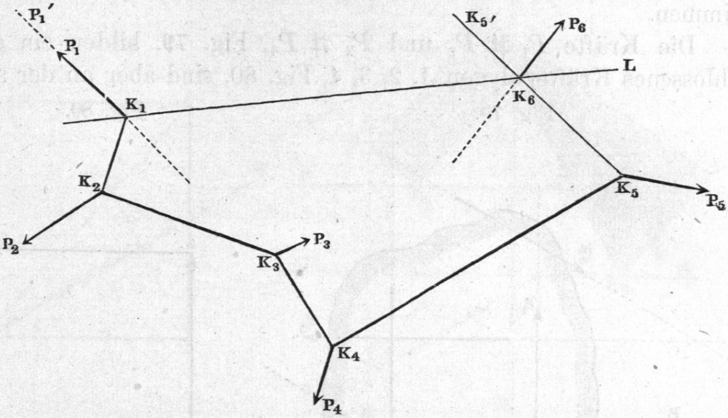
nur Richtung und Lage gegeben sind, das Fehlende wie folgt ermittelt werden.

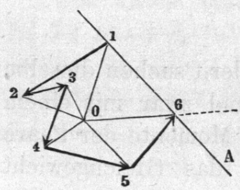
II. Die noch völlig unbekannte Kraft sei die P_6, Fig. 77, während von der P_1 die Richtung $K_1 P_1'$ und der Punkt K_1, also

Fig. 77.



ihre Lage bekannt. Wir können nun das Kräftepolygon, Fig. 78, vom Punkte 1 bis 5 verzeichnen, indem wir die Kraft 1 nur ihrer Richtung $A1\ldots$ nach auftragen. Das Seilpolygon kann ferner von K_1 aus durch die Punkte K_2, K_3, K_4, K_5 und K_5' gezogen werden. Wählt man alsdann eine Richtung für die Schlusslinie, z. B. die $K_1 L$, und trägt sie in das Seilpolygon ein, so ist deren Schnitt K_6 mit der $K_5 K_5'$ ein Punkt der Richtungslinie der gesuchten Kraft P_6. Um ihre Grösse und Richtung zu bestimmen, ziehen wir nun in Fig. 78 die $O6\ldots$ parallel zu $K_1 L$, und verbinden Punkt 5 mit Punkt 6, so ist 5 . 6 nach Grösse, Richtung und Sinn die Schlusskraft P_6, sowie 6 . 1 die Kraft P_1 nach der (noch fehlenden) Grösse.

Fig. 78.



§. 38.

Kräftepaare.

Ist eine ebene Figur in ihrer Ebene nur der Wirkung von Kräftepaaren ausgesetzt, das ist von solchen paarweise gleich grossen Kräften, welche in parallelen aber nicht zusammenfallenden Richtungslinien in entgegengesetztem Sinne wirken, so erscheint das Kräftepolygon immer geschlossen, ohne dass nothwendig Gleichgewicht an der Figur herrscht. Die Bedingungen für dasselbe lassen sich aber mittelst eines Kräfteplanes wie folgt bestimmen.

Die Kräfte $P_1 \# P_3$ und $P_2 \# P_4$, Fig. 79, bilden ein geschlossenes Kräftepolygon 1, 2, 3, 4, Fig. 80, sind aber an der an-

Fig. 79.

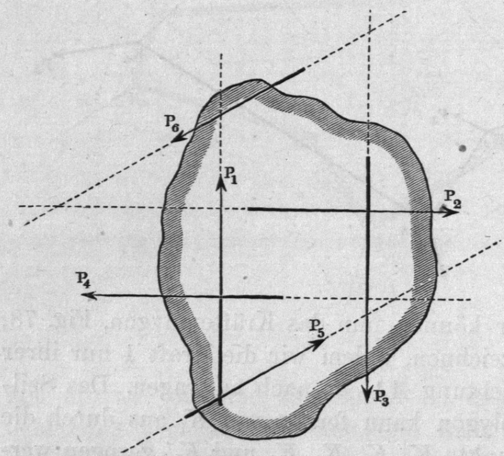
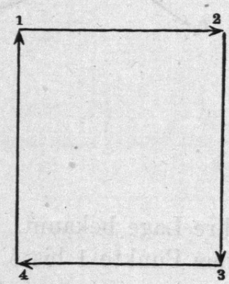


Fig. 80.



gegriffenen Figur nicht im Gleichgewicht, sondern suchen dieselbe um irgend einen ihrer Punkte zu drehen, und zwar mit einem statischen Momente, welches der Summe der Momente der Paare $(P_1 - P_3)$ und $(P_2 - P_4)$ gleich ist. Um das Gleichgewicht herzustellen, soll ein Paar $(P_5 - P_6)$ von entgegengesetztem Drehungssinne zugefügt werden, dessen Moment dem jener beiden gleich ist, und dessen Richtungslinien die Parallelen *V V* und *VI VI* sein sollen, siehe Fig. 82.

Wir verzeichnen nun in *A*, Fig. 81, anfangend, das Kräftepolygon *A* 1, 2, 3, 4. Dasselbe ist damit noch nicht beendigt; vielmehr fehlen noch die Kräfte 5 und 6. Der Zug derselben muss, wenn sie aneinander getragen sind, wieder nach *A* zurückführen; ihre Grösse ist aber noch nicht bekannt. Zunächst geht daraus hervor, was wir schon voraussetzten, dass nämlich die beiden Kräfte parallel und gleich sein müssen, also dass nur ein Paar mit den Paaren ins Gleichgewicht treten kann, sobald nur zwei Kräfte noch zu den gegebenen Paaren hinzutreten sollen.

Die Richtung beider Kräfte ist bekannt, wir tragen sie nach $AZ\ldots$ auf. Es wird nun ein beliebig gelegener Pol O gewählt; wir

Fig. 81.

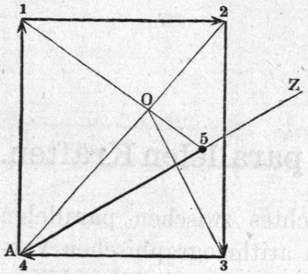
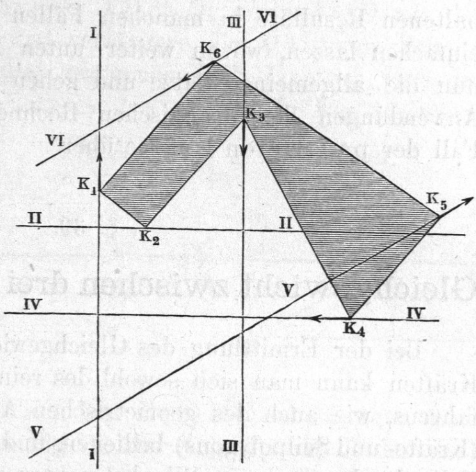


Fig. 82.



ziehen die Strahlen OA, $O1$, $O2$, $O3$, $O4$ ($= OA$), und können nun zur Verzeichnung des Seilpolygons, Fig. 82, schreiten.

Für diesen sind die Richtungslinien $I\,I$, $II\,II$ u. s. w. bis $VI\,VI$ aus Fig. 79 bekannt. Wir ziehen nach einem beliebigen Punkte K_1 der $I\,I$ Parallelen zu den Strahlen OA und $O1$ (welche die Kraft P_1 zu Resultanten haben) bis zu den Schnitten K_6 mit $VI\,VI$ und K_2 mit $II\,II$, darauf $K_2K_3 \parallel 2\,O$ bis zum Schnitte K_3 mit $III\,III$, $K_3K_4 \parallel O3$ bis zum Schnitte mit $IV\,IV$, und $K_4K_5 \parallel O4$ bis zum Schnitte K_5 mit $V\,V$. Von dem Seilpolygon fehlt jetzt nur noch die Schlusslinie. Sie ist die Verbindung von K_5 mit dem zu Anfang gefundenen Punkte K_6, und es kann nun auch (vergl. §. 37, II.) der Polstrahl $O5 \parallel K_5K_6$ gezogen werden, worauf das Kräftepolygon wirklich geschlossen ist, und in der Strecke $4\,.\,5$ ($= A5$) die Kraft P_5, in $5A$ die Kraft P_6 völlig bestimmt liefert. Das Kräftepolygon hat also hier als vollständigen Verlauf den Zug $A1$, 2, 3, 4, $5A$, wobei die Seiten 4, 5 und $5A$ bei 5 einen unendlich kleinen Winkel einschliessen.

Mit den bis hierhin behandelten Aufgaben über das Kräfte- und Seilpolygon ist nun zunächst für Kräfte in der Ebene erwiesen, wie man mittelst der geometrischen Addition und

Subtraktion das Gleichgewicht beliebig divergirender Kräfte ermitteln kann. Wirken Kräfte in schneidenden oder parallelen Ebenen, so kann nach den gegebenen Regeln das Gleichgewicht für die einzelnen Ebenen bestimmt werden, wobei die erhaltenen Resultate in manchen Fällen sich noch besonders vereinfachen lassen, wovon weiter unten Beispiele. Wir verlassen nun die allgemeinen Sätze und gehen zu den sehr brauchbaren Anwendungen des graphischen Rechnens auf den besonderen Fall der parallelen Kräfte über.

§. 39.

Gleichgewicht zwischen drei parallelen Kräften.

Bei der Ermittlung des Gleichgewichtes zwischen parallelen Kräften kann man sich sowohl des rein arithmographischen Verfahrens, wie auch des geometrischen Addirens und Subtrahirens (Kräfte- und Seilpolygons) bedienen, und wähle in jedem einzelnen Falle das bequemere. Wir betrachten zunächst den sehr schlichten Fall, dass eine Kraft Q einen Körper belastet, und durch zwei ihr parallele zu suchende Kräfte P_1 und P_2 im Gleichgewicht gehalten werden soll.

Ziehen wir zunächst eine zu den Kräften normale Verbindungslinie ABC, Fig. 83, so muss für das Gleichgewicht $P_1 . \overline{AB} = P_2 . \overline{BC}$ oder $P_1 a_1 = P_2 a_2$ und ausserdem $P_1 + P_2 = Q$ sein. Um $P_1 = P_2 \dfrac{a_2}{a_1}$ graphisch darzustellen, können wir das Verfahren in §. 24 benutzen, indem wir, Fig. 84, $OE =$ dem Divisor

Fig. 83.

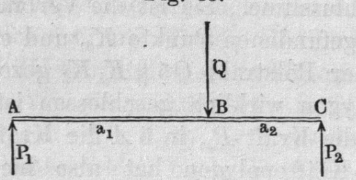
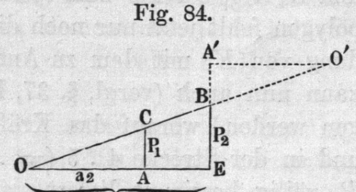


Fig. 84.



a_1, $OA =$ dem Faktor a_2, $EB =$ der (einstweilen bekannt gedachten) P_2 machen, worauf die $AC \parallel EB$, welche durch die $OB\ldots$ abgeschnitten wird, P_1 darstellt. Auch lässt sich aber das Dreieck CAO in die punktirte Lage $O'BA'$ legen, worauf dann der Voraussetzung nach $A'E = P_1 + P_2 = Q$ sein muss. Damit