winkelfehler der Radius als Einheit zu Grunde. Es ist bei der benützten Schraube 1 Schraubengang $g = 0.163294$ Wiener Linien; multiplicirt man daher r und ε_r mit diesem Werthe von g, ε_u mit 3438, um diesen Fehler in Minuten zu erhalten, so kommt:

$r = 2.06647$ Wien. Linien m. d. wahrsch. Fehler ± 0.000094 Wien. Linien,
$u = 26^\circ\, 53'.0$ „ „ „ „ $\pm 0'.5$,

und die Gleichung des Fühlhebels ist:

$$e = 4'''.13294 \sin \tfrac{1}{2}\mu \cos\left(26^\circ\, 53'.0 - \tfrac{1}{2}\mu\right).$$

IV. BESTIMMUNG DER WAHRSCHEINLICHSTEN WERTHE VON GRÖSSEN, WELCHE VON EINANDER NICHT UNABHÄNGIG SIND.

36. Im vorhergehenden Abschnitte haben wir die Aufgabe, aus gegebenen Gleichungen:

$$M_1 = f_1(x, y, z, \ldots), \quad M_2 = f_2(x, y, z, \ldots), \text{ u. s. w.}, \tag{a}$$

in welchen M_1, M_2, etc. die beobachteten Functionswerthe bedeuten, die wahrscheinlichsten Werthe der Unbekannten x, y, z, etc. zu finden, unter der Voraussetzung aufgelöst, dass die Unbekannten von einander völlig unabhängig seien.

Es kann aber der Fall eintreten, dass zwischen diesen Grössen gewisse theoretische Beziehungen existiren, die man immer durch Gleichungen:

$$\varphi_1(x, y, z, \ldots) = 0, \quad \varphi_2(x, y, z, \ldots) = 0, \quad \varphi_3(x, y, z, \ldots = 0) \qquad (b)$$

ausgedrückt denken kann, welchen demnach die gesuchten Werthe der Unbekannten jedenfalls Genüge leisten müssen. Die Anzahl dieser Bedingungsgleichungen muss offenbar kleiner sein, als jene der Unbekannten, weil letztere, im Falle einer gleichen Anzahl, schon durch die Bedingungsgleichungen selbst bestimmt wären, ohne dass es hiezu einer Beobachtung bedürfte. Die Aufgabe besteht dann offenbar darin, die Unbekannten so zu bestimmen, dass sie 1) den Bedingungsgleichungen (b) strenge, und 2) den Gleichungen (a) möglichst nahe Genüge leisten.

Zur Auflösung dieser Aufgabe bietet sich zunächst folgender Weg dar. Es sei m die Anzahl der Unbekannten, μ die Anzahl der Bedingungsgleichungen (b), wo $\mu < m$, so kann man mit Hilfe der letzteren μ Unbekannte durch die übrigen, $m - \mu$ an der Zahl, ausdrücken und aus den Gleichungen (a) eliminiren; letztere enthalten dann nur mehr $m - \mu$ Unbekannte, welche nunmehr als von einander unabhängig zu betrachten sind, und deren wahrscheinlichste Werthe daher nach der im vorhergehenden Abschnitte vorgetragenen Methode bestimmt werden können; durch Substitution derselben in die Bedingungsgleichungen ergeben sich dann auch die Werthe jener μ Unbekannten, welche früher eliminirt wurden.

Nehmen wir, um das Verfahren an einem einfachen Beispiele zu erläutern, an, es seien die Winkel zwischen den um einen Punkt A im Horizont liegenden Objecten 1, 2, 3, 4 gemessen worden, und man habe erhalten:

$$\begin{array}{rl} 1.2 = \;\; 75^0\ 28'\ 26''.37, & \text{Gewicht} = 2 \\ 2.3 = 112\ \ 15\ \ 54\ .03, & \quad\text{„} \quad = 4 \\ 3.4 = 101\ \ 42\ \ 13\ .94, & \quad\text{„} \quad = 4 \\ 4.1 = \;\; 70\ \ 33\ \ 28\ .15, & \quad\text{„} \quad = 1. \end{array}$$

Wir haben hier vier Unbekannte, welche der Bedingung unterworfen sind, dass ihre Summe $= 360^0$ sein muss. Nehmen wir zur Vereinfachung der Rechnung genäherte Werthe an, und setzen, mit x, y, z, w die gesuchten wahrscheinlichsten Correctionen der genäherten Werthe bezeichnend:

$$\begin{array}{rl} 1.2 = & 75^0\ 28'\ 26'' + x \\ 2.3 = & 112\ \ 15\ \ 54\ + y \\ 3.4 = & 101\ \ 42\ \ 14\ + z \\ 4.1 = & 70\ \ 33\ \ 28\ + w \\ \hline \text{Summe} = 360^0 = & 360\ \ 0\ \ 2\ + x + y + z + w, \end{array}$$

so haben wir die Bedingungsgleichung:

$$x + y + z + w + 2'' = 0,$$

und erhalten durch Vergleichung der angenommenen Werthe mit den beobachteten folgende den obigen (a) entsprechende Gleichungen:

$$x - 0''.37 = 0$$
$$y - 0\ .03 = 0$$
$$z + 0\ .06 = 0$$
$$w - 0\ .15 = 0.$$

Mit Hilfe der Bedingungsgleichung eliminiren wir nun eine Unbekannte, etwa $w = -2 - x - y - z$, wodurch sich zwischen den drei übrigen unabhängigen Unbekannten folgende 4 Gleichungen ergeben:

$$\begin{array}{llr} x \qquad\qquad - 0.37 = 0, & \text{Gewicht} & = 2 \\ \qquad y \qquad - 0.03 = 0, & \quad " & = 4 \\ \qquad\qquad z + 0.06 = 0, & \quad " & = 4 \\ -x - y - z - 2.15 = 0, & \quad " & = 1. \end{array}$$

Hieraus folgen die Normal-Gleichungen:

$$3x + y + z + 1.41 = 0,$$
$$x + 5y + z + 2.03 = 0,$$
$$x + y + 5z + 2.39 = 0,$$

und aus diesen die wahrscheinlichsten Werthe:

$$x = -0''.253, \quad y = -0''.281, \quad z = -0''.371,$$

mit welchen die Bedingungsgleichung den Werth $w = -1''.095$ liefert. Die wahrscheinlichsten Werthe der vier Winkel sind also:

$$\begin{array}{rrrr} 1.2 = & 75^0 & 28' & 25''.747 \\ 2.3 = & 112 & 15 & 53\ .719 \\ 3.4 = & 101 & 42 & 13\ .629 \\ 4.1 = & 70 & 33 & 26\ .905 \\ \hline \text{Summe} = & 360 & 0 & 0\ .000 \end{array}$$

37. Wir haben oben die Aufgabe in ihrer allgemeinsten Form betrachtet, dass die Unbekannten $x, y, z, \ldots$ nicht unmittelbar beobachtet, sondern zu deren Bestimmung die Glgn. (a) gegeben seien, wo die Functionswerthe M die unmittelbar beobachteten Grössen sind. In dieser allgemeinen Fassung hat aber die Aufgabe bisher keine Anwendung gefunden; bei den Anwendungen in der Geodäsie, bisher den einzigen, sind die Werthe der Grössen $x, y, z, \ldots$ immer unmittelbar durch Beobachtungen gegeben, in Folge dessen jede der Glgn. (a) nur eine dieser Grössen enthält, oder von der Form: $x = M_1$, $y = M_2$, u. s. w. ist. Das im vorhergehenden §. gegebene Beispiel ist, wie man sieht, von dieser Art.

Die beobachteten Werthe der Unbekannten werden nun, weil mit unvermeidlichen Fehlern behaftet, den zwischen denselben bestehenden Bedingungsgleichungen nicht Genüge leisten, und müssen demnach Verbesserungen erhalten, welche so beschaffen sind, dass die verbesserten Werthe die Bedingungsgleichungen strenge erfüllen. Dies kann aber immer auf unendlich vielfache Art geschehen und es wird daher darauf ankommen, unter allen möglichen Systemen von Verbesserungen das wahrscheinlichste zu finden. Offenbar sind die gesuchten

Verbesserungen, mit entgegengesetzten Zeichen genommen, als die Fehler der Beobachtungen zu betrachten, und es kann daher die Aufgabe folgendermassen ausgesprochen werden. Es sind die beobachteten Werthe der Unbekannten so zu verbessern, dass 1) die verbesserten Werthe den Bedingungsgleichungen strenge Genüge leisten, und 2) die Summe der Quadrate der Verbesserungen, multiplicirt in ihre respectiven Gewichte, ein Minimum werde.

38. Die im §. 36 vorgetragene und durch ein einfaches Beispiel erläuterte Auflösung der Aufgabe wird, in Folge der auszuführenden Eliminationen, weitläufig, wenn die Anzahl der Unbekannten und Bedingungsgleichungen beträchtlich ist; man bedient sich daher in der Praxis gewöhnlich des folgenden bequemeren Verfahrens.

Es seien $w_1, w_2, w_3, \ldots, w_m$ die wahren Werthe der Unbekannten, m an der Zahl; aus Beobachtungen habe man dafür die Werthe $o_1, o_2, o_3, \ldots, o_m$ mit den Gewichten $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_m$ erhalten; die zwischen diesen Grössen gegebenen Bedingungsgleichungen, μ an der Zahl (wo $\mu < m$), seien:

$$\begin{aligned} \varphi_1(w_1, w_2, \ldots, w_m) &= 0, \\ \varphi_2(w_1, w_2, \ldots, w_m) &= 0, \\ &\vdots \\ \varphi_\mu(w_1, w_2, \ldots, w_m) &= 0. \end{aligned} \tag{95}$$

Seien ferner $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m$ die noch unbekannten wahrscheinlichsten Verbesserungen, welche den beobachteten Werthen o hinzugefügt werden müssen, damit sie den Bedingungsgleichungen (95) Genüge leisten, so haben wir:

$$w_1 = o_1 + x_1, \quad w_2 = o_2 + x_2, \quad w_3 = o_3 + x_3, \ldots$$

zu setzen. Substituiren wir diese Werthe in die Bedingungsgleichungen (95), so erhalten diese die Form:

$$\begin{aligned} a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + \ldots + a_m x_m + n_1 &= 0, \\ b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + \ldots + b_m x_m + n_2 &= 0, \\ &\vdots \\ g_1 x_1 + g_2 x_2 + g_3 x_3 + \ldots + g_m x_m + n_m &= 0, \end{aligned} \tag{96}$$

in welchen die $a, b, \ldots, g, n$ bekannte Zahlen sind*).

---

*) Sind die Bedingungsgleichungen (95) schon von linearer Form, so gehen sie durch einfache Substitution der Werthe $w_1 = o_1 + x_1$, $w_2 = o_2 + x_2$, u. s. w. in die Glgn. (96) über. Im andern Falle wird man wieder das in §. 22 befolgte Verfahren in Anwendung bringen. Durch die erwähnte Substitution verwandelt sich z. B. die 1te der Glgn. (95) in

$$\varphi_1(o_1 + x_1, o_2 + x_2, o_3 + x_3, \ldots) = 0;$$

da nun die gesuchten Correctionen x_1, x_2, u. s. w. immer so klein sein werden, dass man ihre Quadrate vernachlässigen kann, so hat man vermöge des Taylor'schen Satzes:

$$\varphi_1(o_1, o_2, o_3, \ldots) + \frac{d\varphi_1}{dw_1} x_1 + \frac{d\varphi_1}{dw_2} x_2 + \frac{d\varphi_1}{dw_3} x_3 + \ldots = 0,$$

Die Verbesserungen x_1, x_2, u. s. w. sind nun so zu bestimmen, dass sie den Bedingungsgleichungen (96) strenge Genüge leisten, und dass die Summe:

$$S = p_1 x_1^2 + p_2 x_2^2 + p_3 x_3^2 + \ldots + p_m x_m^2$$

ein Minimum werde. Die Bedingung des Minimums ist bekanntlich: $dS = 0$, d. i.

$$p_1 x_1 dx_1 + p_2 x_2 dx_2 + p_3 x_3 dx_3 + \ldots + p_m x_m dx_m = 0. \tag{97}$$

Wären nun die Grössen x_1, x_2, u. s. w. also auch deren Differenzialien dx_1, $dx_2, \ldots$ von einander unabhängig, so würde zufolge der letzten Gleichung der Coefficient eines jeden Differenzials gleich Null zu setzen sein, woraus $x_1 = x_2 = \ldots = 0$ folgen würde, d. h. es würden die unmittelbar beobachteten Werthe o_1, o_2, etc. auch die wahrscheinlichsten sein. In Folge der zwischen diesen Grössen bestehenden Bedingungsgleichungen (96) müssen aber gleichzeitig mit (97) auch noch die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} a_1 dx_1 + a_2 dx_2 + a_3 dx_3 + \ldots + a_m dx_m &= 0, \\ b_1 dx_1 + b_2 dx_2 + b_3 dx_3 + \ldots + b_m dx_m &= 0, \\ &\vdots \\ g_1 dx_1 + g_2 dx_2 + g_3 dx_3 + \ldots + g_m dx_m &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{98}$$

bestehen, welche durch Differenziation der Glgn. (96) sich ergeben. Eliminiren wir daher mittelst dieser Glgn. (98) μ Differenzialien aus Gl. (97), so werden die übrigbleibenden von einander unabhängig, und ihre Coefficienten gleich Null zu setzen sein.

Diese Elimination bewerkstelligen wir nun mit Hilfe unbestimmter Multiplicatoren. Multipliciren wir die Glgn. (98) der Reihe nach mit den noch unbestimmten Factoren K_1, $K_2, \ldots K_\mu$, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} K_1 a_1 dx_1 + K_1 a_2 dx_2 + K_1 a_3 dx_3 + \ldots + K_1 a_m dx_m &= 0, \\ K_2 b_1 dx_1 + K_2 b_2 dx_2 + K_2 b_3 dx_3 + \ldots + K_2 b_m dx_m &= 0, \\ &\vdots \\ K_\mu g_1 dx_1 + K_\mu g_2 dx_2 + K_\mu g_3 dx_3 + \ldots + K_\mu g_m dx_m &= 0. \end{aligned}$$

Addiren wir diese Gleichungen zur Gl. (97), und ordnen die Summe nach den Differenzialien, so sind die Coefficienten jener Differenzialien, μ an der Zahl, $= 0$ zu setzen, welche wir eliminiren wollen, wodurch sich die nöthigen μ Gleichungen zur Bestimmung der μ Factoren k ergeben; die übrigbleibenden Differenzialien werden hiedurch von einander unabhängig, und es sind daher zur Erfüllung der Bedingung des Minimums deren Coefficienten gleichfalls gleich 0 zu setzen, was offenbar darauf hinauskommt, in der besagten Summe

---

somit, wenn man die bekannten Grössen:

$$\varphi_1(o_1, o_2, o_3, \ldots) = n_1, \quad \frac{d\varphi_1}{dw_1} = a_1, \quad \frac{d\varphi_1}{dw_2} = a_2, \quad \frac{d\varphi_1}{dw_3} = a_3, \text{ u. s. w.,}$$

setzt:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + \ldots + n_1 = 0.$$

In gleicher Weise wird jede nicht lineare Bedingungsgleichung behandelt.

die Coefficienten sämmtlicher Differenzialien der Nulle gleich zu setzen. Hiedurch ergeben sich nun folgende Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} p_1 x_1 + K_1 a_1 + K_2 b_1 + K_3 c_1 + \ldots + K_\mu g_1 &= 0, \\ p_2 x_2 + K_1 a_2 + K_2 b_2 + K_3 c_2 + \ldots + K_\mu g_2 &= 0, \\ p_3 x_3 + K_1 a_3 + K_2 b_3 + K_3 c_3 + \ldots + K_\mu g_3 &= 0, \\ &\vdots \\ p_m x_m + K_1 a_m + K_2 b_m + K_3 c_m + \ldots + K_\mu g_m &= 0. \end{aligned}\right\} \quad (99)$$

Die Anzahl dieser Gleichungen ist nothwendig gleich jener der unbekannten Correctionen x_1, x_2, etc., deren nur e i n e in jeder Gleichung erscheint, und welche daher leicht aus diesen Gleichungen erhalten werden, sobald die Werthe der Factoren K_1, K_2, u. s. w., welche nach G a u s s den Namen C o r r e l a t e n d e r B e d i n g u n g s g l e i c h u n g e n führen, bekannt geworden sind.

Die zur Bestimmung der Correlaten erforderlichen Gleichungen ergeben sich aber auf folgende Art. Multiplicirt man die Glgn. (99) der Reihe nach mit $\frac{a_1}{p_1}$, $\frac{a_2}{p_2}$, $\frac{a_3}{p_3}$, u. s. w. und addirt die Producte, so erhält man mit Rücksicht auf die 1te der Glgn. (96):

$$\left[\frac{aa}{p}\right] K_1 + \left[\frac{ab}{p}\right] K_2 + \left[\frac{ac}{p}\right] K_3 + \ldots + \left[\frac{ag}{p}\right] K_\mu = n_1\,;$$

wiederholt man diese Operation, indem man zunächst die Glgn. (99) mit $\frac{b_1}{p_1}$, $\frac{b_2}{p_2}$, ...; dann mit $\frac{c_1}{p_1}$, $\frac{c_2}{p_2}$, ..., u. s. w., endlich mit $\frac{g_1}{p_1}$, $\frac{g_2}{p_2}$, ..., multiplicirt, so erhält man nothwendig μ solcher Gleichungen, deren vollständiges System somit sein wird:

$$\left.\begin{aligned} \left[\frac{aa}{p}\right] K_1 + \left[\frac{ab}{p}\right] K_2 + \left[\frac{ac}{p}\right] K_3 + \ldots + \left[\frac{ag}{p}\right] K_\mu &= n_1, \\ \left[\frac{ab}{p}\right] K_1 + \left[\frac{bb}{p}\right] K_2 + \left[\frac{bc}{p}\right] K_3 + \ldots + \left[\frac{bg}{p}\right] K_\mu &= n_2, \\ \left[\frac{ac}{p}\right] K_1 + \left[\frac{bc}{p}\right] K_2 + \left[\frac{cc}{p}\right] K_3 + \ldots + \left[\frac{cg}{p}\right] K_\mu &= n_3, \\ &\vdots \\ \left[\frac{ag}{p}\right] K_1 + \left[\frac{bg}{p}\right] K_2 + \left[\frac{cg}{p}\right] K_3 + \ldots + \left[\frac{gg}{p}\right] K_\mu &= n_\mu. \end{aligned}\right\} \quad (100)$$

Aus diesen Gleichungen, welche hier wieder N o r m a l - G l e i c h u n g e n genannt werden, erhält man die Werthe der μ Correlaten, und endlich durch Substitution derselben in die Glgn. (99) die wahrscheinlichsten Werthe der Correctionen x_1, x_2, u. s. w.

Wenden wir dieses Verfahren auf das in §. 36 berechnete Beispiel an, so sind uns als beobachtete Grössen gegeben:

$$\begin{aligned}1.2 &= o_1 = 75^0\,28'\,26''.37, \quad p_1 = 2,\\ 2.3 &= o_2 = 112\ \ 15\ \ 54\ .03, \quad p_2 = 4,\\ 3.4 &= o_3 = 101\ \ 42\ \ 13\ .94, \quad p_3 = 4,\\ 4.1 &= o_4 = 70\ \ 33\ \ 28\ .15, \quad p_4 = 1,\end{aligned}$$

mit der Bedingung:

$$w_1 + w_2 + w_3 + w_4 - 360^0 = 0.$$

Durch die Substitution: $w_1 = o_1 + x_1$, $w_2 = o_2 + x_2$, etc. verwandelt sich diese Gleichung in:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 2''.49 = 0.$$

Da nur eine Bedingungsgleichung, also auch nur eine Correlate K_1 vorhanden, und $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 1$ ist, so werden die Glgn. (99):

$$\begin{aligned}2\,x_1 + K_1 &= 0,\\ 4\,x_2 + K_1 &= 0,\\ 4\,x_3 + K_1 &= 0,\\ x_4 + K_1 &= 0.\end{aligned}$$

Aus gleichem Grunde haben wir nur die eine Normal-Gleichung: $\left[\frac{aa}{p}\right] K_1 = n_1$, also, da $\left[\frac{aa}{p}\right] = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{1} = 2$ ist:

$$\begin{aligned}2\,K_1 &= 2''.49,\\ K_1 &= 1''.245;\end{aligned}$$

hiemit geben die vorhergehenden Gleichungen:

$$x_1 = -0''.623, \quad x_2 = -0''.311, \quad x_3 = -0''.311, \quad x_4 = -1''.245,$$

und die wahrscheinlichsten Werthe sind somit:

$$\begin{aligned}1.2 &= o_1 + x_1 = 75^0\,28'\,25''.747\\ 2.3 &= o_2 + x_2 = 112\ \ 15\ \ 53\ .719\\ 3.4 &= o_3 + x_3 = 101\ \ 42\ \ 13\ .629\\ 4.1 &= o_4 + x_4 = 70\ \ 33\ \ 26\ .905,\\ &\qquad\qquad\ \ \overline{360\ \ \ 0\ \ \ 0\ .000}\end{aligned}$$

übereinstimmend mit dem in §. 36 erhaltenen Resultate.

Weitere Ausführungen dieser Aufgabe bleiben dem geodätischen Theile dieses Buches vorbehalten.