

## VIERTER ABSCHNITT.

# MATHEMATISCHE TAFELN.

§. 380.

### Kurven-, Flächen- und Körpertafeln.

Die folgenden Tafeln enthalten in übersichtlicher Zusammenstellung die für den Maschinenbauer wichtigsten geometrischen und mechanischen Eigenschaften einer Reihe von gebräuchlichen Kurven, der von ihnen begrenzten Flächen und einfachen Körper. Die den Figuren beige-schriebenen Bezeichnungen erklären die Buchstaben der Formeln. Zu bemerken möchte indessen folgendes sein.

Bei der Streckung (Rektifikation) der Kurven ist  $s$  die Länge des Kurvenstückes vom Anfang bis zum Punkte  $xy$ , beziehentlich  $\varphi$ ,  $S$  die ganze Länge der Kurve.

Bei den Trägheitsmomenten wurde die Massendichtigkeit = 1 gesetzt, um nutzlose Häufung der Buchstaben zu vermeiden. Um eine grössere Uebersichtlichkeit der Sätze aus der so wichtigen Trägheitsmomentenlehre zu ermöglichen, wurden einige vereinfachende Anschauungen durchgeführt. Die angegebenen Trägheitsmomente der Flächen zerfallen in äquatoriale und polare, jenachdem die Momenten-Achse gelegen ist. Diese heisst nämlich eine äquatoriale Achse, wenn sie in der Ebene der Fläche gelegen ist, und eine polare, wenn sie zu derselben senkrecht steht. Jede äquatoriale Achse, welche durch den Schwerpunkt der Fläche geht, heisst insbesondere eine Aequatorachse, während die durch den Schwerpunkt gehende polare Achse insbesondere Polachse heisst. Eine Fläche hat nur eine Polachse, dagegen unendlich viele Aequatorachsen. Entsprechend ihren Achsen sind nun die Trägheitsmomente in äquatoriale und polare getheilt.

Man findet das Trägheitsmoment  $J_p$  einer Fläche zu irgend einer polaren Achse durch Addition der beiden äquatorialen Trägheitsmomente  $J_{q1}$  und  $J_{q2}$ , deren Achsen sich in der polaren Achse rechtwinklig schneiden:

$$J_p = J_{q1} + J_{q2} \dots \dots \dots (416)$$

Ferner findet sich das Trägheitsmoment  $J'$  einer Fläche zu irgend einer Achse, welche vom Schwerpunkt  $S$  der Fläche um  $a$  absteht, aus dem Trägheitsmoment  $J$  zu der parallelen durch  $S$  gehenden Achse mittelst des Ausdruckes:

$$J' = J + a^2 F \dots \dots \dots (417)$$

wenn  $F$  noch den Inhalt der Fläche bezeichnet. Dieser Satz gilt auch für Körper, wenn man statt  $F$  die Masse des Körpers einführt.

Bei den Körpern wurde eine der vorstehenden ganz entsprechende Eintheilung eingehalten. In jedem der behandelten Körpergebilde ist eine der Hauptachsen, welche durch die Schwerpunkte aller zu ihr normalen Querschnitte geht, als Polachse, und der darauf rechtwinklige Schnitt durch den Schwerpunkt als Aequatorschnitt aufgefasst, wonach sich die äquatorialen und polaren Trägheitsmomente wieder je nach der Lage ihrer Achsen zum Aequatorschnitt unterscheiden. In allen hier angegebenen Beispielen für die Körper sind die Achsen stets wirkliche Aequator- und Polachsen.

Für ein gerades Prisma mit beliebiger Grundfläche, deren polares Trägheitsmoment  $i_p$  und dessen halbe Höhe =  $l$  ist, ist das polare Trägheitsmoment:

$$J_p = 2li_p \dots \dots \dots (418)$$

und das Trägheitsmoment zu einer Aequatorachse:

$$J_q = \frac{2}{3}fl^3 + 2li_q \dots \dots \dots (419)$$

wenn noch  $f$  den Flächeninhalt des Querschnittes, und  $i_q$  dessen äquatoriales Trägheitsmoment zu derselben Achse bezeichnet, für welche  $J_q$  gilt.

Die Schwerpunkte und Trägheitsmomente zu Flächen von unregelmässigen Formen lassen sich mit Hülfe der Graphostatik in vielen Fällen bequem und recht genau (numerisch) finden. Das Verfahren ist aus den im zweiten Abschnitt behandelten Aufgaben ableitbar, und besteht in einer wiederholten Anwendung des Kräfte- und Seilpolygones.

| Nro.            | Kurve | Parallelgleichung  | Verschiedene Eigenschaften   |
|-----------------|-------|--|--|
| I. Kreis.       |       | Allgemein (aus O):<br>$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$<br>Scheitelgleichung (aus S):<br>$y^2 = 2rx - x^2$<br>Mittelpunktsgleichung (aus M):<br>$x^2 + y^2 = r^2$                        | Annähernd, wenn $\frac{x}{y}$ klein:<br>$\frac{r}{y} = \frac{y}{2x}$   |
| II. Parabel.    |       | Scheitelgleichung (aus S):<br>$y^2 = 2px$  | Halbparameter = p<br>$AS = SF = \frac{p}{2}$<br>LL Leitlinie.<br>F Brennpunkt.   |
| III. Ellipse.   |       | Mittelpunktsgleichung (aus M):<br>$y^2 a^2 + x^2 b^2 = a^2 b^2$<br>Scheitelgleichung (aus S):<br>$y^2 = \left(\frac{b}{a}\right)^2 (2ax - x^2)$<br>$y^2 = 2px - \frac{p}{a} x^2$ | Excentricität:<br>lineare = e<br>$= \sqrt{a^2 - b^2}$<br>numerische $\epsilon = \frac{e}{a}$<br>Halbparameter:<br>$p = a(1 - \epsilon^2) = \frac{b^2}{a}$  |
| IV. Hyperbel.   |       | Mittelpunktsgleichung (aus O):<br>$-y^2 a^2 + x^2 b^2 = a^2 b^2$   | Excentricität:<br>lineare = OF = e<br>$= \sqrt{a^2 + b^2}$<br>numerische $\epsilon = \frac{e}{a}$<br>Achse $b = a\sqrt{\epsilon^2 - 1}$<br>Halbparameter:<br>$p = a(\epsilon^2 - 1) = \frac{b^2}{a}$ |
| V. Kettenlinie. |       | Aus O:<br>$y = \frac{c}{2} \left( e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}} \right)$  | $\text{tg } \varphi = \frac{l}{c} \sqrt{\frac{h^2 + 2hc}{c^2}}$<br>LL Leitlinie.   |

| Polargleichung   | Krümmungshalbmesser   | Streckung (Rektifikation)  |
|--|---|--|
| Allgemein (aus O):<br>$e^2 + f^2 - 2ef \cos \varphi = r^2$<br>Aus dem Scheitel S:<br>$e = 2r \cos \varphi$   | $e = r$   | $s = r \varphi$<br>$S = 2r \pi$  |
| Aus F:<br>$r = \frac{p}{2} + x$<br>$r = \frac{p}{2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}$  | $e = p \sqrt{\left(1 + \frac{2x}{p}\right)^3}$  | $s = \frac{p}{2} \left[ \sqrt{\frac{2x}{p} \left(1 + \frac{2x}{p}\right)} + \log \text{nat} \left( \sqrt{\frac{2x}{p} + 1} + \sqrt{1 + \frac{2x}{p}} \right) \right]$<br>Annähernd bei kleinem $\frac{x}{y}$ :<br>$s = y \left[ 1 + \frac{2}{3} \left(\frac{x}{y}\right)^2 - \frac{2}{5} \left(\frac{x}{y}\right)^4 \right]$ |
| Aus F:<br>$r = p + \epsilon x = \frac{a^2 - e^2}{a - e \cos \varphi}$<br>$= \frac{p}{1 - \epsilon \cos \varphi}$<br>Fahrstrahlen:<br>$r = a + \epsilon x, r' = a - \epsilon x$ | $e = \frac{(r r_1)^{3/2}}{a b}$<br>Für S ist: $e = \frac{b^2}{a}$<br>für A: $e = \frac{a^2}{b}$ | $S = \pi (a+b) \left( 1 + \frac{n^2}{4} + \frac{n^4}{64} + \frac{n^6}{256} + \dots \right)$<br>wobei $n = \frac{a-b}{a+b}$   |
| Aus F:<br>$r = p + \epsilon x = \frac{e^2 - a^2}{a - e \cos \varphi}$<br>$= \frac{p}{1 - \epsilon \cos \varphi}$<br>Fahrstrahlen:<br>$r = \epsilon x - a, r' = \epsilon x + a$ | $e = \frac{(a^4 y^2 + b^4 x^2)^{3/2}}{a^4 b^4}$   | Sehr verwickelt.   |
|  | $e = \frac{y^2}{c}$   | $s = \frac{c}{2} \left( e^{\frac{x}{c}} - e^{-\frac{x}{c}} \right)$<br>$= \sqrt{y^2 - c^2}, l = \sqrt{h^2 + 2hc}$  |



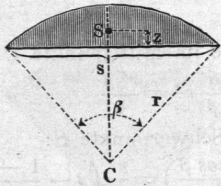
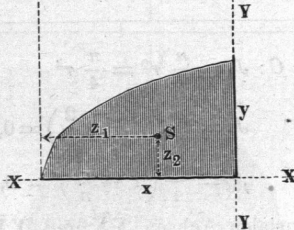
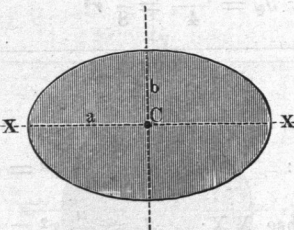
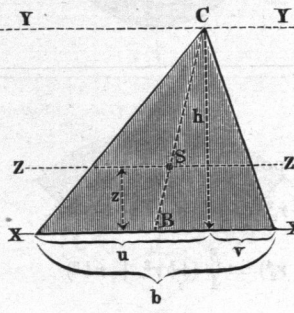
| Nro.                                | Kurve | Gleichung   |
|-------------------------------------|-------|---|
| VI. Orthocykloide oder Radlinie.    |       | $x = r \left( \omega - \frac{r'}{r} \sin \omega \right)$ $y = r \left( 1 - \frac{r'}{r} \cos \omega \right)$                              |
| VII. Epicycloide od. Aufradlinie.   |       | $x = (R + r) \cos \frac{r}{R} \omega - r' \cos \frac{R+r}{R} \omega$ $y = (R + r) \sin \frac{r}{R} \omega - r' \sin \frac{R+r}{R} \omega$ |
| VIII. Hypocykloide oder Inradlinie. |       | $x = (R - r) \cos \frac{r}{R} \omega + r' \cos \frac{R-r}{R} \omega$ $y = (R - r) \sin \frac{r}{R} \omega - r' \sin \frac{R-r}{R} \omega$ |
| IX. Pericycloide od. Umradlinie.    |       | $x = (r - R) \cos \frac{r}{R} \omega - r' \cos \frac{r-R}{R} \omega$ $y = (r - R) \sin \frac{r}{R} \omega - r' \sin \frac{r-R}{R} \omega$ |
| X. Kreis-evolvente oder Fadellinie. |       | $x = R' \cos \vartheta + R \vartheta \sin \vartheta$ $y = R' \sin \vartheta - R \vartheta \cos \vartheta$                                 |
| XI. Archimedische Spirale.          |       | $r = R \omega$  |
| XII. Logarithmische Spirale.        |       | $r = a^\omega$  |

| Streckung (Rektifikation)   | Krümmungshalbmesser   | Bemerkungen  |
|---|---|--|
| $s = 4r \left( 1 - \cos \frac{\omega}{2} \right)$ $S = 8r$                                      | $\rho = 4r \sin \frac{\omega}{2}$   | <p><math>r'</math> ist der Halbmesser zum beschreibenden Punkt. Wenn <math>r' = r</math> ist, wie hier bei den Streckungs- und Krümmungsformeln angenommen ist, gelten die Gleichungen für die gemeine Orthocykloide, Epicykloide, Hypocykloide, Pericykloide. Ähnlich ist bei den Kreisevolventengleichungen <math>R'</math> die Entfernung des beschreibenden Punktes vom Mittelpunkt <math>O</math> des ruhenden Kreises bei <math>\vartheta = 0</math>; ist <math>R' = R</math>, so ist die Kurve die gemeine Kreisevolvente.</p> <p>Länge der gemeinen Kar-dioide<br/> <math>S = 8.2R = 2,546 (2R\pi)</math><br/>                     oder angenähert<br/> <math>0,81\pi (2R\pi)</math></p> |
| $s = 4r \frac{R+r}{R} \left( 1 - \cos \frac{\omega}{2} \right)$ $S = 8r \frac{R+r}{R}$          | $\rho = 4r \frac{R+r}{R+2r} \sin \frac{\omega}{2}$  |  |
| $s = 4r \frac{R-r}{R} \left( 1 - \cos \frac{\omega}{2} \right)$ $S = 8r \frac{R-r}{R}$          | $\rho = 4r \frac{R-r}{R-2r} \sin \frac{\omega}{2}$  |  |
| $s = 4r \frac{r-R}{R} \left( 1 - \cos \frac{\omega}{2} \right)$ $S = 8r \frac{r-R}{R}$          | $\rho = 4r \frac{r-R}{2r-R} \sin \frac{\omega}{2}$  |  |
| $s = \frac{R\vartheta}{2} \vartheta$  | $\rho = R\vartheta$   | <p><math>s</math> bei 1 Runde <math>\pi (2R\pi)</math><br/> <math>s</math> " 2 Runden <math>4\pi (2R\pi)</math><br/> <math>s</math> " 3 " <math>9\pi (2R\pi)</math><br/> <math>s</math> " " <math>n^2\pi (2R\pi)</math></p>  |
| $s = \frac{R}{2} [\omega \sqrt{1 + \omega^2} + \log \text{nat} (\omega + \sqrt{1 + \omega^2})]$ | $\rho = \frac{(r^2 + a^2)^{3/2}}{2(r^2 + 2a^2)}$  | <p>Die arch. Spirale ist die um <math>R</math> verlängerte Kreisevolvente.<br/> <math>s</math> bei 1 Runde <math>1,08\pi (2R\pi)</math><br/> <math>s</math> " 2 Runden <math>4,09\pi (2R\pi)</math><br/> <math>s</math> " " <math>\sim n^2\pi (2R\pi)</math></p>   |
| $s = r \frac{\sqrt{1 + (\log \text{nat} a)^2}}{\log \text{nat} a}$                              | $\rho = r \sqrt{1 + (\log \text{nat} a)^2} = \frac{r}{\sin \alpha}$<br>wobei $\cotg \alpha = \log \text{nat} a$ | <p>Bei der logarithmischen Spirale schliesst die Tangente an einen Punkt <math>P</math> mit <math>OP</math> den Winkel <math>\alpha</math> ein, wofür gilt:<br/> <math>\cotg \alpha = \log \text{nat} a</math></p>   |

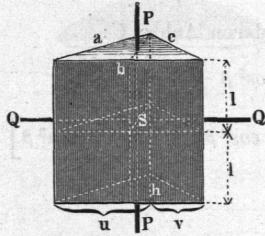
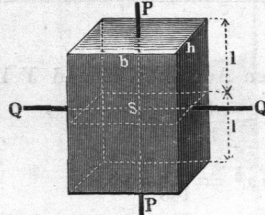
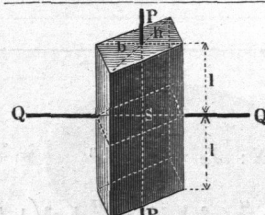
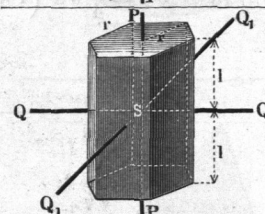
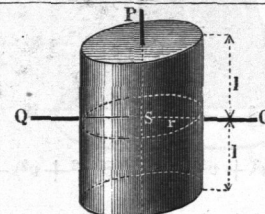


| Nro.                  | Form | Flächeninhalt  |
|-----------------------|------|--|
| XIII. Kreisabschnitt. |      | $F = r^2 \frac{\beta}{2}$                              |
| XIV. Halbkreis.       |      | $F = \frac{r^2 \pi}{2}$                                |
| XV. Kreis.            |      | $F = r^2 \pi$  |
| XVI. Kreisringstück.  |      | $F = (r_1^2 - r_2^2) \frac{\beta}{2}$<br>$= b r \beta$ |

| Schwerpunktlage  | Trägheitsmomente  |
|--|---|
| $z = \frac{4}{3} r \frac{\sin \frac{\beta}{2}}{\beta}$ $= \frac{s r^2}{3 F}$   | <p>Zur polaren Achse im Mittelpunkte C:</p> $J_c = \frac{\mu}{\beta} r^2 = \frac{r^4 \beta}{4}$ <p>Zur Polachse im Schwerpunkte S:</p> $J_s = \frac{\mu}{2} r^2 \left(1 - \frac{1 - \cos \beta}{\beta^2}\right) = \frac{r^4}{4} \left(\beta - \frac{1 - \cos \beta}{\beta}\right)$  |
| $z = \frac{4}{3\pi} r$   | <p>Zur polaren Achse C: <math>J_c = \frac{\mu}{2} r^2 = \frac{\pi}{4} r^4</math></p> <p>Zur Polachse S: <math>J_s = \frac{\mu}{2} r^2 \left(1 - \frac{2}{\pi^2}\right) = 0,398 \mu r^2</math></p> $= \frac{r^4}{4} \left(\pi - \frac{2}{\pi}\right) = 0,726 r^4$ <p>Zu den äquatorialen Achsen XX' und YY':</p> $J_x = J_y = \frac{\mu r^2}{4} = \frac{\pi}{8} r^4$ |
| $z = 0$  | <p>Zur Polachse C: <math>J_c = \frac{\mu}{2} r^2 = \frac{\pi}{2} r^4</math></p> <p>Zur Aequatorachse XX': <math>J_x = \frac{\mu}{4} r^2 = \frac{\pi}{4} r^4</math></p>  |
| $z = \frac{4}{3} \frac{\sin \frac{\beta}{2}}{\beta} \frac{r_1^3 - r_2^3}{r_1^2 - r_2^2}$ $= \frac{\sin \frac{\beta}{2}}{\beta} r \left(2 + \frac{1}{6} \frac{b^2}{r^2}\right)$ | <p>Zur polaren Achse C:</p> $J_c = \frac{\mu}{2} (r_1^2 + r_2^2) = \mu \left(r^2 + \frac{b^2}{4}\right)$ $= \frac{\beta}{4} (r_1^4 - r_2^4) = \frac{\beta}{4} (4 b r^3 + r b^3)$  |

| Nro.                  | Form  | Flächeninhalt                            |
|-----------------------|---|--|
| XVII. Kreisabschnitt. |    | $F = \frac{r^2}{2} (\beta - \sin \beta)$ |
| XVIII. Parabel.       |    | $F = \frac{2}{3} x y$                    |
| XIX. Ellipse.         |   | $F = a b \pi$                            |
| XX. Dreieck.          |  | $F = \frac{b h}{2}$                      |

| Schwerpunktlage  | Trägheitsmomente  |
|--|---|
| $z = \frac{s^3}{12 F}$ $= \frac{4}{3} r \frac{\sin^3 \frac{\beta}{2}}{\beta - \sin \beta}$ | <p>Zur polaren Achse C:</p> $J_c = \frac{r^4 \beta}{4} - \frac{1}{4} \left[ s r^3 \cos^3 \beta + \frac{r s^3 \cos \beta}{12} \right]$ $= \frac{r^4}{4} \left[ \beta - 2 \sin \beta \cos^3 \beta - \frac{2}{3} \cos \beta \sin^3 \beta \right]$  |
| $z_1 = \frac{3}{5} x$ $z_2 = \frac{3}{8} y$  | <p>Zu den äquatorialen Achsen XX und YY:</p> $J_x = \mu \frac{y^2}{5} = \frac{8}{15} x y^3$ $J_y = \frac{8}{35} \mu x^2 = \frac{32}{105} y x^3$   |
| $z = 0$  | <p>Zur Äquatorachse XX: <math>J_x = \frac{\pi}{4} a b^3</math></p> <p>Zur Polachse C: <math>J_c = \frac{\mu}{4} (a^2 + b^2) = \frac{\pi}{4} b a^3 \left( 1 + \frac{b^2}{a^2} \right)</math></p>   |
| $z = \frac{h}{3}$  | $J_x = \mu \frac{h^2}{6} = \frac{b h^3}{12}$ $J_z = \mu \frac{h^2}{18} = \frac{b h^3}{36}$ $J_y = \mu \frac{h^2}{2} = \frac{b h^3}{4}$ $J_c = \frac{b h^3}{4} + \frac{h}{12} (u^3 + v^3)$ $J_b = \frac{b h^3}{12} + \frac{h}{4} (u^3 + v^3) - \frac{b h}{24} [8(u^2 + v^2) - 3b^2]$ $J_s = \frac{b h^3}{36} + \frac{h}{12} (u^3 + v^3) - \frac{b h}{18} [2(u^2 + v^2) - b^2]$ |

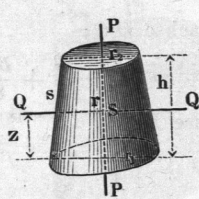
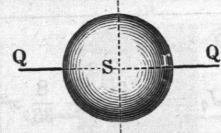
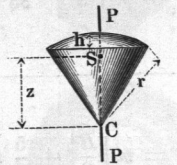
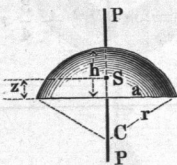
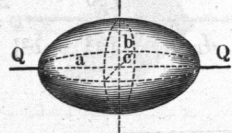
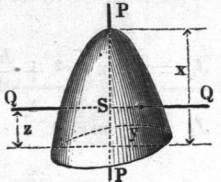
| Nro.                       | Form  | Oberfläche  |
|----------------------------|---|---|
| XXI. Dreieitiges Prisma.   |    | Umfläche: $F_1 = 2l(a + b + c)$<br>Eine Endfläche: $F_2 = \frac{bh}{2}$             |
| XXII. Rechteckiges Prisma. |    | Umfläche: $F_1 = 4l(b + h)$<br>Eine Endfläche: $F_2 = bh$                           |
| XXIII. Rhombisches Prisma. |    | Umfläche: $F_1 = 8l\sqrt{h^2 + \frac{b^2}{4}}$<br>Eine Endfläche: $F_2 = bh$        |
| XXIV. Sechseitig. Prisma.  |   | Umfläche: $F_1 = 12lr$<br>Eine Endfläche: $F_2 = \frac{3}{2}r^2\sqrt{3} = 2,598r^2$ |
| XXV. Cylinder.             |  | Umfläche: $F_1 = 4lr\pi$<br>Eine Endfläche: $F_2 = r^2\pi$                          |

| Inhalt                          | Trägheitsmomente   |
|---------------------------------|--|
| $V = bhl$                       | Zur Aequatorachse $Q Q$ :<br>$J_q = m \left[ \frac{l^3}{3} + \frac{h^2}{18} \right] = \frac{bh l^3}{3} + \frac{bl h^3}{81}$<br>Zur Polachse $PP$ :<br>$J_p = m \left[ \frac{bh^3}{18} + \frac{h}{6}(u^3 + v^3) - \frac{bh}{9}(2[u^2 + v^2] - b^2) \right]$ |
| $V = 2bhl$                      | Zur Aequatorachse $Q Q$ : $J_q = m \left( \frac{l^2}{3} + \frac{h^2}{12} \right)$<br>Zur Polachse $PP$ : $J_p = \frac{m}{12} (h^2 + b^2)$  |
| $V = 2bhl$                      | Zur Aequatorachse $Q Q$ : $J_q = m \left( \frac{l^2}{3} + \frac{h^2}{6} \right)$<br>Zur Polachse $PP$ : $J_p = m \left( \frac{h^2}{6} + \frac{b^2}{24} \right)$  |
| $V = 3lr^2\sqrt{3} = 5,196lr^2$ | Zu den Aequatorachsen $Q Q$ und $Q_1 Q_1$ :<br>$J_q = J = m \left( \frac{l^2}{3} + \frac{5}{24} r^2 \right)$<br>Zur Polachse $PP$ : $J_p = \frac{5}{12} m r^2$   |
| $V = 2\pi lr^2$                 | Zur Aequatorachse $Q Q$ : $J_q = m \left( \frac{l^2}{3} + \frac{r^2}{4} \right)$<br>Zur Polachse $PP$ : $J_p = \frac{1}{2} m r^2$  |



| Nro.                         | Form | Oberfläche  | Inhalt                                   |
|------------------------------|------|---|--|
| XXVI. Hohlzylinder.          |      | Umfläche:<br>$F_1 = 4\pi l(r_1 + r_2) = 8\pi l r$<br>Eine Endfläche:<br>$F_2 = \pi(r_1^2 - r_2^2) = 2\pi r b$ | $V = 2\pi l(r_1^2 - r_2^2) = 4\pi r b l$ |
| XXVII. Parabolisches Prisma. |      | Eine Endfläche:<br>$F_2 = \frac{4}{3} x y$  | $V = \frac{8}{3} l x y$                  |
| XXVIII. Globoidring.         |      | $F = 4\pi^2 R r$  | $V = 2\pi^2 R r^2$                       |
| XXIX. Rechteckige Pyramide.  |      | Umfläche:<br>$F_1 = a\sqrt{h^2 + \frac{b^2}{4}} + b\sqrt{h^2 + \frac{a^2}{4}}$<br>Endfläche: $F_2 = a b$      | $V = F_2 \frac{h}{3} = \frac{a b h}{3}$  |
| XXX. Normalkegel.            |      | Umfläche:<br>$F_1 = r\pi\sqrt{h^2 + r^2} = s r \pi$<br>Endfläche:<br>$F_2 = r^2 \pi$                          | $V = \frac{\pi r^2 h}{3}$                |

| Schwerpunktlage   | Trägheitsmomente   |
|---|--|
| Mitte der Figur   | Zur Aequatorachse $Q Q$ :<br>$J_q = m \left[ \frac{l^2}{3} + \frac{r_1^2 + r_2^2}{4} \right] = m \left[ \frac{l^2}{3} + \frac{r^2}{2} + \frac{b^2}{8} \right]$<br>Zur Polachse $P P$ :<br>$J_p = \frac{m}{2} [r_1^2 + r_2^2] = m \left[ r^2 + \frac{b^2}{4} \right]$ |
| $z = \frac{3}{5} x$   | Zur Aequatorachse $Q Q$ : $J_q = m \left[ \frac{l^2}{3} + \frac{8}{35} x^2 \right]$<br>Zur Polachse $P P$ : $J_p = m \left[ \frac{y^2}{5} + \frac{8}{35} x^2 \right]$  |
| Mitte der Figur   | Zur Aequatorachse $Q Q$ : $J_q = m \left[ \frac{R^2}{2} + \frac{5}{8} r^2 \right]$<br>Zur Polachse $P P$ : $J_p = m \left[ R^2 + \frac{3}{4} r^2 \right]$  |
| $z = \frac{h}{4}$   | Zur Aequatorachse $Q Q$ : $J_q = m \left[ \frac{3}{80} h^2 + \frac{b^2}{20} \right]$<br>Zur Polachse $P P$ : $J_p = \frac{m}{20} [a^2 + b^2]$  |
| $z = \frac{h}{4}$<br>Für den Mantel allein ist:<br>$z' = \frac{h}{3}$ | Zur Aequatorachse $Q Q$ : $J_q = \frac{3}{20} m \left[ r^2 + \frac{h^2}{4} \right]$<br>Zur Polachse $P P$ : $J_p = \frac{3}{10} m r^2$   |

| Nro.                       | Form  | Oberfläche  | Inhalt  |
|----------------------------|---|---|---|
| XXXI. Kegelstumpf.         |    | Umfläche: $F_1 = \pi (r_1 + r_2) \sqrt{h^2 + (r_1 - r_2)^2}$<br>$= 2 \pi r s$<br>Endflächen:<br>$F_2' = r_1^2 \pi, F_2'' = r_2^2 \pi$ | $V = \frac{\pi}{3} h [r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2]$                                   |
| XXXII. Kugel.              |    | $F = 4 r^2 \pi$   | $V = \frac{4 \pi}{3} r^3$   |
| XXXIII. Kugelausschnitt.   |    | Kegelmantel:<br>$F_1 = a \pi r$<br>$= \pi r \sqrt{2 r h - h^2}$   | $V = \frac{2}{3} \pi r^2 h$   |
| XXXIV. Kugelabschnitt.     |   | Umfläche:<br>$F_1 = 2 \pi r h = \pi (a^2 + h^2)$<br>Endfläche:<br>$F_2 = a^2 \pi, r = \frac{a^2 + h^2}{2 h}$                          | $V = \pi h^2 \left( r - \frac{h}{3} \right)$<br>$= \frac{\pi}{6} h (3 a^2 + h^2)$ |
| XXXV. Ellipsoid.           |  | —   | $V = \frac{4}{3} \pi a b c$   |
| XXXVI. Drehungsparaboloid. |  | Endfläche: $F_2 = y^2 \pi$  | $V = \frac{\pi}{2} x y^2$   |

| Schwerpunktlage  | Trägheitsmomente   |
|--|--|
| $z = \frac{h}{4} \left( \frac{r_1^2 + 2 r_1 r_2 + 3 r_2^2}{r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2} \right)$ | Zur Polachse $PP$ :<br>$J_p = \frac{3}{10} m \frac{r_1^5 - r_2^5}{r_1^3 - r_2^3}$  |
| Mitte der Figur  | Zur Aequatorachse $QQ$ :<br>$J = \frac{2}{5} m r^2$  |
| $z = \frac{3}{4} \left( r - \frac{h}{2} \right)$   | Zur Polachse $PP$ :<br>$J_p = \frac{m}{5} (3 r h - h^2)$   |
| $z = \frac{3}{4} \frac{(2 r - h)^2}{3 r - h}$<br>Für den Mantel allein: $z' = \frac{h}{2}$   | Zur Polachse $PP$ :<br>$J_p = m \left[ r^2 - \frac{3}{4} r h + \frac{3}{20} h^2 \right] \frac{2 h}{3 r - h}$                       |
| Mitte der Figur  | Zu der Aequatorachse $QQ$ , welche mit $a$ zusammenfällt:<br>$J_a = \frac{m}{5} (b^2 + c^2)$                                       |
| $z = \frac{x}{3}$  | Zur Aequatorachse $QQ$ :<br>$J_q = m \left( \frac{y^2}{6} + \frac{x^2}{18} \right)$<br>Zur Polachse $PP$ : $J_p = \frac{m}{3} y^2$ |