und für die oben angenommenen Verhältnisse zwischen Zahnlänge und -Dicke die Formel:

$$bt = 16{,}8\,\frac{P}{\mathfrak{S}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (213)$$

Dies bedeutet, dass die Festigkeit des Zahnes seinem Querschnitt proportional ist, dass es also für dieselbe gleichgültig ist, welches Verhältniss b und t zu einander haben, ein Umstand, aus welchem sich beim Konstruiren vielfach Nutzen ziehen lässt.

§. 226.

Theilung und Zahnbreite der Kranräder.

Bezeichnet bei einem gusseisernen Kranrad:

(PR) das statische Moment der angreifenden Kraft,

$\mathfrak{Z}$ die dem Rad bestimmte Zähnezahl,

R seinen vorläufig festgesetzten Theilkreishalbmesser,

t seine Theilung,

so nehme man je nach den gegebenen Grössen:

$$t = 2{,}602 \sqrt[3]{\frac{(PR)}{\mathfrak{Z}}},\quad \frac{t}{\pi} = 0{,}827 \sqrt[3]{\frac{(PR)}{\mathfrak{Z}}} \quad . \; . \quad (214)$$

$$t = 1{,}67 \sqrt{\frac{(PR)}{R}},\quad \frac{t}{\pi} = 0{,}53 \sqrt{\frac{(PR)}{R}} \quad . \; . \quad (215)$$

und gleichzeitig die Zahnbreite b:

$$b = 2t \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (216)$$

Hierbei ist für die Spannung $\mathfrak{S}$ der Werth 3 eingeführt. Die wirklich eintretende Spannung ist kleiner, da der Zahnfuss im allgemeinen dicker ist als $\frac{1}{2}t$, wie oben in (213) eingeführt.

Da der Werth $(PR):R$ gleich der Umfangskraft P ist, so gilt (215) auch für die Fälle, wo P unmittelbar gegeben ist, wie bei der Zahnstange.

Aus den vorstehenden Formeln lässt sich der bemerkenswerthe Einfluss ermitteln, welchen die zum Theil freigestellte Wahl der in Rechnung kommenden Grössen auf den numerischen Werth der Radabmessungen ausübt. Sind t' und t die Theilungen zweier für denselben Fall bestimmten Räder von den Zähnezahlen $\mathfrak{Z}$ und $\mathfrak{Z}'$, in welchen die Spannungen $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}'$ am Zahnfuss vorausgesetzt sind, und bezeichnet man die Konstante $6\,(l:t)\,(t:h)^2$, welche in (213) $= 16{,}8$ ist, allgemein mit C, beziehungsweise C', so ist, wenn das Kraftmoment (PR) für ein zu bauendes Rad gegeben ist, nach (214): $t = \sqrt[3]{2\pi C (PR)(t:b):\mathfrak{S}\mathfrak{Z}}$, woraus:

$$\frac{t'}{t} = \sqrt[3]{\frac{C'}{C}\frac{\mathfrak{S}}{\mathfrak{S}'}\frac{\mathfrak{Z}}{\mathfrak{Z}'}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (217)$$

Hieraus folgt für die Radhalbmesser R und R':

$$\frac{R'}{R} = \frac{\mathfrak{Z}'t'}{\mathfrak{Z}t} = \sqrt[3]{\frac{C'}{C}\frac{\mathfrak{S}}{\mathfrak{S}'}\left(\frac{\mathfrak{Z}'}{\mathfrak{Z}}\right)^2} \quad . \quad . \quad . \quad (218)$$

Die Werthe C hängen von den Zahnverhältnissen, diejenigen der Spannung $\mathfrak{S}$ von dem gewählten Material ab. Nehmen wir beide bei einem anzustellenden Vergleich zunächst als von derselben Grösse seiend an, so bleibt der Einfluss der Zähnezahlen übrig. Eine Verminderung der Zähnezahl vergrössert nach (217) die Theilung, verringert aber nach (218) die Radgrösse.

1. Beispiel. $\mathfrak{Z} = 11$, $\mathfrak{Z}' = 7$ *liefert* $t' : t = \sqrt[3]{11:7} = \sqrt[3]{1{,}571} \sim 1{,}16$; $b' = 2t' = 1{,}16\, b$. *Aber* $R' : R = \sqrt[3]{7^2 : 11^2} = \sqrt[3]{49:121} = \sqrt[3]{0{,}405} \sim 0{,}74$, *oder: das 7 zähnige Rad wird nur ungefähr ³/₄ so gross als das 11 zähnige, oder auch: das 42 zähnige Rad für denselben Fall wird rund nur ³/₄ so gross als das 66 zähnige, indessen 1¹/₆ mal so breit als dasselbe.*

Die Konstante C ist bei einer gegebenen Satzräder-Verzahnung ein bestimmter unveränderlicher Werth, also z. B. für unsere Radlinienverzahnung, wie oben bei (213) ermittelt, $= 16{,}8$. Bei unserer „Daumenverzahnung" (§. 212), aber fällt die Konstante kleiner aus und gestattet demzufolge eine erhebliche Herabziehung der Radabmessungen. Der Werth von $h:t$ nämlich ist bei den Rädern von mehr als 10 Zähnen schon grösser als 0,7. Wird dieser Werth eingesetzt, so erhält man $C' \sim 8{,}4$, d. i. $0{,}5\, C$, in Worten: der Zahn mit unserem „Daumen"-Profil trägt bei sonst gleichen Verhältnissen doppelt so viel, als der gewöhnliche.

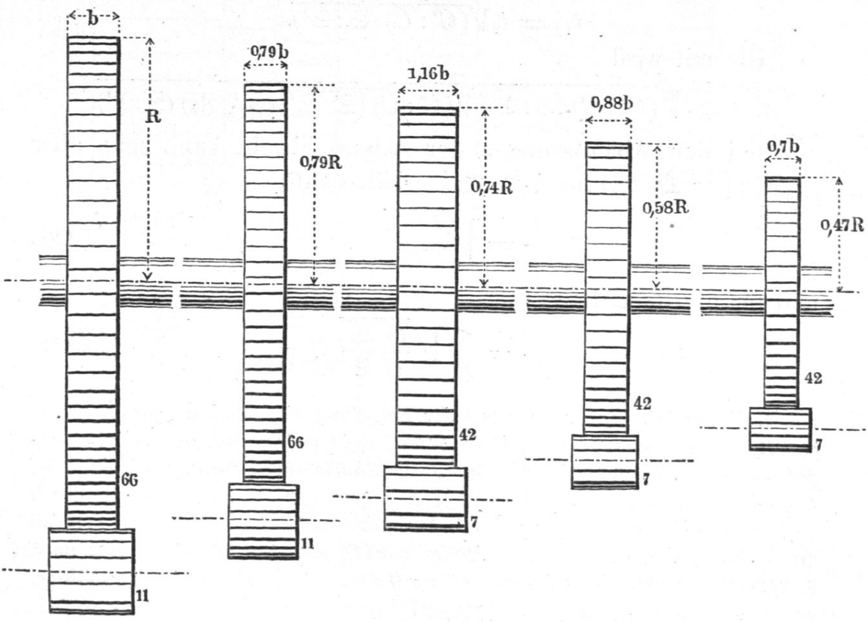
2. Beispiel. Wird unsere Daumenverzahnung statt gewöhnlicher gewählt bei gegebenem Moment (PR) und die Zähnezahl unverändert gelassen, so vermindert sich die Theilung auf $t' = t\sqrt[3]{0{,}5} = 0{,}79\, t$, *oder rund das 0,8 fache, der Theilkreishalbmesser desgleichen, ebenso die Zahnbreite. Wird aber gleichzeitig auch die Zähnezahl in dem schon vorhin gebrauchten Verhältniss von 11 : 7 vermindert, so wird die Theilung* $t' = t\sqrt[3]{0{,}5\,(11:7)} \sim 0{,}89\, t$, *und der Halbmesser* $R' = R\sqrt[3]{0{,}5\,(7^2 : 11^2)} = R\sqrt[3]{0{,}202} \sim 0{,}58 R$.

Der Einfluss der Spannung $\mathfrak{S}$ ist ebenfalls bedeutend. Zwar wird man bei gegebenem Material, also für alle gewöhnlicheren Fälle für Gusseisen, nicht gerne viel von normalen Werthen abweichen wollen. Eine Erhöhung der Spannung um $^1/_4$ würde Theilung und Radhalbmesser nur um 7 Proz. vermindern; anderntheils ist auch ersichtlich, dass man nicht Veranlassung hat, gar zu niedrige Spannungen zu wählen, weil man dadurch gezwungen wird, grosse Räder, also auch grosse Lagerstühle, Gestelle zu bauen, mithin das Gewicht der Maschine gross zu machen. Die oben gewählte Spannung $\mathfrak{S} = 3$ entspricht thatsächlich einer grösseren Sicherheit, als sie vielfach in der Praxis vorzufinden ist, sodass es unnöthig scheint, in normalen Fällen unter sie herabzugehen. Wendet man aber Schmiedeisen als Radmaterial an, was in einzelnen Fällen gerechtfertigt ist, so kann umgekehrt $\mathfrak{S}$ höher und zwar ohne weiteres mit dem Werthe 6 eingeführt werden. Hierdurch wird t' bei sonst gleichen Verhältnissen auf $t\sqrt[3]{0,5} = 0,79\,t$ herabgezogen.

3. *Beispiel. Daumenverzahnung bei einem schmiedeisernen Rade von sieben Zähnen anwendend gegenüber Radlinienverzahnung beim 11zähnigen gusseisernen Rade liefert* $R' = R\sqrt[3]{0,5 \,.\, 0,5\,(7^2 : 11^2)} = R\sqrt[3]{0,101} = 0,47\,R$, *während* $t' = t\sqrt[3]{^1/_4\,(11:7)} = t\sqrt[3]{0,393} \backsim 0,7\,t$, $b' = 0,7\,b$ *wird.*

In Fig. 644 sind die fünf Fälle, welche in den letzten drei Beispielen behandelt worden sind, vergleichbar gemacht, indem

Fig. 644.



die Projektionen der Theilkreiscylinder nebeneinandergestellt sind. Zur Verdeutlichung des Festhaltens an einem gegebenen Kraftmomente (PR) dient die Beibehaltung der Wellendurchmesser für alle fünf Fälle. Hier wird einleuchtend, dass zwischen dem Radhalbmesser und der Wellendicke ein festes Verhältniss nicht besteht, indem die fünf Konstruktionen an sich alle brauchbar und zweckerfüllend sind.

Die Unveränderlichkeit des Kraftmomentes, welche den vorigen Beispielen zu Grunde lag, ist nicht vorhanden, wenn etwa der Zahndruck P von dem getriebenen Rade abermals durch ein Zahnrad fortgepflanzt wird, dieses letztere Rad also an den Abmessungsänderungen theilnimmt. Wirkt das Rad vom Halbmesser R beziehungsweise R' mittelst eines ihm konaxialen Rades vom Halbmesser R_2 beziehungsweise R_2' z. B. auf eine Zahnstange von der gegebenen Belastung P, so hat man nach (214):

$$t = Const \sqrt[3]{(C:\mathfrak{S})\,(P R_2 : \mathfrak{Z})},$$

woraus

$$\frac{t'}{t} = \sqrt[3]{\frac{R_2'}{R_2}\,\frac{C'}{C}\,\frac{\mathfrak{S}}{\mathfrak{S}'}\,\frac{\mathfrak{Z}}{\mathfrak{Z}'}} \quad \ldots\ldots \quad (219)$$

Hieraus käme $R' = R \sqrt[3]{(R_2':R_2)(C':C)(\mathfrak{S}:\mathfrak{S}')(\mathfrak{Z}':\mathfrak{Z})^2}$. Nun ist aber $R_2 = \mathfrak{Z}_2\, t_2$, und $R_2' = \mathfrak{Z}_2'\, t_2'$, und nach Formel (215):

$$t_2' = t_2 \sqrt{(C':C)(\mathfrak{S}:\mathfrak{S}')}.$$

Hiermit wird

$$t' : t = \sqrt[3]{(C':C)(\mathfrak{S}:\mathfrak{S}')\sqrt{(C':C)\,(\mathfrak{S}:\mathfrak{S}')}\,(\mathfrak{Z}_2':\mathfrak{Z}_2)\,(\mathfrak{Z}:\mathfrak{Z}')}.$$

Bei den Abänderungen der Zähnezahlwahl kann man aber $(\mathfrak{Z}_2':\mathfrak{Z}_2) = (\mathfrak{Z}':\mathfrak{Z})$ machen, und erhält dann:

$$\frac{t'}{t} = \sqrt{\frac{C'}{C}\,\frac{\mathfrak{S}}{\mathfrak{S}'}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (220)$$

und für die Radhalbmesser:

$$\frac{R'}{R} = \frac{\mathfrak{Z}'}{\mathfrak{Z}} \sqrt{\frac{C'}{C}\,\frac{\mathfrak{S}}{\mathfrak{S}}} \quad \ldots\ldots \quad (221)$$

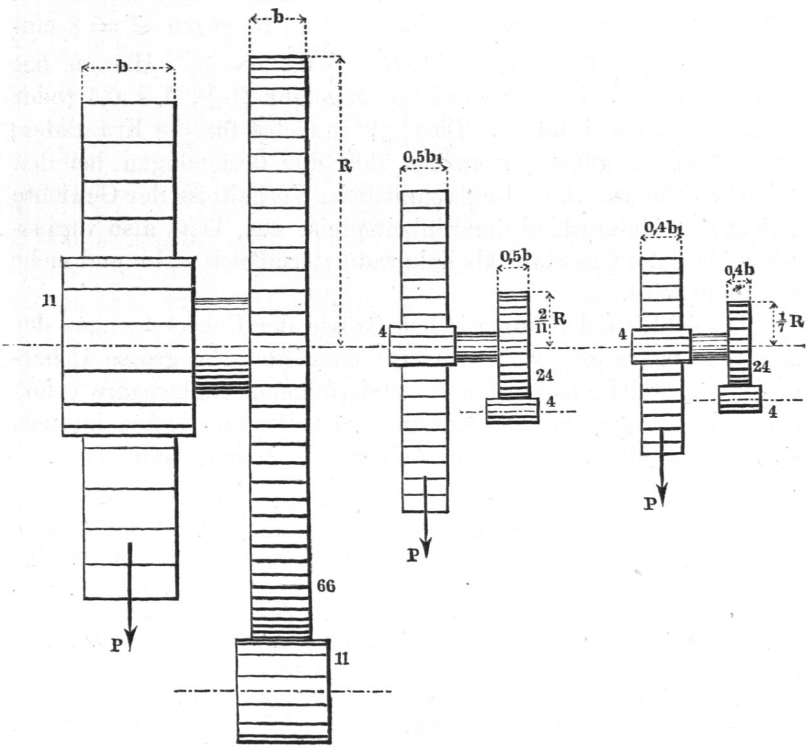
4. Beispiel. Zahnstange mit der Belastung P, getrieben vom 11zähnigen Rade an einem grösseren Rade befestigt, in welches wieder ein 11zähniges eingreift, Fig. 645, als Verzahnung die Radlinienverzahnung, als Material Gusseisen vorausgesetzt. Wir ersetzen dieses überall durch Schmiedeisen und die Radlinienverzahnung durch Daumenverzahnung, indem wir zugleich die Zähnezahlen der kleineren Räder von 11 auf 4 herabsetzen, was nach §. 212 gut angeht. Hier ist nun $C' = 0{,}5\, C$, $\mathfrak{S}' = 2\,\mathfrak{S}$ und wir erhalten: $t' = t\sqrt{1/4} = 1/2\, t$ und $R' = R\, 4/11 \sqrt{1/4} = 2/11\, R$.

Zu bemerken ist bei dieser Gelegenheit, dass das Grössenverhältniss zwischen dem grossen Rade und dem auf seiner Achse sitzenden in die Zahnstange greifenden Getriebe durch die Formeln (217) und (218) ausgedrückt wird, da beide für dasselbe Moment (PR) bestimmt sind.

5. **Beispiel.** *Will man, um noch weitergehende Verkleinerung zu erzielen, Gussstahl statt Schmiedeisen verwenden, worauf man unbedenklich 10 statt 6 kg pro □mm als Spannung einführen kann, so wird* $t' = t\sqrt{0{,}5 \cdot 0{,}3} = 0{,}387\,t \sim 0{,}4\,t$, *und dann* $R' = 0{,}4 \cdot {}^4/_{11}\,R = 0{,}145\,R$ *oder etwa* ${}^1/_7\,R$. *Noch weiter würde man die Verkleinerung treiben, wenn man drei statt vier Zähne in den kleineren Rädern anwändte.*

Fig. 645 stellt die Ergebnisse der zwei letzten Beispiele dar. Die Kraft P an der Zahnstange ist in den drei Fällen dieselbe.

Fig. 645.



Ihr statisches Moment an der Hauptachse nimmt aber ab wie R', demzufolge ebenso dasjenige an der Vorgelegewelle. Dies äussert sich sowohl in der, der letzteren zu gebenden Dicke, als in der etwa auf ihr angebrachten Handkurbel in Hinsicht auf deren Armlänge und den aufzuwendenden Druck an der Handhabe. Aufgaben der vorstehenden Art sind bei den Wagenwinden oder „Domkraften“ (wie man sie nach dem Holländischen bei uns zu nennen begonnen hat) verwirklicht. Auch bei den Hebezeugen der Feldartillerie, wo die Leichtigkeit der Hülfsmaschinen eine der obersten Bedingungen ist, sind dieselben von Wichtigkeit; sie geben aber auch für den allgemeinen Maschinenbau brauchbare Hinweise.

Dass der Gussstahl als Material für Zahnräder rasch Boden gewinnt, wurde bereits in §. 222 hervorgehoben. Ungemein begünstigt wird dies durch die hohe Festigkeit des Materials, welcher zufolge die Räder bedeutend leichter gemacht werden können als gusseiserne. Für ein gusseisernes und ein gussstählernes Rad, die demselben Kraftmoment auszusetzen sind, ergibt sich nach (217) bei gleichen Verhältnissen zwischen den Zahnabmessungen und gleichen Zähnezahlen, wenn wieder $\mathfrak{S}' = 10$ gegen $\mathfrak{S} = 3$ eingeführt wird, $t' : t$ und auch $R' : R = \sqrt[3]{0,3} \backsim {}^2/_3$. Hieraus hat man das Verhältniss der Gewichte ungefähr $({}^2/_3)^3$, d. i. 0,3 (oder $\mathfrak{S} : \mathfrak{S}'$), sage man rund ${}^1/_3$. Dies gilt zunächst für die Kranräder; kaum weniger günstig gestalten sich die Beziehungen bei den Triebwerkrädern. Das durchschnittliche Verhältniss der Gewichte gleicht den Unterschied der Einheitspreise aus, lässt also voraussehen, dass der Gussstahl als Zahnradmaterial sich mehr und mehr einführen wird.

Hinsichtlich der numerischen Grösse der Uebersetzungen der Zahnräderpaare sei noch erörtert, dass für sehr grosse Uebersetzungen, welche mehrere aufeinanderfolgende Räderpaare erfordern, die Uebersetzungen 1 : 9 und 1 : 10 die günstigsten insofern sind, als sie ein Minimum von Achsen und Zähnen bedingen*).

---

*) Die Uebersetzung φ eines zusammengesetzten Räderwerkes aus k Räderpaaren von der Uebersetzung x ist $\varphi = x^k$, wobei $x = \mathfrak{Z} : \mathfrak{Z}'$. Die Summe y aller Zähne im Räderwerk ist dann $y = k(\mathfrak{Z} + \mathfrak{Z}') = k\mathfrak{Z}'(1 + x)$. Nun ist $k = ln\varphi : lnx$, demnach hat das Produkt aus der Zahnsumme y und der Paarzahl k den Werth $yk = (ln\varphi)^2 \mathfrak{Z}' (1 + x) : (lnx)^2$. Diese Gleichung differenzirend und den Differential-Quotienten = Null setzend, erhält man $lnx = 2(1 + x) : x$, welche Bedingung durch $x = 9,19$ erfüllt wird. Beispiel. φ sei = 600, Zähnezahl im kleinsten Rade = 7. a) $\varphi = 20 . 30$ gibt $y = 7(2 + 20 + 30) = 364$, $yk = 728$. b) $\varphi = 4 . 5 . 5 . 6$ gibt $y = 7(4 + 4 + 5 + 5 + 6) = 168$, $yk = 672$. c) $\varphi = 6 . 10 . 10$ gibt $y = 7(3 + 6 + 10 + 10) = 203$, $yk = 609$. Die letzte Lösung ist die praktischste, weil sie zwar mehr Zähne erfordert als (b), dafür aber nur drei statt vier Räderpaare verlangt; bei Lösung (a) ist die Zähnezahl 210 unbequem hoch.