

körper; die Räder heissen dann runde Räder, während sie im Gegensatz dazu unrunde genannt werden, wenn die Grundkörper wegen der geforderten ungleichförmigen Bewegungsübertragung eine andere als Drehkörpergestalt erhalten müssen. In dem Nachstehenden werden nur die runden Räder behandelt.

A. Die Verzahnung der Stirnräder.

§. 200.

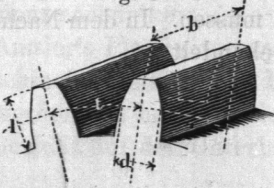
Allgemeines über die Zähne der Stirnräder.

Die Zahnformen der Stirnräder können so gewählt werden, dass alle Räder von gleicher Theilung richtig miteinander arbeiten. Räder von diesen Zahnform-Eigenschaften heissen Satzräder, diejenigen Räder hingegen, welchen diese Eigenschaften fehlen, Einzelräder.

In jedem Paar von runden Rädern heissen zwei den verschiedenen Rädern angehörige, aus den Radmittelpunkten in Normalebenen beschriebene Kreise, welche in jedem Augenblick gleiche Umfangsgeschwindigkeit haben, Verhältnisskreise. Die berührenden Verhältnisskreise eines cylindrischen Stirnräderpaares heissen dessen Theilkreise. Auf ihnen wird die Zahntheilung, d. i. die Entfernung der Mittelebenen zweier benachbarten Zähne abgetragen. Hier soll vorerst nur von den geradzahnigen Stirnrädern die Rede sein.

Die Zähne derselben werden prismatisch geformt; dabei heissen die Grundflächen der Zahnprismen die Endflächen der Zähne, der über den Theilkreiscylinder hervorragende Theil des Zahnes der Zahnkopf, der andere Theil der Zahnfuß, die obere Fläche des Zahnkopfes ist der Zahnscheitel, die untere des Zahnfußes die Sohle oder Wurzel des Zahnes; der Raum zwischen zwei benachbarten Zähnen heisst die Zahnlücke, die Sohlfläche der Lücke der Radboden. Die Flächen, welche die Zahnsohle mit dem Zahnscheitel verbinden, heissen die Zahnflanken; in ihrer Formgebung insbesondere besteht das, was man die Verzahnung der Räder nennt.

Beim Stirnrad nennt man ferner Zahnlänge, l Fig. 569, den Abstand von Zahnsohle und Scheitel, Zahnbreite, b , den Abstand der Endflächen des Zahnes, Zahndicke, d , die Länge des zwischen die Zahnflanken fallenden Theilkreisbogens, und Lückenweite endlich die Länge des in die Lücke fallenden Bogens des Theilkreises. In-



dem man die Lückenweite grösser macht als die Zahndicke, und die Kopflänge der Zähne kleiner als die Fusslänge, entstehen die Flanken- und Scheitelspielräume zwischen den Zähnen.

Man gibt beinahe ausnahmslos allen Zähnen an einem und demselben Rade dieselbe Zahndicke und dieselbe Lückenweite, also auch Theilung, sodass man irgend einen Zahn des einen Rades in jede Lücke des anderen eingreifen lassen kann. Daraus folgt aber, dass wenn die Zähne nur so geformt sind, dass sie in den Lücken genügenden Raum finden, das umgekehrte Verhältniss der Zahlen n und n_1 der gleichzeitigen ganzen Umläufe gleich dem direkten Verhältniss der Zähnezahlen \mathfrak{z} und \mathfrak{z}_1 ist, d. h.:

$$\frac{n_1}{n} = \frac{\mathfrak{z}}{\mathfrak{z}_1} \dots \dots \dots (186)$$

Dieser Satz gilt für runde wie für unrunde Räder. Er gilt selbst auch dann, wenn man die Zähne an verschiedenen Umfängen der Räder verschieden dick machen wollte, wofern nur dafür gesorgt wird, dass in jede Zahnücke des kleineren Rades, während dasselbe eine ganze Umdrehung vollzieht, ein Zahn des anderen Rades tritt. Wird die unter dieser Voraussetzung ermittelte Zahl der Vorsprünge und Lücken am Umfange eines Zahnrades dessen Zähnezahl genannt, so drückt der vorstehende Satz das Grundgesetz der Bewegungsübertragung durch Zahnräder aus. Es liegt diesem Gesetz nicht sowohl eine feinere geometrische Betrachtung, als der unausweichliche Bewegungszwang der Konstruktionstheile zu Grunde. Das Gesetz gilt daher selbst von den ursprünglichsten Zahnradübertragungen, die u. a. im Orient seit Jahrtausenden im Gebrauch sind, und bei denen von einer anderen Gestaltung der Zähne keine Rede ist; als dass sie genügend grosse und haltbare Holzpflocke sind.

Die Zahnflankenformen dürfen dem Grundgesetz nicht widersprechen. Bei runden Rädern, d. h. denjenigen für gleichförmige Bewegungsübertragung, heisst dies, dass das Verhältniss der Winkel-

geschwindigkeiten, d. i. dasjenige der Differenzialien der gleichzeitig durchlaufenen Drehwinkel ω_1 und ω , dem Verhältniss $3 : 3_1$ gleichzusetzen ist und keiner anderen Konstanten gleichgesetzt werden darf. Die Zahnflanken, als diejenigen Flächen, von welchen das Verhältniss $d\omega_1 : d\omega$ abhängt, sind hiernach einzurichten.

Bei der Anfertigung der Zahnräder muss den Zahnformen besondere Sorgfalt gewidmet werden. Am allerwichtigsten ist hierbei, auf die Genauigkeit der Theilung sein Augenmerk zu richten; Fehler in den Zahnflanken sind lange nicht so störend, als Fehler in der Theilung. Die Benutzung der Theilmaschinen resp. Räder-schneidemaschinen zur Zahnräderfertigung erhöht daher die Zuverlässigkeit der gelieferten Räder auf jeden Fall. Die Anwendung solcher Maschinen verbreitet sich bei uns jetzt erfreulicher Weise mehr und mehr. Unterstützt wird die Räderfabrikation jetzt auch sehr durch die Räderformmaschine*), welche sehr schöne Resultate liefert. Die Wechselräder der Drehbänke sollte man eigentlich nicht anders als mit Maschinentheilung anwenden, da die Fehler der bloss gegossenen Räder bei jeder zu schneidenden Schraube sich nachtheilig merkbar machen. Noch schlimmer wirken diese Fehler, wenn man Schraubenräder (siehe unten §. 221) auf solchen Bänken schneiden will. Der sanfte stossfreie Gang, der bei diesen Rädern sonst leicht zu erzielen ist, wird durch die Fehler wieder sehr beeinträchtigt. Bei der Wahl der Zahnform, welche in einer Maschinenbauanstalt durchweg oder für jede bestimmte Klasse von Rädern einzeln gebraucht werden soll, empfiehlt es sich, alle Umstände sehr genau zu erwägen, ehe man sich für eine bestimmte Annahme entschliesst, da von derselben so vieles abhängt. Im Folgenden sind deshalb Anhalt- und Beurtheilungspunkte mancherlei Art gegeben.

§. 201.

Theilkreishalbmesser. Peripheriemaasstab.

Bei einer Theilung t und einer Zähnezahl 3 eines runden Rades hat man für den Theilkreishalbmesser R :

$$\frac{R}{t} = \frac{3}{2\pi} = 0,159163 \dots \dots \dots (187)$$

*) In starkem Gebrauch in der Berlin-Anhaltischen Maschinenfabrik in Berlin und der Maschinenbauanstalt von Briegleb Hansen u. Co. in Gotha.

Halbmesser ebenfalls rational, aber im gewöhnlichen Maasssystem, macht. Die hier folgende Tabelle ist nicht zu verwechseln mit der Donkin'schen *), nach dem Ausdruck $r : t = 1 : 2 \sin(180^\circ : 3)$, welche den Halbmesser eines Kreises liefert, der ein regelmässiges Vieleck von 3 Seiten von der Länge t umschreibt. Dieser letztere Halbmesser ist namentlich bei kleinem 3 verschieden vom Radius R im obigen und gewöhnlichen Sinne. Die Verwechslung beider hat schon manchmal fehlerhafte Ausführungen hervorgerufen.

§. 202.

Tabelle über die Theilkreishalbmesser.

3	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0,00	0,159	0,318	0,477	0,637	0,796	0,955	1,114	1,273	1,432
10	1,59	1,75	1,91	2,07	2,23	2,39	2,55	2,71	2,86	3,02
20	3,18	3,34	3,50	3,66	3,82	3,98	4,14	4,30	4,46	4,62
30	4,77	4,93	5,09	5,25	5,41	5,57	5,73	5,89	6,05	6,21
40	6,37	6,53	6,68	6,84	7,00	7,16	7,32	7,48	7,64	7,80
50	7,96	8,12	8,28	8,44	8,59	8,75	8,91	9,07	9,23	9,39
60	9,55	9,71	9,87	10,03	10,19	10,35	10,50	10,66	10,82	10,98
70	11,14	11,30	11,46	11,62	11,78	11,94	12,10	12,25	12,41	12,57
80	12,73	12,89	13,05	13,21	13,37	13,53	13,69	13,85	14,01	14,16
90	14,32	14,48	14,64	14,80	14,96	15,12	15,28	15,44	15,60	15,76
100	15,92	16,07	16,23	16,39	16,55	16,71	16,87	17,03	17,19	17,35
110	17,51	17,67	17,83	17,98	18,14	18,30	18,46	18,62	18,78	18,94
120	19,10	19,26	19,42	19,58	19,73	19,89	20,05	20,21	20,37	20,53
130	20,69	20,85	21,01	21,17	21,33	21,49	21,65	21,80	21,96	22,12
140	22,28	22,44	22,60	22,76	22,92	23,08	23,24	23,40	23,55	23,71
150	23,87	24,03	24,19	24,35	24,51	24,67	24,83	24,99	25,15	25,31
160	25,46	25,62	25,78	25,94	26,10	26,26	26,42	26,58	26,74	26,90
170	27,06	27,21	27,37	27,53	27,69	27,85	28,01	28,17	28,33	28,49
180	28,65	28,81	28,97	29,13	29,28	29,44	29,60	29,76	29,92	30,08
190	30,24	30,40	30,56	30,72	30,88	31,04	31,19	31,35	31,51	31,67
200	31,83	31,99	32,15	32,31	32,47	32,63	32,79	32,95	33,10	33,26
210	33,42	33,58	33,74	33,90	34,06	34,22	34,38	34,54	34,70	34,85
220	35,01	35,17	35,33	35,49	35,65	35,81	35,97	36,13	36,29	36,45
230	36,61	36,76	36,92	37,08	37,24	37,40	37,56	37,72	37,88	38,04
240	38,20	38,36	38,51	38,67	38,83	38,99	39,15	39,31	39,47	39,63
250	39,79	39,95	40,11	40,27	40,42	40,58	40,74	40,90	41,06	41,22
260	41,38	41,54	41,70	41,86	42,02	42,18	42,34	42,49	42,65	42,81
270	42,97	43,13	43,29	43,45	43,61	43,77	43,93	44,09	44,25	44,40
280	44,56	44,72	44,88	45,04	45,20	45,36	45,52	45,68	45,84	46,00
290	46,15	46,31	46,47	46,63	46,79	46,95	47,11	47,27	47,43	47,59

*) Siehe u. a. Salzenberg's Vorträge S. 93.

Erste Benutzungsart der vorstehenden Tabelle.

Beispiel. Ein Rad soll 63 Zähne und 30 mm Theilung erhalten, welchen Halbmesser erhält sein Theilkreis? — Nach Zeile 7 Spalte 5 ist hier $R : t = 10,03$, also $R = 10,03 \cdot t = 10,03 \cdot 30 = 300,9$ mm, abzurunden auf 301 mm. Wäre die Theilung 30 Sechzehntelzoll gewesen, so würde $R = 301$ Sechzehntel geworden sein.

Zweite Benutzungsart. Die Tabelle erleichtert auch das Auffinden der Zähnezahl, welche man einem Rad von bekannter (berechneter) Theilung und gegebenem (noch abrundbarem) Theilkreishalbmesser zu geben hat.

Beispiel. Welche Zähnezahl erhält ein Rad von 1000 mm Theilkreishalbmesser bei 40 mm Theilung? — Es ist hier $R : t = 1000 : 40 = 25$. Fast genau entspricht diesem Werth die Zahl 24,99 in Spalte 9 Zeile 16, und erhält demnach das Rad $150 + 7 = 157$ Zähne. Der Halbmesser wäre streng genommen zu verkleinern auf $24,99 \cdot 40 = 999,6$ mm, was aber einen vernachlässigbaren Unterschied liefert.

Dritte Benutzungsart. Bei gegebenem Halbmesser und gegebener Zähnezahl die Theilung eines Rades zu suchen.

Beispiel. Gegeben $R = 400$, $z = 54$. Dem Werthe $z = 54$ entspricht nach Spalte 6 Zeile 6 der Quotient $R : t = 8,59$. Man hat demnach hier zu nehmen: $t = R : 8,59 = 400 : 8,59 = 46,56$ mm.

Wird die Zahnkopflänge $= 0,3t$ gemacht, vergl. §. 207 ff., so ist der Kopfkreishalbmesser $R' = R \pm 0,3t$. Mit Hülfe der Tabelle erhält man hiernach das Verhältniss $R' : t$, wenn man für ein aussenverzahntes Rad zum Tabellenwerth 0,3 zuzählt, für ein Hohlrad 0,3 von demselben abzieht.

§. 203.

Allgemeine Verzahnung.

In einem Stirnräderpaare liegen zusammenarbeitende Zahn-umrisse in einem Lothschnitt zu den Radachsen, und geschieht deshalb die Verzeichnung und Auftragung der Zahnformen in einem solchen Schnitte. Die sogenannte allgemeine Verzahnung lehrt, wie bei gegebenem Zahnprofil des einen Rades dasjenige für das eingreifende Rad bei der Forderung gleichförmiger Bewegungübertragung zu bestimmen ist.

I. Erstes Verfahren des Verfassers. Fig. 570. Zahnprofil $a S b c$ gegeben und Theilkreis T des Rades O gewählt, damit der Theilkreis T_1 des Rades O_1 gegeben; gesucht wird die Zahnkurve $a_1 S \dots$ des Rades O_1 . Lege die gegebene Kurve so, dass ihr Theilkreispunkt S in die Centrale OO_1 fällt, so ist S gleichzeitig ein Punkt des gesuchten Zahnprofils. Um einen zweiten Punkt a_1 zu finden, der mit a zusammentreffen soll, ziehe a_1 normal zur gege-

benen Kurve in a , mache Bogen $S1' = \text{Bogen } S1$, sodann die Strecke $1s_1 = \text{der Strecke } S1'$, und $Ss_1 = 1'1$, schlage sodann aus S einen Kreisbogen mit s_1a und aus $1'$ einen solchen mit $1a$, so ist der Schnittpunkt a_1 der gesuchte Kurvenpunkt. Solche

Fig. 570.

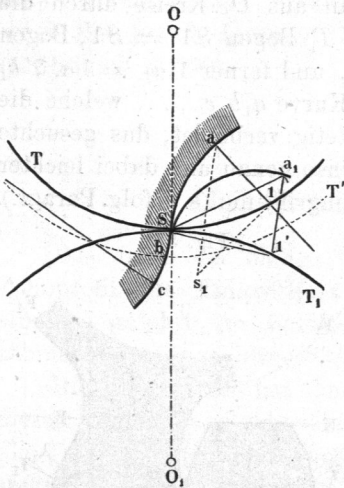
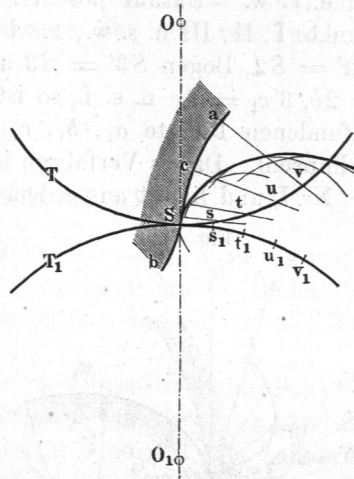


Fig. 571.



Profilpunkte, welche wie c so gelegen sind, dass ihre Normale den zugehörigen Theilkreis nicht trifft, sind für den gegebenen Theilkreis nicht benutzbar; um sie dazu zu machen, müsste man die Theilkreise T und T_1 verlegen (hier vergrößern). Die gefundene Kurve kann Spitzen, Schleifen, überhaupt unausführbare Formen erhalten, ohne deshalb geometrisch unrichtig zu werden.

II. Abgekürztes Verfahren (Poncelet), Fig. 571. Man suche auf dem Theilkreis T_1 die Punkte $s_1, t_1, u_1, v_1 \dots$ auf, welche mit den Punkten $s, t, u, v \dots$ des gegebenen Kreises T zusammentreffen, beschreibe aus s_1, t_1, u_1 u. s. w. mit den Längen der Normalen zur gegebenen Zahnkurve va, uc u. s. w. Bögen, und führe berührend an dieselben eine stetige Kurve, so ist diese das gesuchte Zahnprofil. Die Punkte $s, t, u, v \dots$ sollen in kleinen Abständen gewählt werden. — Trägt man in beiden Verfahrensarten von den Punkten $s_1, t_1, u_1 \dots$ die Länge der Normalen va, uc u. s. w. rückwärts statt vorwärts auf, so erhält man die Hohlradverzahnung (innere Verzahnung) für das Rad $O_1 T_1$.

III. Zweites Verfahren des Verfassers. Fig. 572 (a. f. S.). Zahnprofil $abcSde$ gegeben und zugehöriger Theilkreis T gewählt, damit der Theilkreis T_1 gegeben. Man ziehe die Normalen $a1, b2$

schreibe mit den erhaltenen Zirkelöffnungen aus $1', 2', 3' \dots$ Kreise, so hüllen diese die Kopfbahn $a a_1 g \dots$, das sogenannte theoretische Profil des Zahnfusses, ein, an welches tangierend das wirkliche Profil $a_1 f_1$ des Zahnfusses so angelegt wird, dass es in den Fusskreis F_1 übergeht. Das genannte theoretische Profil ist eine verlängerte oder verkürzte cyklische Kurve (s. §. 205), hier, wo T eine gerade Linie ist (Zahnstange), eine verkürzte Evolvente (s. übrigens §. 209).

§. 204

Ueber den Zahneingriff.

Das dritte der obigen Verfahren hat neben dem gesuchten Zahnprofil die Eingrifflinie*) zusammenarbeitender Räder bestimmen gelehrt; an dieselbe knüpfen sich folgende für die Verzahnungstheorie wichtige Sätze.

Die Eingrifflinie hat den Theilkreispunkt des Zahnprofils mit diesem gemein, und schneidet dasselbe rechtwinklig, so dass also die Tangente NN der Eingrifflinie in S normal zum Zahnprofil steht. Jedem Eingriffpunkt entspricht eine Zahnberührung, und demnach ein Berührungspunkt auf jedem der Theilkreise, so dem Eingriffpunkte II der Punkt 2 auf T , $2'$ auf T_1 ; es heisse der Theilkreisbogen zwischen dem Theilkreispunkte der Eingrifflinie und dem einen Eingriffpunkte entsprechenden Berührungspunkte der Theilkreise der Wälzungsbogen zu dem betreffenden Eingriffpunkte. So ist $S2$ der Wälzungsbogen auf T zum Punkte II , Bogen $S2'$ der auf T_1 zu demselben Eingriffpunkte.

Die Summe der Wälzungsbogen zu den äussersten Eingriffpunkten (Bogen $1S + S5$ oder Bogen $1'S + S5'$) heisst der Eingriffbogen, seine Länge in Theilungen ausgedrückt die Eingriffdauer des betrachteten Zahneingriffes, welche hiernach leicht graphisch zu bestimmen ist. Dieselbe hängt von der Länge der Eingriffstrecke, d. i. des benutzten Stückes der Eingrifflinie ab. Da nun aber der Zahnfuss wegen des Ansatzes an den Radboden sowohl, als wegen des Durchlassens des Gegenzahnkopfes über den Kopfkreis des Gegenrades hinaus verlängert werden muss, so sind es bei unseren gewöhnlichen Rädern die Kopfkreise K und K_1 , welche die Eingriffstrecke (V-I) begrenzen.

*) In Moll und Reuleaux's Konstruktionslehre für den Maschinenbau zum erstenmal behandelt.

Für ein Rad gibt es zu einem gegebenen Zahnprofile bei bekanntem Theilkreis nur eine Eingrifflinie, und zu einer gegebenen Eingrifflinie nur ein richtiges Zahnprofil. Dieses letztere ist nur in dem Falle aus der Eingrifflinie bestimmbar, wenn im voraus die Wälzungsbogen zu den einzelnen Punkten der Eingrifflinie bekannt sind. Ist aber dieser Zusammenhang gegeben, so kann das entsprechende Zahnprofil konstruirt werden. Diese Aufgabe ist es, welche das obige Verfahren, von einem gegebenen Zahnprofil ausgehend, löst.

Bei den cykloidischen Verzahnungen ist der Wälzungsbogen gleich der Eingriffstrecke, und deshalb sind diese Verzahnungen besonders einfach hinsichtlich ihrer geometrischen Eigenschaften.

Bei richtig zusammenarbeitenden Zahnrädern sind die Eingrifflinien kongruent und die Wälzungsbogen zu homologen Eingriffpunkten gleich lang. Unter Einhaltung dieser Bedingung können beliebig viele Räder zu einem gegebenen hinzukonstruirt werden. Solche Räder sind unter der weiteren Bedingung Satzräder (s. §. 200), dass die allen gemeinschaftliche Eingrifflinie so geformt ist, dass sie durch den Theilkreis sowohl, als durch den Radius zu ihrem Theilkreispunkt in zwei kongruente Stücke zerlegt wird.

Bei allen Satzräderverzahnungen sind deshalb bei der Zahnstange die Zahnprofilstücke über und unter dem Theilkreise kongruent.

Der Strahl, welcher von dem Theilkreispunkte der Eingrifflinie aus nach irgend einem Eingriffpunkte gezogen wird (z. B. SI in Fig. 572), gibt die Richtung und den Angriffpunkt des Zahndruckes für den betreffenden Eingriffpunkt an.

§. 205.

Die cyklischen Kurven.

Zur Erzielung der Satzräderverzahnungen, oder überhaupt solcher Verzahnungen, deren geometrische Eigenschaften man allgemein vorausbestimmen will, eignen sich am besten die Kreisrollungs- oder cyklischen Kurven. Wenn ein Kreis auf einem anderen, mit dem er in derselben Ebene liegt, ohne Gleitung rollt, so beschreibt jeder Punkt in einem seiner Radien eine solche Kurve, welche eine gemeine, verlängerte oder verkürzte Cykloide

heisst, je nachdem der beschreibende Punkt auf dem Umfang des rollenden Kreises liegt, oder durch eine Verlängerung oder durch eine Verkürzung des Halbmessers des rollenden Kreises zu erreichen ist.

Der ruhende Kreis ist der Grundkreis der Kurve, sein Halbmesser werde hier mit R bezeichnet; der rollende Kreis heisst der Wälzkreis oder Radkreis und habe den Halbmesser r ; der dem beschreibenden Punkt diametral gegenüberliegende Punkt des Radkreises werde der Gegenpunkt des Kurvenpunktes genannt. Bezeichnet man nun den Halbmesser desjenigen der beiden Kreise, welcher den anderen mit seiner Innenseite berührt, als negativ, den anderen als positiv, so lassen sich zunächst die fünf Arten der cyklischen Kurven, welche sich durch Veränderung von R und r ergeben, wie folgt zusammenstellen.

Grundkreis	Radkreis	Entstehende Kurve
$+ R$	$+ r$	Aufradlinie oder Epicykloide
$+ \infty$	$+ r$	Radlinie schlechthin oder Orthocykloide*)
$- R$	$+ r$	Inradlinie oder Hypocykloide
$+ R$	$\pm \infty$	Fadenlinie oder Kreisevolvente
$+ R$	$- r$	Umrادlinie oder Pericykloide

Bei allen fünf Arten gelten sodann die beiden folgenden Sätze:

1. Die Normale zu einem Kurvenelement geht durch den zugehörigen Berührungspunkt der Erzeugungskreise.

2. Der Krümmungsmittelpunkt zu einem Element der Kurve ist der Durchschnitt der Normalen mit der Geraden, welche den Gegenpunkt mit dem Mittelpunkt des Grundkreises verbindet. Bei den verlängerten und verkürzten Kurven liegt der Gegenpunkt auf dem verlängerten Radius zum Kurvenelement und der durch den Berührungspunkt gezogenen Senkrechten zur Normale.

Auf dem ersteren Satze beruht die vorzügliche Anwendbarkeit der cyklischen Kurven zur Verzahnung; auf den zweiten lassen

*) So schlug der Verfasser statt „Cykloide“ vor, weil dieser letztere Name zur Bezeichnung des ganzen Kurvengeschlechtes dient.

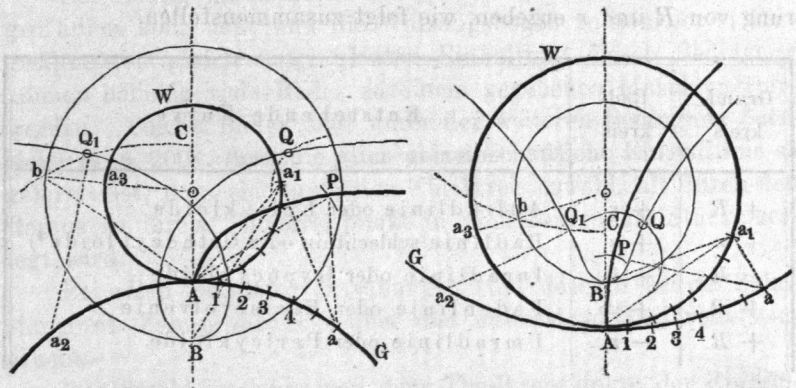
sich vortrefflich die Ersetzungen der cykloidischen Zahnkurven durch Kreisbögen stützen.

§. 206.

Verzeichnung der cyklischen Kurven.

I. Genaues Verfahren. Fig. 574. G Grundkreis, W Radkreis, A Anfangspunkt der Kurve. Trage von A aus auf G und W nach derselben Seite kleine gleichlange Bogenstücke auf, und es seien nun a und a_1 zwei zusammengehörige Theilpunkte. Be-

Fig. 574.



schreibe aus A mit dem Abstand $a a_1$ einen Bogen, und aus a mit der Sehne $A a_1$ ebenfalls einen Bogen, so schneidet letzterer den ersteren in einem Punkte P der gesuchten Kurve. Dieses Verfahren, welches in Fig. 574 nur für Auf- und Inradlinie angewandt ist, gilt für alle fünf Arten der cyklischen Kurven.

II. Abgekürztes Verfahren. Beschreibe aus den Theilpunkten $1, 2, 3, a, \dots$ mit den zugehörigen, von A aus gemessenen Sehnen des Radkreises Kreisbögen, so berühren diese sämmtlich die gesuchte Kurve und können, bei recht kleiner Theilung $A - 1, 1 - 2 \dots$ zur Verzeichnung derselben dienen.

Für die in B anfangende verlängerte oder verkürzte Kurve bestimme zuerst P (wobei es nicht nöthig ist, die gemeine Kurve selbst zu verzeichnen), beschreibe dann aus a mit $a_1 B$ einen Bogen, und aus P einen solchen mit AB , so schneiden die beiden Bogen einander in einem Punkte Q der gesuchten Kurve.

Oder: Ziehe durch a_3 einen Radius $a_3 b$ im Radkreise, und durch b einen Kreisbogen $b C$ konzentrisch mit dem Grundkreise, und mache $a_2 Q_1 = A b$, so ist Q_1 der Kurvenpunkt für die Wälzung auf dem Bogen $A a_2 = A a_3$.

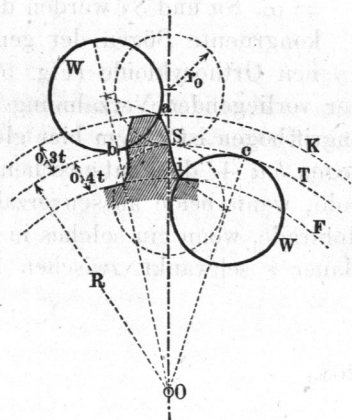
§. 207.

Radlinienverzahnung für Satzräder.

Das Zahnprofil wird bei dieser, streng genommen als doppelte zu bezeichnenden Verzahnung zusammengesetzt aus einem Auf- und einem Inradlinienbogen, beide erzeugt durch einen für jede Theilung konstanten Radkreis.

I. Verzahnung eines aussenverzahnten Rades, Fig. 575. Gegeben die Zähnezah \mathfrak{Z} und die Theilung t oder die

Fig. 575.



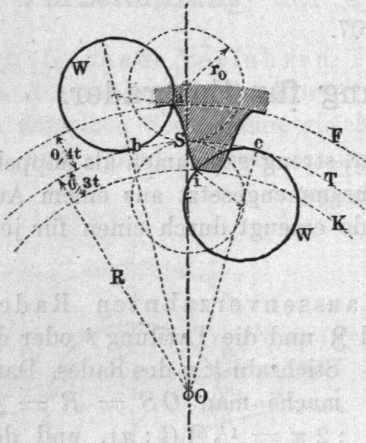
Stichzahl $t:\pi$ des Rades. Dann mache man $OS = R = \mathfrak{Z} t : 2\pi = \frac{1}{2} \mathfrak{Z} (t:\pi)$, und den Halbmesser r_0 der Radkreise $W = 0,875 t$ oder $= 2,75 (t:\pi)$; verzeichne den Kopfkreis K um $0,3 t$ von T abstehend, sowie den Fusskreis F um $0,4 t$ von T entfernt, und mache die Zahndicke $= \frac{19}{40} t$. Bogen $Sb = a b$; Bogen $Sc = i c$. Sa ein Aufradlinienbogen, erzeugt durch Rollen von W auf T ; Si Inradlinienbogen, erzeugt durch Rollen von W in T .

Bei dem eilfzähligen Rad wird Si gerade und radial. Die Verzahnung kann gut bis zu sieben Zähnen herab benutzt werden; die Inradlinienbogen werden zwar bei $\mathfrak{Z} < 11$ unterkrümmt, d. i. nach der Zahnmittelebene hin gebogen. Diese Unterkrümmung ist aber dadurch unschädlich zu machen, dass man die Zahnfußflanken unter Beachtung des theoretischen Fußprofils ausrundet (s. §. 203, wo in Fig. 573 als Beispiel das siebenzählige Rad der vorliegenden Verzahnung im Eingriff mit der Zahnstange gewählt wurde), und ausserdem dem Rade eine Seitenscheibe

oder Saumleiste (s. §. 228) gibt. Der Scheitelspielraum wird $\frac{1}{10}t$, der Flankenspielraum $\frac{1}{20}t$.

II. Verzahnung eines Hohlrades, Fig. 576. Das Hohlrad ist in den Zahnformen, abgesehen von der Rücksicht auf die

Fig. 576.



Spielräume, die genaue Hohlform des gleichgrossen aussenverzahnten Rades. — R Theilkreishalbmesser, K Kopfkreis, um $0,3t$ von T nach innen abstehend, F Fusskreis, um $0,4t$ von T nach aussen abstehend. $r_0 = 0,875t = 2,75(t : \pi)$, Zahndicke $= \frac{19}{40}t$. Sa Aufradlinienbogen, erzeugt durch Rollen von W auf T , Si Inradlinienbogen, erzeugt durch Rollen von W in T .

Bei der Zahnstange ist $R = \infty$. Sa und Si werden dann kongruente Bögen der gemeinen Orthocykloide (Fig. 573).

Die Eingrifflinie fällt bei der vorliegenden Verzahnung mit den Radkreisen zusammen; der Eingriffbogen ist zudem hier gleich der Eingriffstrecke, nämlich = Bogen ba + dem entsprechenden Bogen b_1a_1 am eingreifenden Rade, wenn beide aussenverzahnt, und + der Bogenstrecke ci am Hohlrade, wenn ein solches in das Vollrad eingreift. Die Eingriffdauer ε schwankt zwischen 1,22 und 1,60.

§. 208.

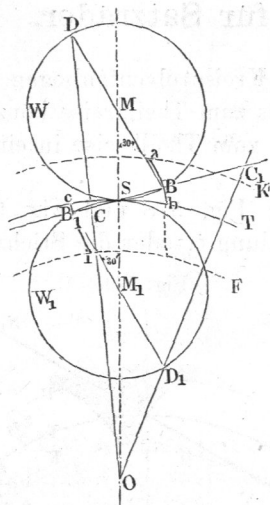
Radlinien - Kreisverzahnung.

Als Ersatzbögen werden zwei Stücke von Krümmungskreisen passend gelegener Elemente der Radlinienbögen benutzt (vergl. §. 205).

Fig. 577. Verzeichne den Theilkreis T und die Kopf- und Fusskreise K und F in der bekannten Weise, sowie aus den Mittelpunkten M und M_1 die Radkreise W und W_1 , die einander und den Theilkreis in S berühren. Ziehe nun die Durchmesser BMD und $B_1M_1D_1$ so, dass $\angle BMS = \angle B_1M_1S = 30^\circ$;

verbinde B mit B_1 durch die verlängerte Gerade $C_1 B S B_1$, und ziehe durch die Gegenpunkte D und D_1 die Geraden OD und $OD_1 C_1$, so liefern deren Schnitte C und C_1 mit der Geraden $B_1 C S C_1$

Fig. 577.



die gesuchten Krümmungsmittelpunkte zu den Ersatzbögen aBb und cB_1i . Durch C und C_1 lege nun aus O beschriebene Mittelpunktkreise, und rücke die Bögen aBb und cB_1i zum Zahnprofil zusammen.

Durch Rechnung findet man die Krümmungshalbmesser ϱ aus den folgenden Formeln:

$$\frac{\varrho}{t} = 0,45 \frac{2\mathfrak{z} \pm 11}{\mathfrak{z} \pm 11} \text{ und } \frac{\varrho}{\left(\frac{t}{\pi}\right)}$$

$$= 1,42 \frac{2\mathfrak{z} \pm 11}{\mathfrak{z} \pm 11} \quad \dots \quad (190)$$

Die Pluszeichen liefern die Krümmungshalbmesser CB für die Aufradlinienbögen (ϱ_a), die Minuszeichen die Krümmungshalbmesser $C_1 B_1$ für die Inradlinienbögen (ϱ_i). Am Radboden wird der Zahnfuß in bekannter Weise mit einer Abrundung angesetzt.

1. *Beispiel.* Gegeben $\mathfrak{z} = 63$, $t = 30$, so ist der Krümmungshalbmesser ϱ_a für die Ersatzbögen der Aufradlinien: $\varrho_a = 30 \cdot 0,45 \cdot (126 + 11) : (63 + 11) = 30 \cdot 0,45 \cdot (137 : 74) = 0,833 \cdot 30 =$ sehr nahe 25 mm, und der Krümmungshalbmesser ϱ_i für die inneren Bögen: $\varrho_i = 30 \cdot 0,45 \cdot (126 - 11) : (63 - 11) = 30 \cdot 0,45 \cdot 115 : 52 = 30 \cdot 0,995 =$ sehr nahe 30 mm.

2. *Beispiel.* Gegeben $\mathfrak{z} = 11$, $t : \pi = 10$. Hier wird: $\varrho_a = 10 \cdot 1,42 \cdot 33 : 32 = 42,6 : 2 = 21,3$ mm (nicht etwa Theile des Peripheriemaaßstabes). Sodann hat man $\varrho_i = 10 \cdot 1,42 \cdot (11 : 0) = \infty$, d. h. die Fußflanke wird geradlinig und radial.

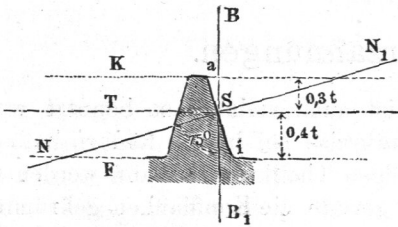
3. *Beispiel.* Gegeben $\mathfrak{z} = 7$, $t = 50$. Hier wird $\varrho_a = 50 \cdot 0,45 \cdot (14 + 11) : (7 + 11) = 50 \cdot 0,45 \cdot (25 : 18) = 31,2$ oder abgerundet 31 mm. Für den inneren Bogen erhält man: $\varrho_a = 50 \cdot 0,45 \cdot (14 - 11) : (7 - 11) = 50 \cdot 0,45 \cdot \frac{3}{4} = -50 \cdot 0,45 \cdot 0,3375 =$ nahe -17 mm. Die Fußflanke wird also unterkrümmt. Sie wird in der in §. 203, Fig. 573 angegebenen Weise in den Radboden übergeführt.

Bemerkung. Bei den Zähnezahlen unter 15 thut man wohl, statt der Kreisverzahnung die genaue Methode (§. 207) anzuwenden, indem sonst die Vernachlässigungen einen merkbaren Einfluss auf den Gang der ausgeführten Zahnräder üben.

griffdauer ε hat man nur die Theilung t durch Radienziehung auf den Grundkreis r zurückzuführen und mit der so erhaltenen Grundkreistheilung oder Grundtheilung die Eingriffstrecke auszumessen. Bei zwei gleichgrossen Rädern von 14 Zähnen ist ε nur wenig > 1 ; es schwankt überhaupt zwischen 1 und 2,5.

Zahnstange, Fig. 580. aSi gerade, unter 75° gegen den Theilkreis T geneigte Linie als Zahnprofil. Der Winkel von 75° ist durch Zusammenlegen der gebräuchlichen Winkelbrettchen von 45° und 30° leicht zu erhalten.

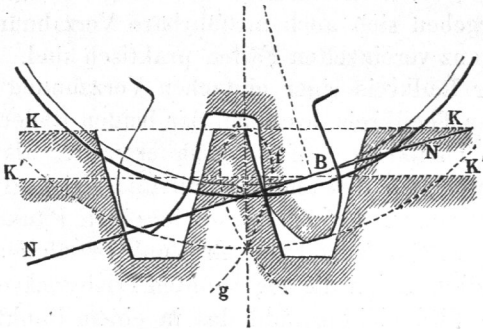
Fig. 580.



Bei den wenigzähligen Rädern liegt der Grundkreis im Zahnprofil nahe dem Theilkreis. Dies führt leicht einen störenden Fehler im Eingriff herbei. Ist nämlich

das Stück SB der Geraden NN_1 , welches zwischen Theil- und Grundkreis liegt, kleiner als das vom Zahnkopf des eingreifenden Rades, siehe Fig. 581, so schneidet die Profilspitze a auf ihrer durch die Kurve afg angedeuteten Kopfbahn (vergl. Fig. 573) in

Fig. 581.



den Zahnfuss des anderen Rades ein. Soll dieser Fehler nicht eintreten, so darf die Zahnkopfbegrenzung, zu welcher der Punkt a gehört, nicht über die durch B gehende $K'K'$ hinausgehen*).

*) Der Widerspruch, dass trotz der geometrischen Richtigkeit der Verzahnung doch der Eingriff falsch werden kann, ist nur scheinbar. Denn unter den gemachten Voraussetzungen hinsichtlich der Zahnkopflängen müsste die Zahnfussflanke an dem kleinen Rade statt von einfach bogen-

Bei der vorliegenden Satzräderverzahnung findet dies für Räder, welche in eine Zahnstange eingreifen, nur statt, wenn $\mathfrak{z} \geq 28$. Ein anderes Mittel, den falschen Eingriff zu vermeiden, besteht in einer entsprechend starken Abrundung der Zahnkante bei a ; dieselbe ist in der Praxis mehrfach im Gebrauch. Wegen einer wichtigen Anwendung der Evolventenverzahnung siehe §. 222.

§. 210.

Punktverzahnungen.

Die Radlinienverzahnung ist auch vielfach so benutzt worden, dass man die inneren Radkreise bei beiden Rädern halb so gross machte, wie die zugehörigen Theilkreise. Dann werden an beiden Rädern die Fussflanken gerade, die Kopfflanken gekrümmt. Solche Räder sind aber keine Satzräder, und daher für die gewöhnlichen Ausführungen des Maschinenbaues als unpraktisch zu verwerfen. Nur bei den Uhrmachern wird sich diese Verzahnungsmethode wahrscheinlich dauernd halten, weil sie ein bequemes Ausfeilen der Zahnlücken gestattet.

Steigert man den Durchmesser des Radkreises um einen Bruchtheil über den Halbmesser des umgebenden Theilkreises hinaus, so ergeben sich auch ausführbare Verzahnungen, welche aber nur in ganz vereinzelt Fällen praktisch sind.

Wird der Radkreis einer einfachen Verzahnung so gross gemacht, wie der Theilkreis des einen der beiden Räder, so ergeben sich für den Theilkreis, auf welchem er rollt, als Zahnprofile cyklische Kurven, für den anderen, mit ihm gleich grossen Theilkreis aber schrumpft das Zahnprofil in einen Punkt zusammen, weshalb man solche Verzahnungen Punktverzahnungen nennen kann. Unter diese fallen die sogenannten Triebstockverzahnungen. Bei denselben wird nicht sowohl das in einem Punkt zusammengegangene Zahnprofil, als vielmehr eine Aequidistante desselben ausgeführt, nämlich ein um den Punkt beschriebener Kreis.

förmiger Gestalt von einer \vee förmigen sein, nämlich aus zwei auf dem Grundkreis eine Spitze bildenden Evolventenbogen bestehen, von denen der eine in die Lücke fallen, also unausführbar sein würde. Es handelt sich also hier um einen der Fälle, welche in §. 203 bei I. angedeutet wurden: Auch die Ausführung der in obiger Figur gefundenen Fusskurve geht nicht an, da dieselbe ein Stück der richtigen Kurve wegschneidet.

Weiter unten sehen wir indessen den erwähnten Punkt selbst, einer Kante des Zahnes angehörig, in Benutzung gezogen.

Triebstockverzahnung für äusseren Eingriff. Fig. 582. Um den Punkt, in welchen das Zahnprofil am Rade R übergegangen ist, wird ein Kreis mit $\frac{19}{80}t$ beschrieben, welcher das Profil des den Punkt umgebenden und vertretenden Triebstockes ist; das Zahnprofil am Rade R_1 ist eine Parallele (oder Aequidistante) zu einer Aufradlinie Sa , erzeugt durch Wälzen des Kreises T auf T_1 , Bogen $Sb = ab$; Kreise vom Triebstockhalbmesser aus den Punkten von Sa beschrieben, hüllen das Zahnprofil cd ein; di viertelkreisförmiges Fussprofil. Die Eingriffslinie kann so bestimmt werden, als sie der Punkt S im Eingriff mit dem Epicykloidenbogen Sa . Sie fällt unter dieser Voraussetzung mit T zusammen; die Eingriffstrecke SI wird durch den Kopfkreis K_1' in I begrenzt, und ist gleich dem Eingriffsbogen, muss also $> t$, nicht kleiner als etwa $1,1t$ sein. Hiernach richtet sich die Kopflänge k_1' und die daraus folgende k_1 . Will man die wirkliche Eingriffslinie bestimmen, welche diejenige der Kurve dc mit dem Triebstockprofil ist, so verfähre man nach der bei III, §. 203 angegebenen Methode.

Fig. 582.

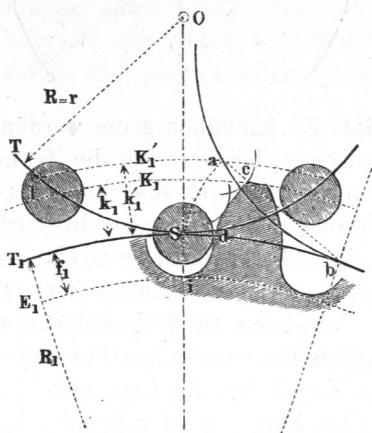


Fig. 583.

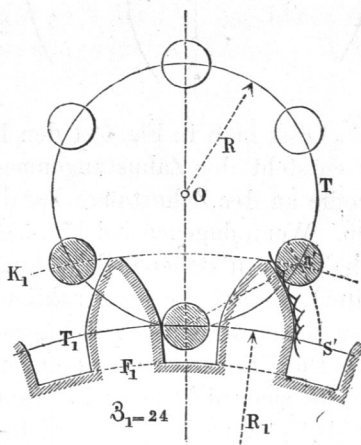


Fig. 583 zeigt ein Triebstockrädchen von sechs Zähnen im Eingriff mit einem 24 zähligen Rade. Die Stöcke im Getriebe oder „Trieb“ haben eine Dicke $= t/3$. Die Fussflanken am 24er Rade sind geradlinig gemacht, um das Fräsen der Zähne und das Nachfeilen derselben zu erleichtern.

Triebstockverzahnung für inneren Eingriff. Fig. 584. Ganz ähnliches Verfahren wie vorhin. Das Zahnprofil cd ist eine Parallele zu der Inradlinie Si , erzeugt durch Wälzen von T in T_1 , Bogen $Sb = ib$; SI Eingriffstrecke, gleich dem Eingriffsbogen, also $\geq 1,1t$ zu machen. Das Fussprofil da ist hier wiederum radial gemacht. In Fig. 585 sind die Triebstöcke an dem Hohlrade angebracht, Profil cd ist parallel zu der Umrادlinie Sa , erzeugt durch Wälzen von T um T_1 ; Bogen $Sb = ab$; SI Eingriffstrecke, gleich dem Eingriffsbogen, wie oben, und $\geq 1,1t$ zu machen; di radiales Fussprofil.

Fig. 584.

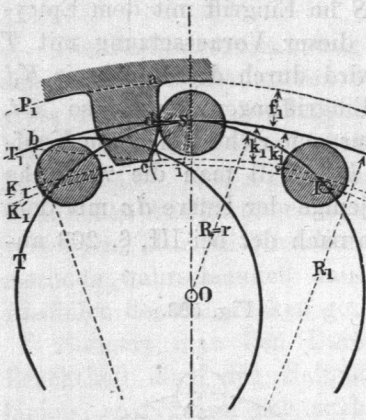
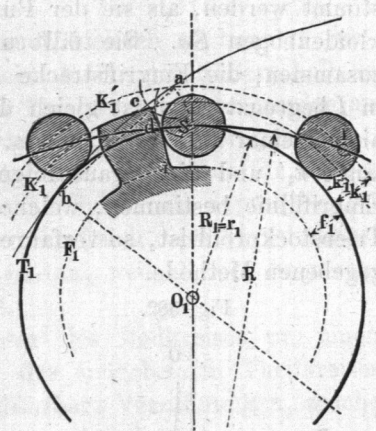


Fig. 585.

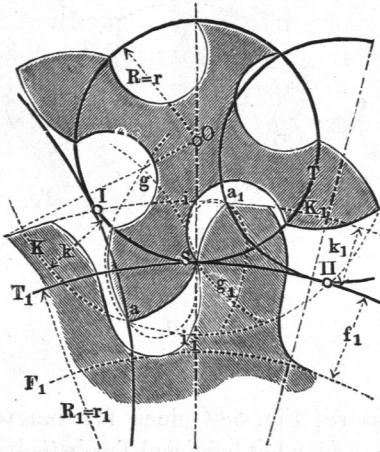


Lässt man in Fig. 584 den Radius R_1 unendlich gross werden, so entsteht der Zahnstangenmechanismus, bei welchem die Zahnprofile an der Zahnstange Parallelen zu gemeinen Radlinien werden. Wenn dagegen bei Fig. 585 R unendlich gross gemacht wird, erhält die entstehende Zahnstange eine sehr bequeme Form (Stockleiter), sodass die Konstruktion der ersteren vorzuziehen ist; an dem Rade werden die Zahnprofile Parallelen zu Kreisevolventen.

Die Triebstockverzahnungen haben für präzise Ausführungen, welche sich nicht oft wiederholen, den Vortheil, dass man die Triebstöcke so leicht genau herstellen kann (auf der Drehbank); die erwähnten leiterförmigen Zahnstangen, aus Schmiedeisen hergestellt, sind zudem sehr praktisch namentlich für Windwerke, welche dem Frost ausgesetzt sind, wie die an Schleusen, Drehbrücken, Drehthürme, an Sternwarten u. s. w. Die Stäbe können dabei aus unabgedrehtem, nur recht sauber gewalztem Rundeisen gemacht werden.

Doppelte Punktverzahnung. Fig. 586. Verbindet man zwei Punktverzahnungen miteinander, so erhält man eine Verzahnung, welche ein sehr tiefes Herabgehen der Zähnezahls des

Fig. 586.



einen Rades, also eine starke Uebersetzung bei kleinen Abmessungen der Räder gestattet. Hier sind beide Theilkreise zugleich Radkreise. Sa Aufradlinienbogen, erzeugt durch Wälzen von T_1 auf T , eingreifend auf der Strecke SI mit dem Punkte S des Rades T ; Sa_1 Aufradlinienbogen, erzeugt durch Wälzen von T auf T_1 , eingreifend auf der Strecke SII mit dem Theilkreispunkte S des Rades T_1 . Si Fussprofil, angelehnt an das theoretische Lückenprofil Sa_1g_1 (siehe IV.

§. 203), Si_1 Fussprofil des anderen Rades, ebenso an das theoretische Lückenprofil Sag gelehnt. — Unter Voraussetzung der Seitenscheiben ist das kleine Rad gut zu brauchen; Ausführungen ähnlicher Art zeigen die Wagenwinden oder sogenannten Domkräften und verwandte Hebezeuge.

§. 211.

Schildräder mit Punktverzahnung.

Man ist nicht gebunden, die Zahnprofile in unmittelbarer Nähe der Theilkreise anzubringen, sondern kann sie auch mehr oder weniger ausser- oder innerhalb verlegen. Thut man dies, so entstehen Verzahnungen, bei welchen die Zähne des einen Rades die des andern ganz oder fast ganz umlaufen, sodass ein Radboden nicht anzubringen ist. Solche Räder lassen sich konstruktiv so ausführen, dass man die Zähne seitlich von einer, etwa als Ebene gestalteten Wandfläche des Radkörpers vorspringen lässt, vergleichsweise wie die Buckel eines Schildes. Räder von dieser Bauart, welche auch bei den obigen Beispielen an-

wendbar sein würde, kann man Schildräder nennen*). Punktverzahnung eignet meistens sich sehr gut für dieselben. Fig. 587

Fig. 587.

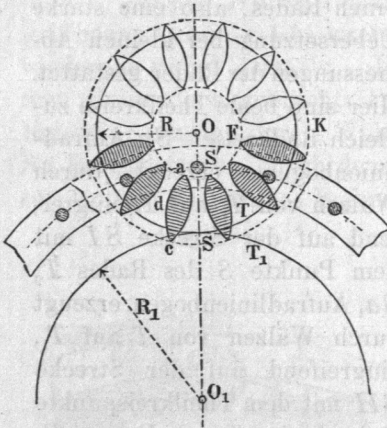
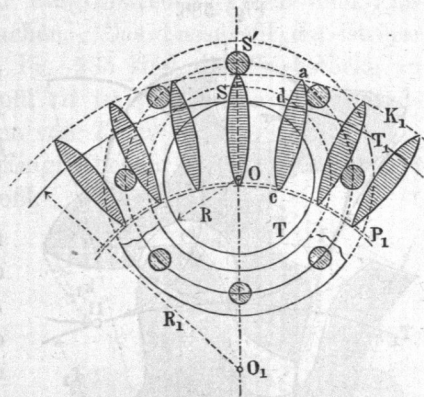
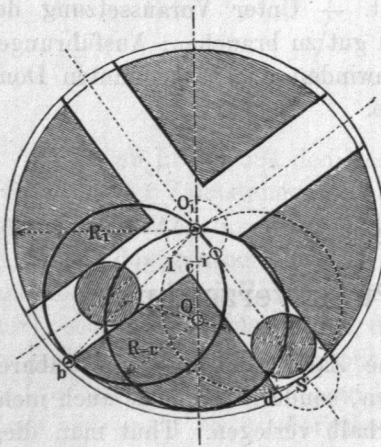


Fig. 588.



zeigt ein Schildräderpaar für äussere, Fig. 588 eines für innere Theilkreisrollung. Eines der beiden Räder hat beidemal Triebstöcke,

Fig. 589.



das andere bekommt als Zahnprofil im ersteren Falle Parallelen zu verlängerten Epicykloiden, im anderen Falle solche zu verlängerten Hypocykloiden. Ein bemerkenswerthes Schildräderpaar ist das in Fig. 589 dargestellte. Innerer Eingriff $R = \frac{1}{2} R_1$, $\mathfrak{Z} = 2$, $\mathfrak{Z}_1 = 4$; an R die Triebstöcke. Die Flanken an R_1 fallen ganz innerhalb des Theilkreises und werden Geraden, nämlich Parallelen zu der in eine Gerade übergegangenen Inradlinie $Si\dots$ Eingriffbogen

beinahe $2t$, weil die Flanke an R_1 sowohl einwärts als auswärts durchlaufen wird. Der Spielraum ist leicht auf Null zurückzuführen; die Zähne an R werden meist als Rollen ausgeführt. Das

*) Die Bezeichnung *Scudi dentati*, verzahnte Schilde, findet sich für schildförmige Triebstockräder in Zonca's Teatro di Machine, Padua 1621.

grössere Rad kann wegen seiner Form ein Kreuzschleifenrad genannt werden.

Lässt man bei innerem Eingriff den Achsenabstand OO_1 bestehen, die Halbmesser aber unbeschränkt wachsen, so gehen sie in unendliche Länge über und die Theilkreise entziehen sich der Verzeichnung. Die Räder erhalten gleiche Winkelgeschwindigkeit bei gleichem Drehungssinn. Sie lassen sich als Schildräder zur Ausführung bringen, wie Fig. 590 zeigt. Beide Räder erhalten Triebstockzähne, von denen die zusammenarbeitenden zur Summe ihrer

Fig. 590.

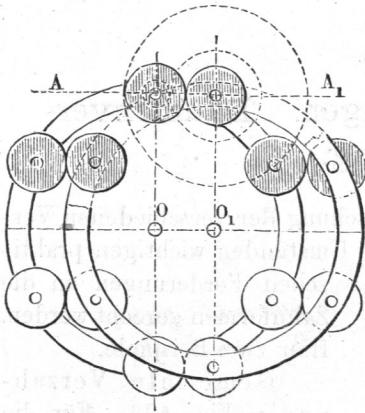
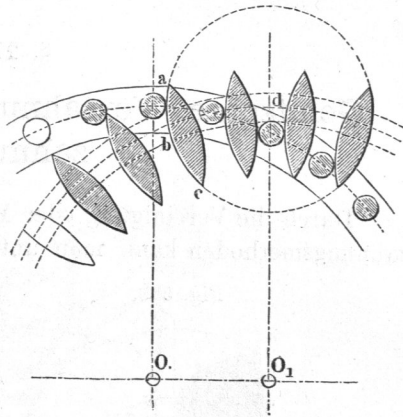
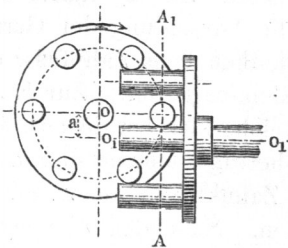


Fig. 591.



Halbmesser den Abstand OO_1 haben. Hier sind die Halbmesser gleich gemacht, jedoch auch zwei Paare ungleicher Triebstöcke durch Punktirung angedeutet. Leicht ist es, die Räder als Rollen und spielfrei auszuführen. Dieselben kann man, da sich parallele Radien beider Räder stets parallel bleiben, Parallelräder nennen*).

Fig. 592.



Eine zweite Form der Parallelräder zeigt Fig. 591. abc Kreisbogen, einem der vier Segmente des mit dem Halbmesser da beschriebenen Triebstockprofils am Rade O_1 angehörig.

Wenn man die beiden Parallelräder aus Fig. 590 gegenseitig um die Achse AA_1 verstellt, welche

*) Die Räder und der Name für dieselben vom Verfasser vorgeschlagen, Berl. Verhandl. 1875, S. 294.

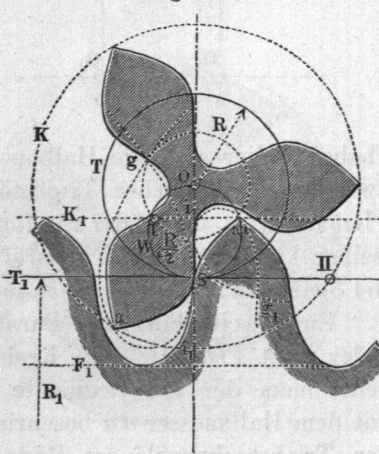
normal durch zwei benachbarte Triebstockachsen und parallel OO_1 geführt wird, so bleibt der Eingriff richtig. In Fig. 592 (a. v. S.) sind zwei so bis zum rechten Winkel verstellte Parallelräder dargestellt. Ihre Achsen sind geschränkt, weshalb sie streng genommen weiter unten erst anzuführen sein würden. Dieses geschränkte Räderwerk ist bekannt*), indess wenig angewandt; es eignet sich vielleicht recht gut für die Uebertragung der Uhrzeigerbewegung an Grossuhren, wenn die Zähnezahl 20 bis 24 gewählt wird.

§. 212.

Gemischte Verzahnungen. Daumenverzahnung.

Durch die Vereinigung oder Mischung der verschiedenen Verzahnungsmethoden kann man unter Umständen wichtigen praktischen Forderungen an die Zahnformen gerecht werden. Hier zwei Beispiele.

Fig. 593.



Gemischte Verzahnung, Fig. 593. Für die Anfertigung der vorhin genannten kleinen Trieblinge für Hebezeuge ist es sehr zweckmässig, wenn das Fussprofil nicht gar zu sehr unterschritten erscheint. Für diesen Zweck eignet sich die Anwendung der Geradflanken beim Zahnfusse des kleinen Rades. Zur Erzielung

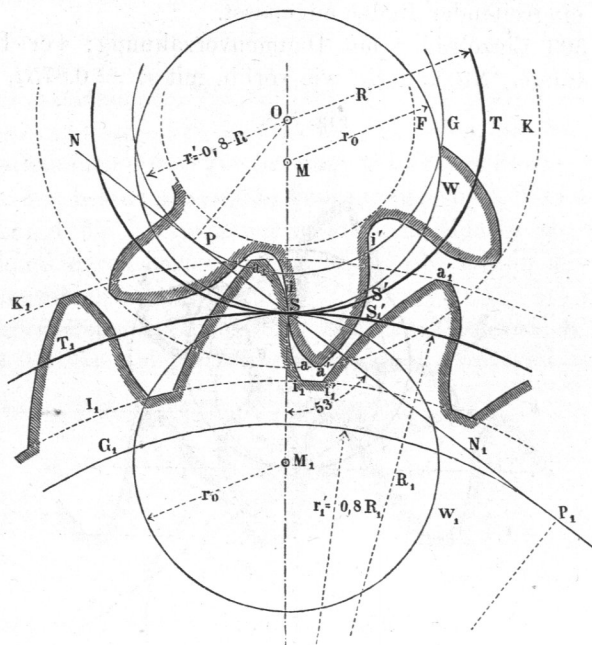
einer genügenden Eingriffdauer (welche hier bei dem Dreierad mit Zahnstange immer noch 1,15 beträgt) müssen dann freilich auch am eingreifenden Rade die Zahnkurven am Zahnkopf bis zu ihrem Durchschnitt geführt werden. Sa Fadenlinienbogen,

*) Vergl. Tom Richard's Aide-mémoire (1848) I, S. 656, Willis, Principles of mechanisms (1851) S. 145, Laboulaye Cinématique (1854) S. 275.

erzeugt durch Wälzen des (hier geradlinigen) Theilrisses T_1 der Zahnstange auf T , S_i geradlinige radiale Fussflanke, erzeugt durch Wälzen des Kreises W vom Halbmesser $\frac{1}{2}R$ in T , $S a_1 g_1$ theoretisches Profil der Lücke des Rades T . $S a$ greift mit dem Punkte S der Zahnstange auf der Strecke SII . $S a_1$ Radlinienbogen, erzeugt durch Wälzen von W auf T_1 greifend auf der Strecke SI mit der Fussflanke S_i des Rades T .

Daumenverzahnung. Durch Mischung der Radlinien- mit der Evolventenverzahnung, jede auf je einer der beiden Zahnflan-

Fig. 594.



ken angewandt, lässt sich dem Zahne ein für seine Festigkeit sehr günstiges Profil geben. Dasselbe ist für den Betrieb ebenfalls ganz günstig, wenn die Bewegungs-, beziehungsweise Kraftübertragung hauptsächlich in einem und demselben Drehungsinne stattfindet*). Wegen der Form, welche die Zähne erhalten, kann

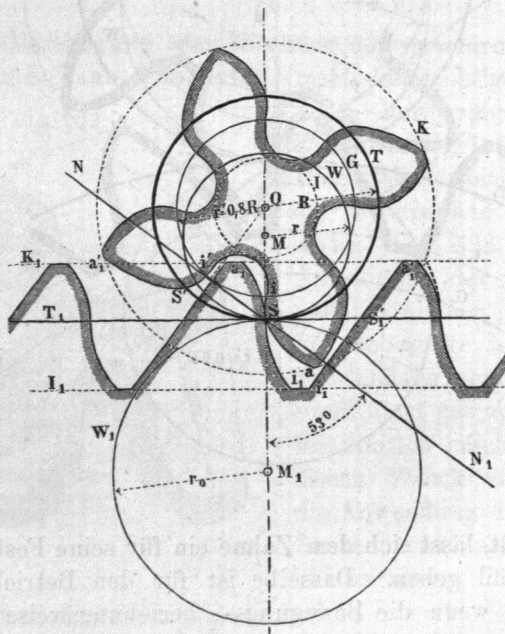
*) Die vorliegende gemischte Verzahnung in dem hier vorgetragenen Sinne wurde schon 1851 von Willis vorgeschlagen; 1876 hat Gee sie wieder aufgenommen und in die Praxis einzuführen versucht; er wählte α weit grösser, d. i. ungünstiger, als hier geschehen ist (68°).

man die Verzahnung Daumenverzahnung nennen. Die folgenden Verhältnisse sind so günstig gewählt, als es für die gewöhnlichen Fälle erreichbar erschien, und auch wohl ausreichend ist.

Fig. 594 (a. v. S.), Satzräder mit Daumenverzahnung. aSi und $a_1S_1i_1$ nach Radlinien gestaltete Profile, die eigentlichen Druckprofile, gemäss den Regeln in §. 207, wobei $r_0 = 0,875t$ oder $2,75(t:\pi)$. $\alpha'S'i'$ und $\alpha_1'S_1'i_1'$ Evolventenbogen zu den Grundkreisen $r' = 0,8R$ und $r_1' = 0,8R_1$, wobei der Grundkreiswinkel $= 53^\circ$ (strenger $= 53^\circ 8'$) wird. Bei den Rädern mit weniger als 15 Zähnen werden, wie hier beim siebenzähligen Rade, die Fussflanken nach der in §. 203 gegebenen Methode den Kopfbahnen grösserer eingreifender Räder angepasst.

Fig. 595 Einzelräder mit Daumenverzahnung; 4er-Rad mit der Zahnstange. Sa und S_1i_1 wie vorhin mit $r_0 = 0,875t$, Si und

Fig. 595.



Sa_1 aber mit $r = \frac{3}{4}R$ erzeugt; die Evolventenbogen wie vorhin mit dem Grundkreiswinkel 53° gefunden. An der Zahnstange werden die Rückenflanken wieder gerade Linien, als Evolventen von unendlich grossem Grundkreis; Neigung gegen den Theilriss 53° . Vergl. wegen der Anwendungen der Daumenverzahnung §. 226.

§. 213.

Zahnreibung bei den Stirnrädern.

Die Reibung der Stirnradzähne hängt sehr wesentlich von der Verzahnungslinie ab und lässt sich aus Form, Ausdehnung und Lage der Eingriffkurve beurtheilen. Im Allgemeinen wächst die Reibung mit der Eingriffdauer ε . Wegen der Lage der Eingriffslinie führt ε einen Koeffizienten bei sich, welcher $= \frac{1}{2}$ ist, wenn, wie durchschnittlich bei unserer Radlinienverzahnung, die Eingriffsbogen gleichmässig zu beiden Seiten der Centrale vertheilt sind; er ist $= 1$, wenn wie bei manchen Verzahnungen, z. B. den Triebstockverzahnungen, die Eingriffslinie ganz auf einer Seite der Centrale liegt; er kann $= \frac{3}{4}$ gesetzt werden, wenn, wie bei der Evolventenverzahnung, die Vertheilung der Eingriffslinie die Mitte zwischen den beiden genannten Anordnungen hält. Von den Zähnezahlen hängt die Zahnreibung in starkem Maasse ab, indem sie proportional deren harmonischem Mittel ist, mithin mit wachsenden Zähnezahlen rasch abnimmt.

Beim Reibungskoeffizienten f und den Zähnezahlen z und z_1 hat man für den Arbeitsverlust p_r durch die Zahnreibung:

$$\left. \begin{array}{l} \text{a) bei der Radlinienverzahnung:} \\ p_r = \pi f \left(\frac{1}{z} \pm \frac{1}{z_1} \right) \frac{\varepsilon}{2} \cdot \cdot \cdot \cdot \\ \text{b) bei der Evolventenverzahnung:} \\ p_r = \pi f \left(\frac{1}{z} \pm \frac{1}{z_1} \right)^{3/4} \varepsilon \cdot \cdot \cdot \cdot \\ \text{c) bei der Triebstockverzahnung*):} \\ p_r = \pi f \left(\frac{1}{z} \pm \frac{1}{z_1} \right) \varepsilon \cdot \cdot \cdot \cdot \end{array} \right\} \cdot \cdot \cdot \cdot (191)$$

Der Koeffizient f selbst ist auch bei gut eingefetteten Rädern nicht klein, da der Flächendruck in der Regel hoch ist; meistens passend ist $f = 0,15$, bei neuen und trocken gehenden Rädern indessen steigt f auf 0,20 bis 0,25 und höher. Das Minuszeichen in der Formel wird gebraucht, wenn ein Hohlrad (z_1) im Paare vorkommt.

*) Annähernd.

1. *Beispiel.* Bei einem Paare siebenzähliger Räder mit Radlinienverzahnung ist $\varepsilon = 1,225$. Bei $f = 0,15$ hat man nach (191 a) für den Verlust durch Zahnreibung: $p_r = 3,14 \cdot 0,15 \cdot 2 \cdot 1,225 : 2 \cdot 7 = 0,08243 \sim 8\frac{1}{4}$ Proz.

2. *Beispiel.* Radlinienverzahnung. $\mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}_1 = 40$. Hier ist $\varepsilon = 1,44$, und kommt: $p_r = 3,14 \cdot 0,15 \cdot 2 \cdot 1,44 : 2 \cdot 40 = 0,016995 \sim 1,7$ Proz.

3. *Beispiel.* Radlinienverzahnung. $\mathfrak{Z} = 7$, $\mathfrak{Z}_1 = -60$ (Hohlrad). Hier ist $\varepsilon = 1,40$ und demnach $p_r = 3,14 \cdot 0,15 \cdot 0,7 (\frac{1}{7} - \frac{1}{60}) \sim 4,2$ Proz.

4. *Beispiel.* Radlinienverzahnung. $\mathfrak{Z} = 7$, $\mathfrak{Z}_1 = \infty$ (Zahnstange). Hier ist $\varepsilon = 1,37$, und somit $p_r = 3,14 \cdot 0,15 \cdot 1,37 : 2 (\frac{1}{7} + 0) \sim 4,6$ Proz.

5. *Beispiel.* Triebstockverzahnung $\mathfrak{Z} = 6$, $\mathfrak{Z}_1 = 40$. Hier sei, wie in Fig. 583 durch die Konstruktion bewirkt, $\varepsilon = 1\frac{1}{6}$. Es folgt nach (189 c): $p_r = 3,14 \cdot 0,15 \cdot 1\frac{1}{6} : (\frac{5}{24}) \sim 2,6$ Proz.

6. *Beispiel.* Evolventenverzahnung. $\mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}_1 = 40$. Hier ist $\varepsilon = 1,92$. Dies gibt nach (180 c): $p_r = 3,14 \cdot 0,15 \cdot 2 \cdot 0,75 \cdot 1,92 : 40 = 0,0339 \sim 3,4$ Proz., d. i. zweimal soviel als im 2. Beispiel.

Man sieht also, dass von den behandelten die Radlinienverzahnung die kleinste Reibung hat, die Evolventenverzahnung in der Mitte, die Triebstockverzahnung am ungünstigsten steht.

Die Abnützung der Zähne hängt ausser vom Reibungskoeffizienten vom Drucke der Zahnflanken aufeinander und von dem Verhältniss der übereinander hingleitenden Profiltheile ab. Sie ist deshalb bei konstantem Zahndrucke nicht ohne weiteres konstant, und es ist ein grosser Irrthum, wenn man, wie häufig geschieht, annimmt, dass bei der Evolventenverzahnung die Abnützung die Zahnform nicht ändere. Im Gegentheil findet gerade bei dieser Verzahnung verhältnissmässig die stärkste Formänderung durch die Abnützung statt, indem hier das geriebene Flankenstück innerhalb des Theilkreises gegen das darauf reibende des anderen Zahnkopfes besonders klein ist. Man kann die Richtigkeit des Gesagten in der Praxis vielfach beobachten, wo das kleinere Rad in einem mit Evolventenverzahnung versehenen Paare oft tiefe Kerben dicht unter dem Theilkreis zeigt. Die Radlinienverzahnung ist auch in diesem Punkte die günstigere.

Schliesslich sei noch bemerkt, dass man die oben berechneten Reibungsverluste auch geometrisch auffinden kann, und zwar wie folgt. Man bilde die Differenzen der zusammenarbeitenden Profiltheile, dividire dieselben durch die zugehörigen Sehnen der Eingrifflinienbogen, multiplizire sie mit dem Verhältniss des zugehörigen Eingriffbogens zur ganzen Eingriffstrecke, und multiplizire die Summe der erhaltenen Quotienten mit dem Reibungskoeffizienten. Das Resultat ist der Verlust p_r . Die genannte Sehne ist bei der Evolventenverzahnung die Eingriff-

strecke selbst. Die Regel liefert p_r auch für die Punktverzahnungen; sie gibt dem Zeichner das Mittel an die Hand, beim Auftragen der Verzahnung deren Reibungsverlust gleichsam mit dem Zirkel abzustechen.

§. 214.

Vor- und Nachteile der behandelten Verzahnungsmethoden.

Jede von den beiden Satzräderverzahnungen hat ihre Vorzüge und ihre Nachteile.

Radlinienverzahnung. Sie gewährt den grossen Vortheil, dass man bei ihr für gleichgrosse Räder mit der Zähnezahlszahl bis auf 7 herabgehen kann, während bei der Evolventenverzahnung die kleinsten gleichgrossen Räder 14 Zähne haben müssen, man auch die Zähnezahlszahl bei der Evolventenverzahnung nicht unter 11 nehmen darf. Der Reibungsverlust ist bei dieser Verzahnung verhältnissmässig sehr klein, die Abnützung wenig nachtheilig für die Zahnform. Als ein kleiner Nachtheil ist zu betrachten, dass die Zahnprofile eine S-förmige Krümmung haben, was die Anfertigung erschwert; auch können zusammenarbeitende Räder nicht viel auseinandergerückt werden, ohne den genügend richtigen Eingriff einzubüssen.

Evolventenverzahnung. Vortheile sind: vor allem die einfache Form der Zähne und sodann die Eigenschaft, dass man die Räder auseinanderdrücken darf, ohne die Richtigkeit des Eingriffes zu beeinträchtigen. Diesen Vorzügen stellt sich aber der oben besprochene Nachtheil entgegen, vermöge dessen bei kleinen Zähnezahlen der Zahnkopf nach Beendigung des richtigen Eingriffstückes eine solche Bahn gegen den ihn angreifenden Zahn oder genauer gegen dessen radialen Fuss beschreibt, dass er ihm eine unrichtige Geschwindigkeit ertheilt. Der Uebelstand wird ausser durch die oben angegebenen Mittel bei fertigen Rädern gehoben, wenn man die betreffenden Räder auseinanderdrückt, und zwar so weit, dass bei beiden Rädern die Zähne wenigstens gleichzeitig aus der Eingriffslinie treten. Somit trägt die Verzahnung das Heilmittel für ihren Fehler zwar in sich selbst; allein für starke Kraftübertragung sind doch, namentlich wo Stösse häufig

sind, so gesperrt gehende Räder nicht geeignet, beziehlich die kleinen Zähnezahlen zu vermeiden.

So wird also für die Satzräder die Evolventenverzahnung nur bei grösseren Zähnezahlen (wo etwa das kleinere Rad im Paare nicht unter 30 Zähne hat) zu empfehlen sein, wo ihre guten Eigenschaften sich dann gut verwerthen lassen, während für Räder mit kleinen, unter Umständen möglichst kleinen Getrieben die Radlinienverzahnung den entschiedenem Vorzug verdient. Da diese ausserdem auch für grosse Zähnezahlen vortrefflich ist und in Bezug auf Reibung und Abnützung sehr günstig steht, so empfiehlt es sich, bei neuen Fabrikanlagen nur sie allein für die Satzräder, insbesondere die Stirnräder, in Anwendung zu bringen. Für manche Einzelräder und sodann für die Kegelräder, welche in der Regel nicht Satzräder sind, eignet sich indessen der einfachen Form wegen die Evolventenverzahnung auch sehr gut. Vergl. auch §. 222.

Die Punktverzahnungen und die gemischten leisten für besondere Fälle, namentlich bei Hebzeugen und anderen Windwerken, wo unter Umständen als Zahnmaterial Schmiedeisen und Stahl gebraucht wird, ausgezeichnete Dienste. Die Daumenverzahnung kann auch in Triebwerken recht nützlich werden, da sie geringere Zahndicken anzuwenden erlaubt, als die anderen.

Die Schildräder haben eine beschränkte Verwendung; doch erweisen sie sich in mancherlei Mechanismen sehr nützlich, wovon noch weiter unten die Rede sein wird (Kapitel XVIII).

B. Verzahnung der Kegelräder.

§. 215.

Allgemeines über die Kegelradzähne.

Bei den Kegel- oder Winkelrädern liegen die berührenden Verhältnisskreise zusammenarbeitender Räder in den Grundkegeln, deren Spitzen im Schnittpunkt der geometrischen Achsen der Räder zusammentreffen. Unter den Theilkreisen verstehen wir die an den Grundflächen der Grundkegel liegenden berührenden Verhältnisskreise SD und SE , Fig. 596. Die Zahnlänge wird auf dem Ergänzungskegel des Grundkegels gemessen; SB ist die Kante des Ergänzungskegels zu SD , SC diejenige zu SE , wobei