

Je eines der Räder R_2 und R_3 kann strenggenommen mit dem Planrade R_1 nur dann benutzt werden, wenn die Zähnezahlen die genügend angenäherte Verwirklichung des Verhältnisses $\sin \gamma_2$ gestatten. Obgleich hiernach in seiner Anwendung beschränkt, ist doch das Planrad manchmal benutzbar, indem es schiefwinklige Uebertragungen sehr leicht ausführbar macht*).

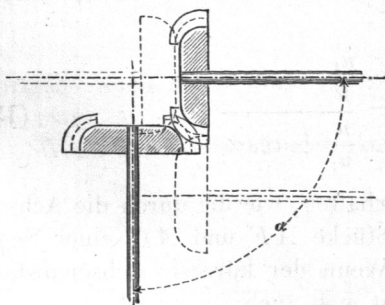
C. Die Hyperbelräder.

§. 218.

Grundkörper der Hyperbelräder.

Die hyperboloidischen oder kurz Hyperbelräder dienen bei geschränkten Achsen, und erhalten Zahnberührung längs einer Linie, weshalb sie zu den Krafrädern gerechnet werden (vergl. S. 558). Ihre Grundkörper sind Drehungshyperboloide, welche einander in einer gemeinschaftlichen Erzeugenden berühren. Die Bestimmung derselben kann wie folgt geschehen. Fig. 600 (a. f. S.) ist eine Projektion normal zur kürzesten Achsenentfernung oder dem Achsenloth. Man theile den Schräkungswinkel α so in zwei Stücke β und β_1 , dass die aus irgend einem Punkte A der Theilungslinie SA auf die Achsen gefällten Lothe AB und AC sich

*) Die von Prof. Beylich 1866 angegebenen „Universalräder“ sollen konische Räder in Fällen ersetzen, wo der Achsenwinkel häufig zu ändern

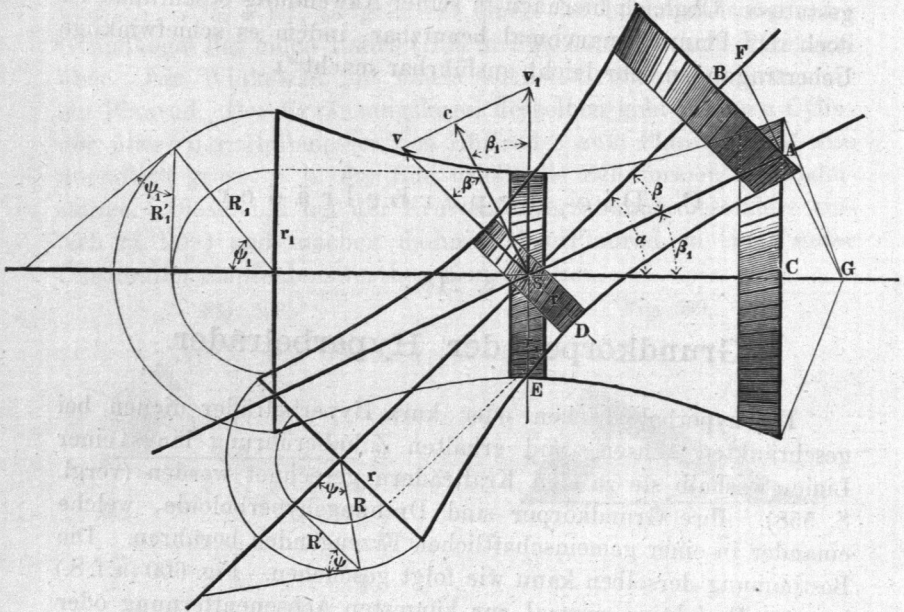


ist. Sie können dazu dienen, Achsen zu verbinden, die einen beliebigen Winkel, von 0 bis 180° einschliessen und innerhalb dieser Grenzen gegeneinander verstellt werden sollen. Die Räder, in beistehender Figur skizzirt, sind verzahnte Ausschnitte von Globoiden III. Kl. (vergl. §. 224), die den Meridianen nach mit Lückenfurchen und Zähnen versehen sind. Anwendungen scheinen selten;

Modell in dem kin. Kabinet der königl. techn. Hochschule. Vergl. übrigens Schluss von §. 211.

verkehrt verhalten, wie die Umdrehungszahlen der Räder. SA ist dann die Berührungskante der Hyperboloide; $AB = R'$ und AC

Fig. 600.



$= R_1'$ sind Projektionen der Halbmesser zweier in A zusammen-treffenden Normalschnitte der Hyperboloide. Man hat

$$\frac{R'}{R_1'} = \frac{\sin \beta}{\sin \beta_1} = \frac{n_1}{n} = \frac{3}{3_1} \dots \dots \dots (194)$$

Die wirklichen Halbmesser R und R_1 sind noch zu bestimmen, ebenso die Halbmesser $SD = r$ und $SE = r_1$ der Kehlkreise. Für letztere hat man zunächst:

$$\frac{r}{r_1} = \frac{tg \beta}{tg \beta_1} = \frac{\frac{n_1}{n} + \cos \alpha}{\frac{n}{n_1} + \cos \alpha} \dots \dots \dots (195)$$

d. h. r und r_1 müssen sich verhalten, wie die durch die Achsen-projektionen abgeschnittenen Stücke AF und AG einer Senk-rechten zur Berührungslinie. Wenn der kürzeste Achsenabstand oder das Achsenloth $= a$, so hat man auch:

$$\frac{r}{a} = \frac{1 + \frac{n}{n_1} \cos \alpha}{1 + 2 \frac{n}{n_1} \cos \alpha + \left(\frac{n}{n_1}\right)^2}, \quad \frac{r_1}{a} = \frac{1 + \frac{n_1}{n} \cos \alpha}{1 + 2 \frac{n_1}{n} \cos \alpha + \left(\frac{n_1}{n}\right)^2} \quad (196)$$

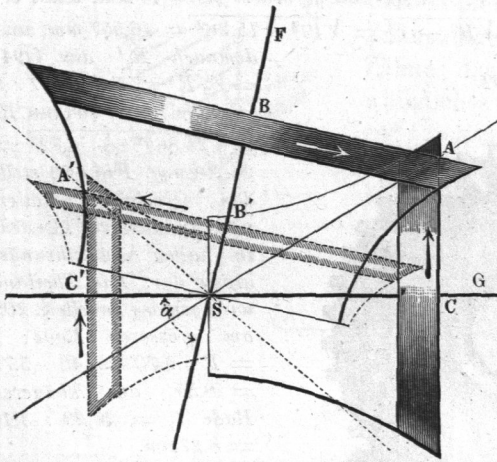
Die Halbmesser R und R_1 sind Hypotenusen zu den Katheten R' und r , R_1' und r_1 (siehe linke Seite der Figur) oder:

$$R = \sqrt{R'^2 + r^2}, \quad R_1 = \sqrt{R_1'^2 + r_1^2} \dots (197)$$

R' und R_1' sind nach dem obigen bekannt, sobald der Abstand $SA = l$ gewählt ist. Für die Winkel β und β_1 hat man endlich noch allgemein:

$$tg \beta = \frac{\sin \alpha}{\frac{n}{n_1} + \cos \alpha}, \quad tg \beta_1 = \frac{\sin \alpha}{\frac{n_1}{n} + \cos \alpha} \dots (198)$$

Es sind jedesmal, ähnlich wie bei den Kegelrädern, zwei Lösungen möglich, je nachdem man die Eintheilungslinie SA innerhalb α oder ausserhalb desselben (in den Nebenwinkel) legt, s. Fig. 601.



Die Lösungen unterscheiden sich durch den Drehungsinn des getriebenen Rades. Auch kann eine der Lösungen ein Hohlrad liefern, eine Konstruktion, welche wie es scheint, noch nie ausgeführt worden ist,

übrigens auch kaum einen wesentlichen praktischen Werth haben mag.

Wenn der Schränkungswinkel $\alpha = 90^\circ$ ist, so wird:

$$\frac{r}{r_1} = tg^2 \beta = \left(\frac{n_1}{n}\right)^2 \dots (199)$$

und

$$\frac{r}{a} = \frac{n_1^2}{n^2 + n_1^2}, \quad \frac{r_1}{a} = \frac{n^2}{n^2 + n_1^2}, \quad tg \beta = \frac{n_1}{n} \dots (200)$$

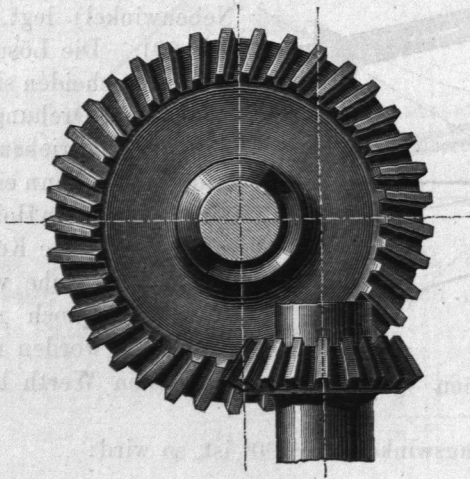
Von den Grundhyperboloiden werden zusammengehörige Zonen als Grundformen der Räder ausgewählt. Bei kleinem Achsen-

abstand sind die in den Kehlen liegenden Zonen meist nicht zu brauchen, wohl aber weiter abgelegene Abschnitte, die alsdann oft durch Kegelstumpfe genähert werden können.

1. *Beispiel.* $\alpha = 40^\circ$, $n_1 : n = 1 : 2$ (vergl. *Beispiel 1* in §. 221) $a = 100$ mm. Man hat $R' : R_1' = 1 : 2$; $r : r_1 = (0,5 + \cos 40) : (2 + \cos 40) = 1,266 : 2,766 = 0,4577$. $a : r = (1 + 2 \cdot \cos 40) : (1 + 2 \cdot 2 \cdot \cos 40 + 4) = 2,532 : 8,064 = 0,31398$, $r = 31,398$ mm, $r_1 = 100 - 31,398 = 68,602$ mm. Ferner $\operatorname{tg} \beta = \sin 40 : (2 + \cos 40) = 0,6428 : 2,766 = 0,232393 = \operatorname{tg} 13^\circ 5'$ und $\beta_1 = 40 - \beta = 26^\circ 55'$. Im Abstände $SA = l = 200$ mm ist $R' = l \sin 13^\circ 5' = 200 \cdot 0,226368 = 45,27$ mm, $R_1' = 200 \cdot \sin 26^\circ 55' = 200 \cdot 0,452634 = 90,04$ mm; endlich $R = \sqrt{45,27^2 + 31,40^2} = 55,10$ mm und $R_1 = \sqrt{90,54^2 + 68,60^2} = 113,59$ mm.

2. *Beispiel.* $\alpha = 90^\circ$, $n_1 : n = 5 : 9$, wofür die Zähnezahlen $Z = 36$ und $Z_1 = 20$ passen; a sei $= 20$ mm (Bedingungen, wie sie bei Rädern an Spindelbänken vorkommen). Man erhält nach (197) $r : r_1 = (9 : 5)^2 = 81 : 25 = 3,24$, und aus (200): $r = a \cdot 9^2 : (5^2 + 9^2) = 20 \cdot 81 : 106 = 15,28$ mm, $r_1 = 4,72$ mm. Für β kommt: $\operatorname{tg} \beta = n_1 : n = 1,800$, d. i. $\operatorname{tg} 60^\circ 57'$, wonach $\beta_1 = 29^\circ 3'$. Es sei nun gefordert $R = 49$ mm, dann erhält man aus (197): $R' = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{49^2 - 15,28^2} = 46,557$ mm, und demnach R_1' aus (194)

Fig. 602.



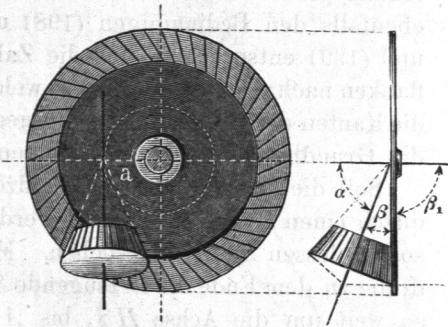
$= \frac{5}{9} R' = 5 \cdot 46,577 : 9 = 25,865$ mm; sodann $R_1 = \sqrt{25,865^2 + 4,72^2} = 26,292$ mm. Fig. 602 stellt das berechnete Räderpaar in äusserer Ansicht in halber Ausführungsgrösse dar. Die Theilung wird gemäss Tabelle §. 202 am grösseren Rade: $t = R : 5,73 = 49 : 5,73 = 8,55$, am kleineren Rade $t_1 = 26,29 : 3,18 = 8,27$ mm.

3. *Beispiel.* $\alpha = 90^\circ$, $n_1 : n = 1$ liefert; $\beta = 45^\circ$, $r = r_1$, $R = R_1$: die Hyperboloide werden kongruent (vergl. *Beispiel 4*, §. 221).

4. *Beispiel.* In dem besonderen Falle, wo numerisch $n_1 : n = \cos \alpha$ und man die Eintheilungslinie, welche β bestimmt, in den Nebenwinkel von α legt, sodass bei Beachtung des Vorzeichens $n_1 : n = -\cos \alpha$, geht der eine Grundkörper in einen Normalkegel, der andere in ein Planhyperboloid, Fig. 603 (a. f. S.), über. Dieses hyperboloidische Planrad entspricht dem bei den Kegelrädern vorkommenden Planrad, siehe §. 217, und bietet die

Bequemlichkeit, mit einem gewöhnlichen Kegelrade zusammen zu arbeiten; viel praktischen Vortheil gewährt es übrigens nicht, da das Planrad ein Hinderniss für das Durchführen der Welle des Kegelrades darbietet.

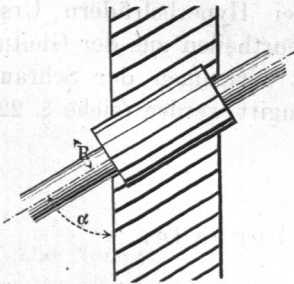
Fig. 603.



Bei $\alpha = 60^\circ$, $n_1 : n = -\frac{1}{2} = -\cos 60^\circ$ erhält man das Planrad. Es wird $\operatorname{tg} \beta = \frac{1}{3} \sqrt{3}$, $\beta = 30^\circ$, $\operatorname{tg} \beta_1 = \infty$, $\beta_1 = 90^\circ$. $R' : R_1' = \sin 30 : \sin 90 = 0,5$; $r = 0$, $r_1 = a$, $R = R'$, $R_1 = \sqrt{R_1'^2 + a^2} = \sqrt{4 R^2 + a^2}$. — Wäre $n_1 : n$ negativ und $< \cos \alpha$, so erhielte man ein hyperboloidisches Hohlrad.

Der Grenzfall der Zahnstange mit Getriebe ist bei den Hyperbelrädern auch möglich. Die Zahnstange erhält dabei schiefe Zähne; das Getriebe wird ein gewöhnliches cylindrisches Stirnrad, indem, um Gleichung (195) zu erfüllen, wegen $r_1 = \infty$ der Winkel $\beta = 0$, β_1 also $= \alpha$ zu setzen ist. Siehe Fig. 604. Zu Anwendungen bietet sich in Werkzeugmaschinen Gelegenheit.

Fig. 604.

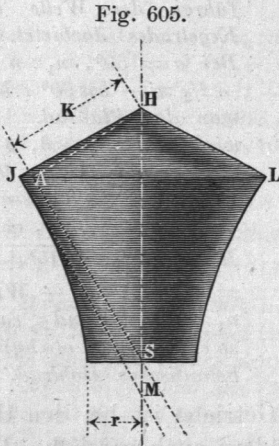


§. 219.

Verzahnung der Hyperbelräder.

Die Verzeichnung einer ganz genauen Zahnform würde bei den Hyperbelrädern sehr grosse Schwierigkeiten bereiten. Man begnügt sich deshalb, wie bei den Kegelrädern, mit Annäherungen. Um unter dieser Voraussetzung die Verzahnung aufzutragen, verzeichnet man zuerst die Ergänzungskegel der benutzten Hyperboloide und benutzt diese, wie bei den Kegelrädern, indem man Hülfräder von dem Halbmesser = der Kegelkante auf sie aufgewickelt denkt. Man findet die Spitze H desselben, Fig. 605 (a. f. S.), durch Errichtung einer senkrechten AH auf der Erzeugenden SA ,

welche wie oben der Bildebene parallel gelegt ist. Genaue Zahnformen werden erhalten, wenn man mit den Grundhyperboloiden an derselben Berührungskante zwei Hülfshyperboloide hinzukonstruirt, die ebenfalls den Bedingungen (198) und (199) entsprechen, und die Zahnflanken nach den Flächen formt, welche die Kanten der Hülfshyperboloide gegen die Grundhyperboloide beschreiben.*)



Soll die benutzte Hyperboloidzone durch einen Kegel angenähert werden, so ist dessen Spitze zu suchen. Man drehe zu dem Ende die Erzeugende SA so weit um die Achse HS , bis A in den Randpunkt J fällt, dann geht die neue Projektion der Erzeugenden durch die Kegelspitze M .

Die Zahnflankengleitung ist bei Hyperbelrädern Ursache grosser Reibung. Letztere ist zu beurtheilen aus der Gleitungsgeschwindigkeit c' , welche gleich ist derjenigen der Schraubenträder, welche durch die Kehlräder tangirt werden (siehe §. 222).

D. Die Schraubenträder.

§. 220.

Cylindrische Schraubenträder.

Die cylindrischen Schraubenträder können wie die Hyperbelräder zur Bewegungsübertragung zwischen geschränkten Achsen benutzt werden und gewähren unter Umständen manche Vortheile vor ihnen. Sie haben mehrere bemerkenswerthe Eigenschaften. Die Räder A und B , Fig. 606 (a. f. S.) sind hier beide Linkschrauben mit zur Verzahnung geeigneten Profilen. Sie haben solche Steigungswinkel γ und γ_1 , dass an der Eingriffsstelle die Schraubenlinien der Theilcylinder eine gemeinschaftliche Tangente haben, sodass beim Schräkungswinkel α der Achsen: $\gamma + \gamma_1 + \alpha$

*) Vergl. Herrmann-Weisbach, Mechanik (II. Aufl.) III. 1, S. 418 ff.