man für die gleichbelastete gusseiserne Achse die Achsenkopfdicke aufsucht (siehe §. 130 ff.) und diese mit 1,55 (d. i. mit der $\sqrt[3]{}$ aus dem Verhältniss der Tragmodel 7,5 für Gusseisen, 2 für Holz) multiplizirt. Der so erhaltene Durchmesser kann für einzelne Fälle zu klein ausfallen, wenn nämlich etwa die Arme in den Achsenkörper eingesteckt, überhaupt der Baum verschwächt werden muss, reicht aber bei Belastung des vollen Querschnittes aus. Fällt er kleiner aus, als es die Zapfenverbindung, siehe §. 102, verlangt, so ist der von dieser geforderte Durchmesser des Achsenschenkels für die ganze Achse maassgebend. Die Wahl zwischen eisernen und hölzernen Wasserradachsen muss sich nach lokalen Preisen und Verhältnissen richten.

*Beispiel. Eine Wasserradachse von 2700 mm Schenkellänge sei so belastet, dass sie gusseiserne Zapfen von 90 mm Dicke und danach von 135 mm Länge erhalten müsse. Gemäss §. 130 ist dann die Achsenkopfdicke zu nehmen:* $D = 90 \,.\, \sqrt{2700:68} \sim 90 \,.\, \sqrt[3]{40} = 308$ *mm. Bei der Ausführung in Holz ist daher mindestens zu machen:* $D' = 1{,}55 \,.\, 308 = 477$ *mm.*

Neuntes Kapitel.

# WELLEN.

§. 144.

## Berechnungsart der cylindrischen Wellen.

Der Maschinenbau versteht unter Wellen diejenigen Achsen, welche verdrehende Kraftmomente zu übertragen bestimmt sind. Dieselben müssen für diesen Zweck solche Abmessungen erhalten, dass sie 1) fest genug sind, und dass sie 2) durch die verdrehende Kraft nicht zu stark verwunden werden. In der Regel erfahren die Wellen ausser der Beanspruchung auf Drehung auch noch solche auf Biegung durch die Gewichte und Pressungen der auf ihnen sitzenden Räder, Rollen, Hebel u. s. w. Vorerst soll indessen hierauf keine Rücksicht genommen und auch nur für die vollen cylindrischen schmied- und gusseisernen Wellen die Berechnungsart angegeben werden.

Es bezeichne für eine solche Welle:

$P$ die verdrehende Kraft,

$R$ den Hebelarm, an welchen sie angreift,

$N$ die Anzahl der Pferdestärken, welche die Welle überträgt,

$n$ die Anzahl ihrer minutlichen Umdrehungen,

$d$ den Wellendurchmesser,

$L$ die Länge der Welle (ausnahmsweise) in Meter,

$\vartheta^0$ den Verdrehungswinkel in Graden,

$\mathfrak{S}$ die durch die Verdrehung am Wellenumfang hervorgerufene Spannung,

$G$ den Drehungsmodul ($^2/_5$ des Elastizitätsmoduls) des Materials,

so ist zu nehmen bei blosser Berücksichtigung der Festigkeit:

$$d = \sqrt[3]{\frac{16}{\pi \mathfrak{S}} P R} \quad \ldots \ldots \quad (129)$$

und bei blosser Berücksichtigung der Verdrehung:

$$d = \sqrt[4]{\frac{32}{\pi G} \frac{1000 \,.\, L}{\vartheta^0} \frac{360}{2\pi} P R} \quad \ldots \quad (130)$$

Um dieselbe Sicherheit bei den Wellen anzuwenden, welche bei den Zapfen gebraucht wurde, dürfte $\mathfrak{S}$ (vergl. §. 5) nur $^4/_5$ der dort eingeführten Spannung betragen; man findet indessen in guten Ausführungen die Spannungen selbst so hoch wie jene, weshalb wir für Schmiedeisen $\mathfrak{S} = 6$, für Gusseisen $\mathfrak{S} = 3$ einführen können. Hiermit erhält man bei blosser Rücksicht auf die Festigkeit

für schmiedeiserne Wellen

$$d = 0{,}95 \sqrt[3]{P R} = 84{,}7 \sqrt[3]{\frac{N}{n}} \quad \ldots \quad (131)$$

für gusseiserne Wellen

$$d = 1{,}19 \sqrt[3]{P R} = 106{,}7 \sqrt[3]{\frac{N}{n}} \quad \ldots \quad (132)$$

In Bezug auf die Verdrehung ist es zweckmässig, den Verdrehungswinkel $\vartheta$ nicht über $^1/_4{}^0$ auf den laufenden Meter zu machen, d. i. zu setzen $\vartheta^0 = 0{,}25\, L$. Hiermit erhält man aus (132) bei blosser Rücksicht auf die Verdrehung:

für schmiedeiserne Wellen:

$$d = 4{,}13 \sqrt[4]{P R} = 120 \sqrt[4]{\frac{N}{n}} \quad \ldots \quad (133)$$

und für gusseiserne Wellen:

$$d = 4{,}91 \sqrt[4]{PR} = 143 \sqrt[4]{\frac{N}{n}} \quad \ldots\ldots \quad (134)$$

Hierzu sei bemerkt, dass sich der sogenannte Effektquotient $\frac{N}{n}$ aus dem statischen Momente $PR$ nach dem Ausdrucke

$$PR = \frac{60 \,.\, 75 \,.\, 1000}{2\pi} \frac{N}{n} = 716198 \frac{N}{n} \backsim 716200 \frac{N}{n} \quad (135)$$

berechnet. Nach den vorstehenden Formeln ist die folgende Tabelle über die schmiedeisernen Wellen berechnet. Sie zeigt, dass eine Welle zwar eine völlig genügende Sicherheit gegen bleibende Formänderung haben kann und trotzdem viel zu dünn sein kann, um eine genügend kleine Verwindung durch ihre Beanspruchung zu erfahren. Würde z. B. eine 8 m lange Welle an einem Ende mit einer verdrehenden Kraft von 100 kg an einem Arme von 500 mm angegriffen, und hätte die Aufgabe, dieses Drehmoment von 50 000 kg $\times$ mm am anderen Ende abzugeben, so würde sie nach Z. 2 fest genug sein bei 35 mm Dicke. Dieselbe Zeile Spalte 4 zeigt aber, dass dann diese Welle nahe 10 mal zu stark auf Verdrehung beansprucht wäre, also nach dem Obigen eine Verwindung von $10 \,.\, 8 \,.\, {}^1\!/_4 = 20^0$ erfahren würde. Soll die Verdrehung die oben angenommene von ${}^1\!/_4{}^0$ auf den laufenden Meter sein, so hat man nach Zeile 7 bis 8, Spalte 4, eine Wellendicke von etwa 63 mm zu wählen, was nach Spalte 2 ungefähr einer Versechsfachung ihrer Festigkeit entspricht.

Die Rücksicht auf den Verdrehungswinkel ist bei kurzen Wellenstücken, z. B. Wellenhälsen zwischen zwei Rädern u. s. w., unwichtig, weil bei diesen $\vartheta$ meist von selbst klein genug ausfällt. Man hat im Grunde genommen in jedem besonderen Falle die Länge der Welle, beziehentlich die Wichtigkeit der Vermeidung grosser Verdrehungswinkel in Betracht zu ziehen.

Für die gusseisernen Wellen kann man die Tabelle ebenfalls benutzen, indem man den zu ermittelnden Werth von $d$ bei dem Zweifachen des gegebenen Werthes von $PR$ oder $N:n$ sucht.

Für Gussstahl würde, da dessen Tragmodul ${}^5\!/_3$ mal so gross ist, also der des Schmiedeisens, die auf blosse Festigkeit berechnete Welle $\sqrt[3]{0{,}6}$ d. i. 0,84 mal, die auf blosse Verdrehung berechnete $\sqrt[4]{0{,}6}$ d. i. 0,88 mal so dick zu nehmen sein, als die gleichwerthige schmiedeiserne Welle.

Anmerkung: Wellen, welche starken Wechseln von lebendigen Kräften ausgesetzt sind, wie z. B. die Mühlspindeln (Mühleisen) finden sich bedeutend stärker ausgeführt, als obige Formeln angeben; sie sind besondere Konstruktionen, welche sich den allgemeinen Vorschriften, die wir hier vor uns haben, entziehen.

§. 145.

# Schmiedeiserne Wellen.

| $d$ | Auf Festigkeit berechnet | | Auf Verdrehung berechnet (Triebwellen) | |
|---|---|---|---|---|
| | $PR$ | $\frac{N}{n}$ | $PR$ | $\frac{N}{n}$ |
| 30 | 32 968 | 0,046 | 2 776 | 0,004 |
| 35 | 50 511 | 0,071 | 5 142 | 0,007 |
| 40 | 75 398 | 0,105 | 8 773 | 0,012 |
| 45 | 107 354 | 0,150 | 14 053 | 0,020 |
| 50 | 147 263 | 0,206 | 21 482 | 0,030 |
| 55 | 196 096 | 0,274 | 31 359 | 0,044 |
| 60 | 254 470 | 0,355 | 44 413 | 0,062 |
| 65 | 323 536 | 0,452 | 61 173 | 0,085 |
| 70 | 404 088 | 0,564 | 82 280 | 0,115 |
| 75 | 497 012 | 0,694 | 108 430 | 0,151 |
| 80 | 603 187 | 0,842 | 140 367 | 0,196 |
| 85 | 723 501 | 1,010 | 178 888 | 0,250 |
| 90 | 858 835 | 1,199 | 224 842 | 0,314 |
| 95 | 1010 073 | 1,411 | 279 126 | 0,390 |
| 100 | 1178 100 | 1,645 | 342 694 | 0,478 |
| 110 | 1568 051 | 2,19 | 501 738 | 0,71 |
| 120 | 2035 756 | 2,84 | 710 610 | 0,99 |
| 130 | 2588 286 | 3,61 | 978 768 | 1,37 |
| 140 | 3232 706 | 4,51 | 1316 493 | 1,84 |
| 150 | 3976 088 | 5,55 | 1734 888 | 2,42 |
| 160 | 4825 498 | 6,74 | 2245 879 | 3,14 |
| 170 | 5788 005 | 8,08 | 2862 215 | 4,00 |
| 180 | 6870 679 | 9,59 | 3597 465 | 5,02 |
| 190 | 8080 588 | 11,28 | 4466 022 | 6,24 |
| 200 | 9424 800 | 13,16 | 5483 104 | 7,66 |
| 220 | 12541 231 | 17,51 | 8027 813 | 11,21 |
| 240 | 16286 054 | 22,74 | 11369 764 | 15,88 |
| 260 | 20706 285 | 28,91 | 15660 293 | 21,87 |
| 280 | 25861 651 | 36,11 | 21063 892 | 29,41 |
| 300 | 31808 700 | 44,41 | 27758 214 | 38,76 |
| 320 | 38603 981 | 53,90 | 35968 477 | 50,16 |
| 340 | 46304 042 | 64,66 | 45765 433 | 63,88 |
| 360 | 54965 434 | 76,75 | 57559 433 | 80,29 |

*1. Beispiel. Eine Krankette von 2700 k Belastung wirkt an einer Kettentrommel von 185 mm (gemessen bis zur Kettenmitte); wie dick ist die schmiedeiserne Achse der Trommel wegen der zu übertragenden Torsion zu nehmen? Hier ist $PR = 2700 \,.\, 185 = 499500$, und deshalb, da hier nur die Festigkeit zu berücksichtigen ist, gemäss Spalte 2, Zeile 10 zu nehmen: $d = 75$ mm, welche Abmessung der Biegungsbelastung wegen noch um etwas zu erhöhen sein wird (vergl. §. 152).*

*2. Beispiel. Eine Turbine überträgt 92 Pferdestärken mittelst einer liegenden schmiedeisernen Welle von 114 minutlichen Umdrehungen und einer Länge von 2,6 m; die der Welle zu gebende Dicke wird gesucht. Hier ist $N : n = 92 : 114 = 0{,}807$. Dies gäbe bei blosser Rücksicht auf die Festigkeit nach Spalte 3, Zeile 10 bis 11 die Dicke $d =$ nahe 78 mm. Will man aber die Verwindung auf $\frac{1}{4}^0$ pro Meter, also im Ganzen auf $2{,}6 : 4 = 0{,}65^0$ einschränken, so hat man gemäss Spalte 5, Zeile 16 bis 17 $d = 115$ mm zu nehmen. Eine Ausführung*) für ganz ähnliche Urangaben zeigt $d = 135$ mm, sodass daselbst eine noch kleinere Verwindung vorgesehen ist, wobei übrigens auch den biegenden Belastungen Rechnung getragen sein mag. Jedenfalls aber wäre bei $d = 115$ die Festigkeit schon $(115 : 78)^3$ d. i. 3,18 mal höher, als im ersten Falle.*

## §. 146.

# Triebwerkwellen.

Bei der vorstehenden Berechnung der Wellendicken werden die etwa auftretenden biegenden Kräfte unberücksichtigt gelassen. In der That aber fehlen dieselben selten, nämlich nur dann, wenn reine Kräftepaare das verdrehende Moment liefern. Die Wellen der Fabriktriebwerke sind in den meisten Fällen biegenden Kräften durch Riemenspannungen, Zahnräderpressungen und -Gewichte ausgesetzt, deren genaue Inbetrachtziehung zu einer sehr verwickelten Berechnung führen würde; ausserdem aber ist es bei diesen Wellen praktisch, lange Stränge mit unveränderter Wellendicke auszuführen, um die Riemscheiben, mit welchen die Kräfte ausgeleitet werden, beliebig versetzen zu können. Man kommt in diesen Fällen zu einem ganz brauchbaren Resultate, wenn man einen solchen Wellenstrang nach der Verdrehungsformel (133) oder (134) berechnet. Wie wir sahen, ist dann die Festigkeit der Welle gelegentlich sehr hoch, sodass die verhältnissmässig geringen obengenannten biegenden Kräfte unbedenklich vernachlässigt werden können. Damit die Wellen dünn ausfallen, nimmt man $n$ hoch

---

*) *In der Spinnerei-Anlage in Oberursel.*

an, und ist mit dieser Zahl von 60 und 80 gestiegen bis zu 120, 140, ja 200 und darüber, je nachdem die zu treibenden Maschinen schnell laufen. Die stehenden Triebwellen oder Königsbäume lässt man meistens langsamer laufen, als die kraftabgebenden liegenden Wellen, gibt ihnen auch eine der Kraftabgabe entsprechende Verdünnung von Stockwerk zu Stockwerk. Solche Königswellen finden sich noch manchmal aus Gusseisen hergestellt; auch gilt dies von langen liegenden Leitungen, welche unterwegs keine Kraft abgeben.

Die Praxis ist in der Wahl der Wellendicken nicht konsequent. Wellen, an deren Tüchtigkeit sehr viel gelegen ist, finden sich mit hohen Spannungen im Gebrauch, so z. B. die der Lokomotiven, wo Spannungen bis zu 9 und 10 kg in den schmiedeisernen Kurbelachsen vorkommen; Schraubenwellen der Dampfschiffe werden mit 5 bis 6 kg Spannung gebraucht. Daneben wird wieder bei manchen Triebwerkwellen eine ganz geringe Spannung — wohl sehr häufig in Berücksichtigung der Verdrehung — angewandt, namentlich in England, während andere Triebwerke grosse Verdrehungen, d. h. verhältnissmässig dünne Wellen besitzen. Die Erörterung solcher Fälle wird durch den Uebelstand erschwert, dass die Kraftangaben selten genau zu erhalten sind, indem aus der Zahl der „nominellen" Pferdestärken, welche eine Welle überträgt, so gut wie gar kein Schluss auf die wirkliche Arbeitstärke zu ziehen ist. Bei Anwendung der obigen Verdrehungsformel für die Triebwerkwellen, und kleiner Erhöhung der erhaltenen Resultate bei sehr langen Wellensträngen kommt man auf mittlere Werthe, welche mit vielen Ausführungen eine gute Uebereinstimmung zeigen.

Einige Beispiele sollen das Gesagte erläutern; es mögen dann die vorstehenden Bemerkungen zusammen mit denen des folgenden Paragraphen dem Konstruirenden als Anhalt dienen.

*1. Beispiel. Die Schraubenwelle eines grossen Kriegsdampfers von Indret wird durch zwei Dampfkolben von je 80 000 kg Druck an rechtwinklig stehenden Kurbeln von 550 mm Armlänge umgetrieben. Sie ist aus Schmiedeisen hergestellt und hat zwischen Krummachse und Schiffsschraube eine Länge von 22 m bei 380 mm Dicke. Berechnet man sie unter blosser Berücksichtigung der Festigkeit, so wäre nach Formel (133) zu nehmen, da* $PR = 2 \cdot \sqrt{0{,}5} \cdot 80\,000 \cdot 550 \backsim 62216\,000$ *kg × mm ist:* $d = 0{,}95 \sqrt[3]{62\,216\,000} = 376{,}4$, *was einer Maximalspannung von 6 kg am Wellenumfang entspräche, und sehr nahe mit der Ausführung stimmt. Die Maximalspannung der Welle berechnet sich zu 5,77. Wollte man* $^1/_4{}^0$ *Verdrehung auf den Meter, also im Ganzen* $^{22}/_4{}^0$ *gestatten, so hätte man nach (133) zu nehmen* *gehabt $d = 4{,}13\sqrt[4]{62\,216\,000} = 367$ mm, was weniger ist, als die Rücksicht auf die Festigkeit fordert. Man hat also hier eine etwas kleinere Verwindung als $5\frac{1}{2}^0$ zu gewärtigen, wovon weiter unten mehr.*

*2. Beispiel. In der Spinnerei von Saltair überträgt eine gusseiserne stehende Königswelle bei 92 minutlichen Umdrehungen 300 PS; sie hat 10 Zoll engl. oder 254 mm Durchmesser. Wir würden derselben nach der Verdrehungsformel (134) die Dicke $d = 143\sqrt[4]{300:92} = 192{,}2$ mm geben, während die Ausführung das $^4/_3$fache zeigt. In ähnlicher Weise schwer sind die übrigen Wellen derselben Fabrik gehalten.*

*3. Beispiel. In dem Walzwerk am Rheinfall überträgt eine schmiedeiserne 68 m lange Welle 120 PS von einer Turbine zu den Walzenstrassen. Die Umlaufzahl ist 95, der Effektquotient $N:n$ also $= 120:95 = 1{,}263$. Wegen der Verdrehung würden wir nach Spalte 5, Zeile 17 bis 18 $d = 126$ mm, bei blosser Berücksichtigung der Festigkeit nach Spalte 3, Zeile 13 bis 14 $d \backsim 92$ mm nehmen. Die Ausführung zeigt $d = 96$ mm in den, 32 an der Zahl betragenden Wellenhälsen, und 100 mm in den Schäften. Die eintretende Spannung berechnet sich zu 5,2 kg für die Lagerhälse und 4,6 kg für die Schäfte. Der Erbauer der Saltairmühle *) würde wenigstens etwa 200 mm Wellendicke angewandt, d. h. die Welle 8mal so fest konstruirt haben, als geschehen ist.*

Logelbach

*4. Beispiel. In der Spinnerei in Logelbach überträgt eine gusseiserne 210 mm dicke Welle bei 27 minutlichen Umdrehungen 140 PS (mit dem Zaum gemessen). Der Effektquotient $N:n$ ist $140:27 = 5{,}19$. Suchen wir bei dem doppelten Werthe in unserer Tabelle nach, da es sich um eine gusseiserne Welle handelt, so finden wir gemäss Spalte 5, Zeile 25 bis 26, $d$ zwischen 200 und 220; eine genauere Rechnung ergibt $d = 215$ mm, was sehr nahe mit der Ausführung stimmt. Die blosse Berücksichtigung der Festigkeit hätte gemäss Spalte 3, Zeile 23 bis 24 $d \backsim 185$ mm ergeben.*

*5. Beispiel. Dieselbe Anlage hat an einer anderen Stelle eine 25,5 m lange gusseiserne Wellenleitung, welche 270 PS (mit dem Zaume gemessen) bei 50 minutlichen Umdrehungen überträgt, also den Effektquotienten 5,4 besitzt. Die Wellenhälse haben 175 mm Durchmesser, im Schaft ist der Querschnitt von der in Fig. 416 angegebenen Form und das Profil etwas geschwellt; man kann ihn annähernd durch einen cylindrischen Schaft von 215 mm Dicke ersetzt denken, der dann ungefähr die Festigkeit des ausgeführten besitzen würde. Unsere Tabelle würde für die Wellenhälse, wenn man sie nur mit genügender Festigkeit versehen wollte, gemäss Spalte 3, Zeile 23 bis 24 (beim doppelten Werth von $N:n$ wegen des Materials Gusseisen) 180 bis 190, genauer 187 mm Dicke, also mehr als die Ausführung zeigt, ergeben. Dem wirklich angewandten Durchmesser 175 entspricht eine Spannung $\mathfrak{S} = 3{,}67$ kg. Für den Schaft würden wir ohne Frage, da die Welle sehr lang ist, die Rechnung auf Verdrehung beziehen, demgemäss in Spalte 5 bei $N:n = 2 . 5{,}4 = 10{,}8$ zu suchen haben. Wir*

---

**) Fairbairn, der in ähnlichen Fällen die Formel $d = 160\sqrt[3]{N:n}$ angewandt wissen will und benutzt hat.*

*finden d zwischen 200 und 220, genauer nach (134) $d = 143 \sqrt[4]{5{,}4} = 143 \,.\, 1{,}52 = 217$ mm, was ebenfalls sehr nahe mit der Ausführung übereinstimmt.*

§. 147.

## Berechnung des Verdrehungswinkels der Wellen.

Bei einer cylindrischen Welle von der Dicke $d$, welche durch ihre ganze Länge $L$ das verdrehende statische Moment $PR$ überträgt, ist, wenn das Material den Drehungsmodul $G$ hat, nach §. 13 Nro. I. der Verdrehungswinkel

$$\vartheta^0 = \frac{32 \,.\, 360}{2\pi^2} \frac{PR}{d^4} \frac{1000\,L}{G} = \frac{360\,\mathfrak{S}}{\pi\,G} \frac{1000\,L}{d} \quad . \; . \; . \quad (136)$$

woraus für Schmiedeisen, wo $G = 8000$:

$$\vartheta^0 = 72{,}95 \frac{PRL}{d^4} = 14{,}32\,\mathfrak{S} \frac{L}{d} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (137)$$

und für Gusseisen das Doppelte oder

$$\vartheta^0 = 155{,}9 \frac{PRL}{d^4} = 28{,}65\,\mathfrak{S} \frac{L}{d} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (138)$$

folgt. Hierbei ist $L$ wieder ausnahmsweise in Meter eingeführt; zugleich bedeutet $\mathfrak{S}$ wieder die Spannung am Wellenumfang. Man sieht, dass man bei bekanntem $\mathfrak{S}$ den Winkel $\vartheta$ sehr leicht berechnen kann. Hierbei ist nicht zu vergessen, dass $\mathfrak{S}$ und $d$ von einander abhängen, dass also z. B. $d$ unter Annahme von $\mathfrak{S}$ berechnet sein muss.

Die Abgebung des verdrehenden Momentes kann auch so erfolgen, dass einzelne Abgabestellen über die Welle vertheilt sind. Man kann aber auch dann von den obigen Formeln Gebrauch machen (vergl. §. 13, S. 38 und 39), wenn man nämlich für $L$ setzt:

a. die ganze Wellenlänge (in Meter), wenn die Triebkraft an dem einen Ende eingeleitet, am andern ganz abgeleitet wird;

b. die halbe Wellenlänge, wenn die Kraftabgabe gleichförmig über die ganze Welle vertheilt ist, was in langen Wellensträngen in der Regel der Fall ist;

c. ein Drittel der Wellenlänge, wenn die Kraftabgabe gleichförmig abnehmend vom Krafteinleitungspunkte bis zum Wellenende vertheilt ist (siehe Fall III. in §. 13), was in Fabriksälen mit verschieden starken Maschinen sich manchmal zweckmässigerweise angeordnet findet;

d. im allgemeinen den Abstand des Angriffschwerpunktes der zu überwindenden Widerstandsmomente, wenn die Kraftabgabe irgendwie über die Welle vertheilt ist (siehe Fall IV. in §. 13). Man findet den Angriffschwerpunkt, wenn man die Produkte aus den einzelnen Widerstandsmomenten (in Pferdestärken) und den Abständen ihrer Angriffpunkte vom Wellenanfang bildet und addirt, und die erhaltene Summe durch die ganze Kraftabgabe (in Pferdestärken) theilt.

Als Beispiele können mehrere der im vorigen §. berechneten Wellen dienen.

*1. Beispiel. Die Schraubenwelle des Indret'schen Schiffes aus Beispiel 1. verdreht sich im Maximum — unter Vernachlässigung der Verstärkungen durch Anläufe u. s. w. — wegen $\mathfrak{S} = 5{,}77$, $d = 380$ und $L = 22$ nach (139) um $14{,}32 \,.\, 5{,}77 \,.\, 22 : 380 \backsim 4^7/_8{}^0$, welche Verdrehung auf das $^7/_{10}$fache oder $\backsim 3^1/_3{}^0$ zurückgeht, wenn je eine der Kurbeln in den Todpunkt tritt.*

*2. Beispiel. Die Welle aus Beispiel 3. gibt unterwegs keine Kraft ab, verwindet sich aber in den 32 Lagerhälsen, deren Länge = 100 mm sein möge, stärker als in den Schäften. Wir haben nach (104) $\vartheta = 14{,}32 \,.\, [(32 \,.\, 0{,}1 \,.\, 5{,}2 : 96) + (68 - 3{,}2)\, 4{,}6 : 100] = 14{,}32\,(0{,}173 + 2{,}981) \backsim 45^1/_6{}^0$!! eine Verdrehung, welche bei schwankender Kraftabnahme sehr merkbar wirken muss, und wenigstens bei einer feineren Fabrikation nicht zulässig sein würde.*

*3. Beispiel. Gäbe man derselben Welle gemäss der von Fairbairn empfohlenen Regel 200 mm Dicke durchweg, so hätte man gemäss dem ersten Ausdruck in (104), da $N : n = 1{,}263$ ist: $\vartheta = 72{,}95 \,.\, 716\,200 \,.\, 1{,}263 \,.\, 68 : 200 k = 3{,}87^0$.*

*4. Beispiel. In der Bindfadenfabrik bei Schaffhausen ist eine Welle aus Bessemerstahl angewandt; sie hat 149,1 m Länge und steigt, beiläufig bemerkt, ähnlich der des 2. Beispiels, vom Rhein aus schräge am Ufer hinauf (Steigungswinkel $23^0$). Ihr Durchmesser ist $d = 122$, dabei $N = 200$, $n = 120$. Dies gibt $\mathfrak{S} = 3{,}345$ und damit, da Stahl denselben Elastizitätsmodul wie Schmiedeisen hat, gemäss (139) $\vartheta = 14{,}32 \,.\, 3{,}345 \,.\, 149{,}1 : 122 \backsim 58^1/_2{}^0$!!.*

*5. Beispiel. Lässt man durch einen 50 m langen schmiedeisernen Wellenstrang von konstanter Dicke 70 Pferdestärken bei 100 Umdrehungen an Maschinen abgeben, welche eine ungefähr gleichförmig über die Welle vertheilte Kraftabgabe veranlassen, so hat man zunächst nach Spalte 5, Zeile 16 zu nehmen $d = 110$ mm. Bei der Verdrehungsberechnung haben wir nun für L die halbe Wellenlänge einzuführen, erhalten also $\vartheta = 72{,}95 \,.\, 716\,200 \,.\, 0{,}7 \,.\, 25 : 110^4 = 6{,}45 \backsim 6^1/_2{}^0$. Direkt erhielte man, da $L = 25$ einzusetzen, und weil wir oben $\vartheta^0 = ^1/_4\, L$ in die Berechnung der Formel (139) einführten, $\vartheta = 6^1/_4{}^0$.*

Erscheint in einem bestimmten Falle eine solche Verdrehung zu gross, so erhöhe man den Durchmesser entsprechend und hat dabei zu bedenken, dass das Steigerungsverhältniss mit seiner vierten Potenz, also sehr stark auf die Verminderung von $\vartheta$ einwirkt.

*6. Beispiel. Sollte die im vorigen Beispiel berechnete Welle einen nur halb so grossen Verdrehungswinkel, als wir fanden, erhalten, so hätte man d auf das $\sqrt[4]{2}$ fache, d. i. nach der Zahlentafel Nr. I. auf das 1,189 fache zu erhöhen, also zu nehmen* $d = 110 \,.\, 1{,}189 \sim 130$ *mm.*

§. 148.

## Drehzapfen der Wellen. Rundgewalzte Wellen.

Die Zapfen der Triebwellen sind entweder Endzapfen, und dürfen dann als Stirnzapfen behandelt werden, oder sie sind, was der gewöhnliche Fall ist, Halszapfen, über deren Längenbemessung in §. 92 gesprochen wurde. Bei den Triebwerkwellen der Fabriken und manchen anderen Wellen ist übrigens eine besondere Berechnung der Zapfenlänge unnöthig. Man nehme hier, wenn nicht ausnahmsweise die Zapfenlänge $l$ beschränkt werden muss (was z. B. bei den Lokomotiven zu geschehen hat), $l$ recht gross, z. B. $^3/_2\, d$, $2\,d$, $4\,d$ u. s. w. (vergl. §. 109 ff.), vorausgesetzt, dass Vorsorge für das gute Aufliegen des Zapfens im Lager getroffen ist.

Seit einiger Zeit werden durch das Kirkstaller Eisenwerk*) in zunehmendem Maasse Triebwellen eingeführt, welche statt abgedreht zu sein, durch einen besonderen Walzprozess gerundet oder rund geglättet sind. Das Rundglätten geschieht zwischen ebenen Scheiben, deren geometrische Achsen horizontal und parallel in etwa 22,5 cm Abstand liegen, und die sich in gleichem Sinne gleich schnell und sehr rasch drehen**). Die Scheiben ertheilen dem kurz nach dem Auswalzen unter Wasserzuführung zwischen sie gebrachten Rundstabe, indem sie ihn rollen und zugleich fortschieben, eine fast genau cylindrische Form und eine äusserst reine und glatte Oberfläche, sodass das Abdrehen des Stabes, wenn er als Triebwelle dienen soll, unterbleiben kann. Ausserdem

---

*) Kirkstall Forge Company, Leeds, England.

**) Vergl. §. 195.

geben sie dem Stabe eine Materialbeschaffenheit, bei welcher der Tragmodul um fast $^1/_5$ von dem des ungeglätteten Materials erhöht wird*). Erscheint diese letztere Eigenschaft gegenüber dem Erörterten auch nicht gerade sehr erheblich, so ist sie doch immerhin von Werth. Jedenfalls aber ist der Wegfall des Abdrehens nicht zu unterschätzen. Somit erscheinen die rundgeglätteten Wellen recht empfehlenswerth; ihre wachsende Verbreitung erklärt sich aus den beiden genannten Vorzügen. Der einzige Nachtheil, den sie haben, ist die Unstatthaftigkeit einseitiger Verletzungen der Eisenhaut, welche etwas härter oder doch dichter zu sein scheint, als die mehr nach innen gelegene Masse. Wird sie eingefeilt, so wird der Stab unrund; Keilnuthen sind also nicht wohl zulässig. Die neueren Mittel der Befestigung der Naben ohne Keilversenkung gestatten aber, den Nachtheil zu umgehen. Nicht bloss die Schäfte, sondern auch die Zapfen und die Wellenhälse der Kirkstaller Wellen werden für gewöhnlich nicht abgedreht.

§. 149.

## Zusammengesetzte Querschnitte. Hölzerne Wellen.

Die Abmessungen der zusammengesetzten Wellenquerschnitte (Kreisring-, Kreuz- und Sternquerschnitt) findet man, nachdem man zuerst die Berechnung für die massive runde Welle (aus demselben Material) gemacht, ganz auf dieselbe Weise aus der Dicke $d$ der runden Welle, wie es in den §§. 138 bis 142 für die Tragachsen gezeigt wurde. Bei hölzernen Wellen (aus Eichenholz)

*) Versuche von Kirkaldy haben Folgendes ergeben (Beschreib. Katalog der Kirkstall Forge Company auf der Melbourner Weltausstellung):

| | Tragmodul | | Bruchmodul | |
|---|---|---|---|---|
| | für Zug | für Drehung | für Zug | für Drehung |
| Gewöhnliche Rundstäbe . . | — | 15,56 | — | 38,88 |
| Rundgeglättete do. . . . . | 21,83 | 18,40 | 37,1 | 34,77 |

Bemerkenswerth ist, dass das Rundglätten durchschnittlich den Bruchmodul herabzieht (38,88 auf 34,77 hier), den Tragmodul aber erhöht. Das Verhältniss zwischen den Tragmodeln für Zug und für Drehung beträgt 1 : 0,84; vergl. §. 5.

nehme man den Durchmesser $D$ des dem Querschnitt-Vieleck eingeschriebenen Kreises nicht kleiner als 1,75 mal die Dicke der gusseisernen gleichbeanspruchten Welle. Bei dem letzteren Verhältniss verwinden sich beide Wellen um gleichviel, indem 1,75 die $\sqrt[4]{}$ aus dem Verhältniss des Elastizitätsmoduls 10 000 des Gusseisens zu 1100, dem des Holzes ist. Hölzerne Wellen kommen übrigens nur noch sehr selten vor.

§. 150.

## Belastete Wellen.

Unter einer belasteten Welle wird hier eine solche Welle verstanden, welche ausser einer verdrehenden Beanspruchung noch eine solche auf Biegung erfährt. Wie wir oben sahen, fallen streng genommen sehr viele Wellen unter diese Kategorie; bei einer grossen Zahl indessen durften wir die Biegungsbeanspruchung vernachlässigen. Wo letzteres nicht geschehen darf oder soll, hat man eine Berechnung auf zusammengesetzte Festigkeit auszuführen. Am bequemsten vollzieht sich diese, wenn man die vereint wirkenden statischen Momente in ein ideelles biegendes Moment verwandelt (vergl. §. 18) und dann so rechnet, als sei die belastete Welle eine Tragachse, welcher jene ideellen biegenden Momente zukommen.

Ist $M_d$ das einen Querschnitt verdrehende Moment,
$M_b$ das ebendaselbst wirkende biegende Moment,
so ist das ideelle biegende Moment, welches diese beiden ersetzt:

$$(M_b)_i = {}^3/_8\, M_b + {}^5/_8 \sqrt{M_b{}^2 + M_d{}^2} \quad . \; . \; . \quad (139)$$

Diese Formel wird für numerische Rechnungen nach dem Poncelet'schen Theorem genügend genau angenähert:

wenn $M_b > M_d$, durch

$$(M_b)_i = 0{,}975\, M_b + 0{,}25\, M_d \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (140)$$

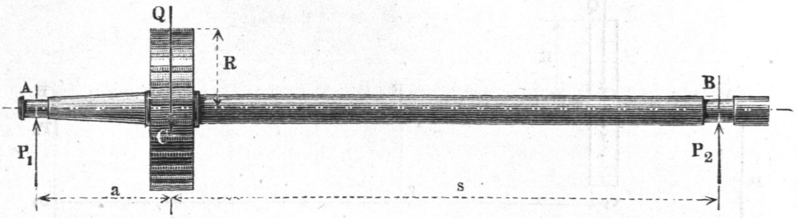
und wenn $M_d > M_b$, durch

$$(M_b)_i = 0{,}625\, M_b + 0{,}6\, M_d \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (141)$$

Wir wenden wieder beide, zuerst das analytische, dann das graphostatische Verfahren an.

I. Analytisches Verfahren. Die Achse oder Welle $ABC$, welche in Fig. 424 dargestellt ist, trägt bei $C$ ein Stirnrad $R$, an dessen Umfang die Kraft $Q$ tangential angreift; dann beansprucht diese den Schaft $CB$ auf Verdrehung mit dem Moment $M_d = QR$;

Fig. 424.



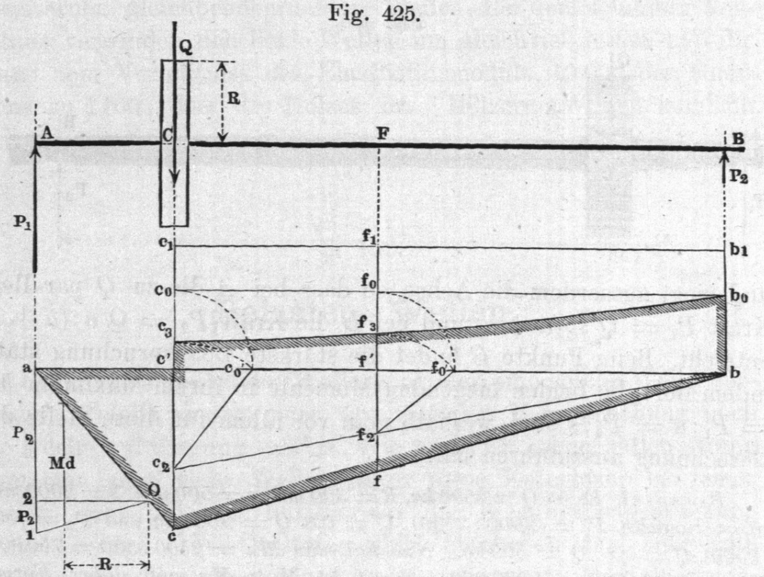

und biegt ausserdem die Achse, so dass bei $A$ die zu $Q$ parallele Kraft $P_1 = Q\, s:(a+s)$ und bei $B$ die Kraft $P_2 = Q\, a:(a+s)$ entsteht. Beim Punkte $C$ findet die stärkste Beanspruchung statt, indem dort die beiden biegenden Momente in ihrem Maximum $M_b = P_1 : a = P_2 . s$ sind, weshalb man vor allem für diese Stelle die Berechnung auszuführen hat.

*Beispiel. Es sei $Q = 2500$ kg, $R = 300$ mm, $a = 500$ mm, $s = 2000$ mm, so ist zunächst $P_1 = (2000 : 2500) . Q = 0{,}8\ Q = 2000$ kg und $P_2 = (500 : 2500)\ Q = 0{,}2 . Q = 500$ kg. Nun hat man $M_d = 2500 . 300 = 750\,000$, $M_b = 2000 . 500 = 1\,000\,000$. Somit ist $M_b > M_d$ und daher Formel (140) zu benutzen. Man erhält: $(M_b)_i = 0{,}975 . 1\,000\,000 + 0{,}25 . 750\,000 = 975\,000 + 187\,500 = 1\,162\,500$ kg $\times$ mm. Hieraus kann die Achsenkopfdicke bei C unmittelbar berechnet werden. Ist die Welle aus Gusseisen, und bei C mit kreisförmigem Querschnitt herzustellen, so hat man für den Durchmesser D aus: $(M_b)_i = \mathfrak{S}\, \pi/_{32}\, D^3$ bei einer Spannung $\mathfrak{S} = 3$ kg : $D = \sqrt[3]{1162\,500 . 32 : 3\pi} = 158$ mm. Der Zapfen bei A erhielte nach Tabelle §. 91, Spalte 4, Zeile 10 die Dicke $d_1 = 70$ mm. Für den Wellenhals bei B erhält man nach Tabelle §. 145, Spalte 2, Zeile 5 (bei dem doppelten Werthe des verdrehenden Moments, da wir Gusseisen vor uns haben) $d_2 = 110$ mm. Hierbei ist nur auf die Festigkeit, nicht auf den Verdrehungswinkel Rücksicht genommen.*

II. Graphostatisches Verfahren. Wir behandeln sofort dasselbe Beispiel graphostatisch. Nachdem man, Fig. 425 (a. f. S.), für die biegenden Momente das mit horizontaler Schlusslinie konstruirte Gelenkpolygon $a\,b\,c$ verzeichnet, und das Kräftepolygon $a\ 1\ O$ aufgetragen hat, liefert dasselbe zunächst sofort $P_1$ und $P_2$ und in $a\,c\,c'$ die Momentenfläche für den Schenkel $A\,C$.

Nun ist das Moment $M_d$ aufzusuchen. Hierfür ziehen wir im Kräftepolygon in einem Abstand $R$ von dem Pol $O$ eine Vertikalordinate, so ist diese $= M_d$. Dieselbe nach $c'\,c_1 = b\,b_1$, und sodann $^5/_8$ davon nach $c'\,c_0 = b\,b_0$ tragend, haben wir in $c'\,c_0\,b_0\,b$ das Torsionsrechteck für den Schenkel $CB$. Die Zusammensetzung der drehenden mit den biegenden Momenten vollziehen wir nun nach Formel (139). Wir machen nämlich $c c_2 = {}^3/_8\, cc'$ und ziehen

Fig. 425.




die Gerade $c_2 b$, so ist auch an jeder anderen Stelle des Polygons, z. B. bei $f$, der Abschnitt $f f_2 = {}^3/_8 ff'$. Klappt man nun die $c' c_o$ nach $c' c_o'$ auf die $ab$, so ist die Hypotenuse des Dreiecks $c_2\, c'\, c_o'$: $c_2\, c_o' = \sqrt{({}^5/_8\, cc')^2 + ({}^5/_8\, c_1\, c')^2}$, also die Summe $c c_2 + c_2\, c_o' = c c_2 + c_2\, c_3$ das gesuchte Moment $(M_b)_i$ für die Stelle $C$. Ebenso erhält man in $f f_2 + f_2 f_0' = f f_2 + f_2 f_3$ das Moment $(M_b)_i$ für die Stelle $F$. Die Linie $c_3\, f_3\, b_0$ ist eine Kurve (Hyperbel), welche man auch durch eine Gerade $c_3\, b_0$ im vorliegenden Falle genügend genau annähern könnte. Aus dem gefundenen Polygon $a\, c\, b\, b_0\, c_3\, c'$ ermittelt man schliesslich, wie bei den Achsen gelehrt wurde, die Abmessungen der belasteten Welle.

Andere Aufgaben für Momentenzusammensetzung finden sich weiter unten bei den Hebel- und Kurbelachsen.