

Die Polygonecken  $K$  heissen Knoten. Das Gelenkpolygon kann für die Untersuchung der Kräfte nach dem Vorigen den Körper dann vertreten, wenn zwischen den äusseren Kräften einerseits und den Anspannungen in den Polygonseiten andererseits an jedem Knoten Gleichgewicht herrscht, z. B. in dem Knoten  $K_2$ , wenn die Kräfte  $S_{1.2}$  und  $S_{2.3}$  zur Resultante eine Kraft haben, welche  $P_2$  gleich an Grösse und Richtungswinkel, entgegengesetzt an Bewegungssinn ist. Die Kräfte in den Polygonseiten mögen die inneren Kräfte des Gelenkpolygons heissen. Ist das Seilpolygon bekannt, so können die obigen graphischen Mittel auf die Ermittlung der Kraftgrössen angewandt werden. Wir haben demnach, um zu dem Seilpolygon für einen bestimmten Fall zu gelangen, die Bedingungen aufzusuchen für das Gleichgewicht

- 1) der äusseren Kräfte,
- 2) der inneren Kräfte

des Polygons unter der Voraussetzung, dass zwischen beiden Gleichgewicht bestehe.

#### §. 34.

### Gleichgewicht der äusseren Kräfte am Seilpolygon.

Setzt man die Kraft  $P_1$  mit  $P_2$  zusammen, und vereinigt deren Mittelkraft unter passender Verlegung auf ihrer Richtungslinie mit  $P_3$ , die dann erhaltene Mittelkraft mit  $P_4$  u. s. w., so muss für den Fall, dass Gleichgewicht besteht, die Mittelkraft, welche bei der vorletzten Kraft  $P_{n-1}$  erhalten wird, der letzten Kraft  $P_n$  gleich und entgegengesetzt sein. Das hier eingeschlagene Verfahren erleidet aber keine Veränderung, so lange nur die Richtungen und Grössen der Kräfte unverändert bleiben. Man kann daher die Abstände der Schnittpunkte der einzelnen Kräfte auch = Null voraussetzen, ohne hinsichtlich des Gleichgewichts der äusseren Kräfte etwas zu ändern. Das Zusammensetzen der Kräfte erfolgt aber dann gerade so wie oben für den Fall, dass die Kräfte alle an einem Punkte angreifen, und kann ohne weiteres durch Auftragung eines Kräftepolygons, aus den äusseren Kräften bestehend, erfolgen. Das Kräftepolygon bestimmt also

auch für getrennt angreifende Kräfte das Gleichgewicht. Das Polygon ist geschlossen, wenn Gleichgewicht stattfindet, oder gibt die Mittelkraft nach Grösse und Richtung an, wenn kein Gleichgewicht herrschte, beziehlich die dasselbe herbeiführende Kraft noch unbekannt war. Es sind somit zwei Unbekannte durch das Seilpolygon bestimmbar. Diese lassen sich auch auf zwei Kräfte vertheilen, also beider Kräfte Richtung oder beider Kräfte Grösse voraussetzen, oder auch, was indessen praktisch selten gefordert wird, die Richtung der einen, die (absolute) Grösse der anderen annehmen, und die beiden fehlenden Stücke bestimmen. Dies kann dann wie folgt geschehen.

I. Zwei gegebene Richtungen. In Fig. 56 sind die beiden Richtungslinien  $4,5'$  . . . und  $A6'$  . . . aufgetragen, und durch deren Schnitt  $5$  die Strecken (Kräfte)  $5$  und  $6$  bestimmt. Wenn die Richtungen verwechselt werden dürfen, sind zwei Lösungen möglich. Die zweite ist in Fig. 53 durch die  $A VI'$  und  $4 V'$ , welche die Kräfte  $AV$  und  $4V$  liefern, gegeben.

II. Zwei gegebene Kraftgrössen. In Fig. 57 wurden mit den beiden der Grösse nach bekannt vorausgesetzten Kräften  $5$  und  $6$  aus  $4$  und  $A$  Kreise beschrieben, und dadurch die beiden Richtungen bestimmt. Da die Kreise, wenn überhaupt, so einander zweimal schneiden, so sind wieder zwei Lösungen, hier  $4.5$  mit  $5.A$ , oder  $4.V$  mit  $V.A$  möglich.

III. Eine Kraftgrösse und eine Krafrichtung gegeben. In Fig. 58 ist in die Richtungslinie  $4.5'$  . . . mit dem Halb-

Fig. 56.

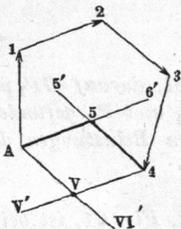


Fig. 57.

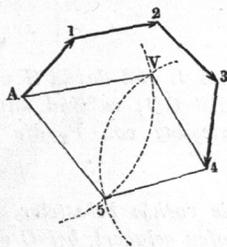
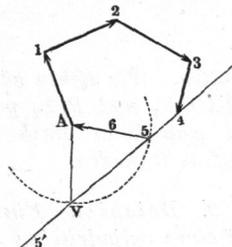


Fig. 58.



messer  $A5 =$  der Kraft  $6$  ein Kreis geschlagen, welcher durch die Einschnitte  $5$  und  $V$  zwei Lösungen wie bei II. und I. liefert. Hätte der Kreis die  $4.5'$  . . . nicht geschnitten, so wären die Annahmen unbrauchbar gewesen.

Wie diese einfachen Sätze praktisch benutzt werden können, mögen folgende Beispiele zeigen.

1. *Beispiel.* Ein Kran  $ABC$  sei bei  $A$  mit der Last  $L$  beladen, bei  $B$  cylindrisch geformt, und von einem (Roll-) Lager umfasst, bei  $C$  von einem Fusslager gestützt; in  $S$  liege der Schwerpunkt des Krankörpers, dessen Gewicht  $G$  sei. Es werden die Kräfte  $P_1$  und  $P_2$  bei  $B$  und  $C$  gesucht. — Von  $L$  und  $G$  kennt man die Richtung, sie ist vertikal; von  $P_1$  kennt man sie ebenfalls, wenn man das Lager bei  $B$  ganz glatt annimmt, resp. die ohnedies ganz winzige Reibung daselbst, soweit sie den Kran am Abwärtsgehen verhindert, vernachlässigt;  $P_1$  wirkt dann nur horizontal. Denkt man sich nun nach einem passenden Verfahren (siehe z. B. §. 39)  $G$  und  $L$  vereinigt, und ist  $TQ$  die Lage der Mittelkraft  $Q = G + L^*$ , so muss der Schnittpunkt  $O$  der Horizontalen  $P_1$  und der Vertikalen  $Q$  ein Punkt der Richtungslinie von  $P_2$  sein. Diese Kraft geht durch den Mittelpunkt des Zapfens bei  $C$ , sofern dieser durch seine Pfanne auch seitlich umfasst wird, wie hier angenommen ist. Demnach hat  $CO$  die Richtung der Kraft  $P_2$ , und wir können daher sofort, wie bei II. oben, die Grössen von  $P_1$  und  $P_2$  aus dem Kräftepolygon Fig. 60

Fig. 59.

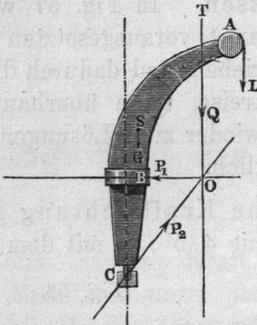
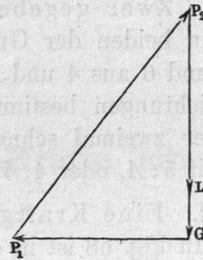


Fig. 60.



erhalten. Wir ziehen nämlich  $L$  und daran  $G$  vertikal, darauf  $GP_1$  parallel  $OP_1$  und  $P_1P_2$  parallel  $CO$ ; es sind dann  $P_1$  und  $P_2$  gefunden, und man kann durch Zerlegung von  $P_2$  die beiden Belastungen des Zapfens  $C$  finden.

2. *Beispiel.* Ein wie vorhin belasteter Kran, Fig. 61, ist bei  $B$  auf einen cylindrischen Zapfen gelagert, bei  $C$  durch eine konische Rolle auf einen Kegel gestützt, der die Spitze mit dem Rollenkegel gemeinschaftlich in der Mitte des Zapfens  $B$  hat. — Man kennt nun, wie oben, die

\*) Bei unseren gewöhnlichen Uferkranen beträgt  $G$ , welches allerdings sehr von der Ausladung  $BA$  abhängt, zwischen  $\frac{1}{5}$  und  $\frac{1}{4}$  der Tragkraft des Krans.

Mittelkraft  $Q = L + G$ , ferner auch die Richtung der auf die Rolle bei C pressenden Kraft  $P_1$ , als normal zu der Kegelerzeugenden gerichtet, mithin den Schnittpunkt O von  $P_1$  und  $Q$ , durch welchen Punkt O auch die Zapfenkraft  $P_2$  gehen muss. Hiernach ist das Kräftepolygon Fig. 62

Fig. 61.

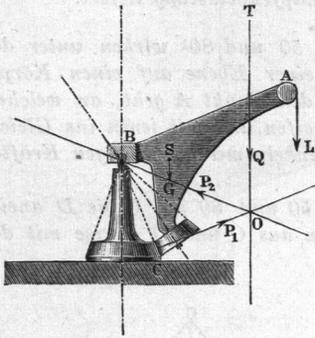
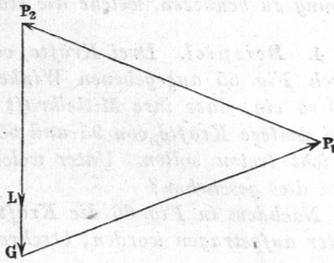


Fig. 62.



durch Ziehen der Vertikalen Q und der beiden Parallelen zu den Kräften  $P_1$  und  $P_2$  alsbald gefunden. Die Vertikalcomponente von  $P_2$  wird hier kleiner als die Belastung Q, während sie beim ersten Beispiel ihr gleich ausfiel. Hier nimmt der Kegel einen Theil der Last auf.

3. Beispiel. Bei einem ähnlichen Krane, Fig. 63, liege die gemeinschaftliche Spitze der beiden Kegel unterhalb der Zapfenmitte B bei D. Sucht man nun, C O . . . wieder normal zu DC richtend, den Punkt O auf, und bildet das Kräftepolygon Fig. 64, so wird (vermöge der Annahme der Kegelspitzenlage D) die Zapfenkraft  $P_2$  schräg nach unten statt nach oben, wie früher, gerichtet. Es muss deshalb der

Fig. 63.

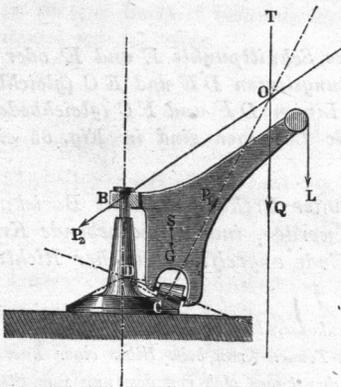
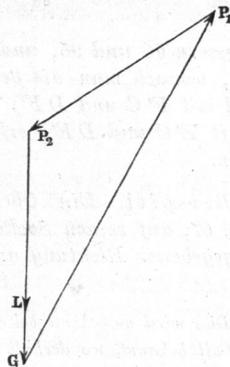


Fig. 64.

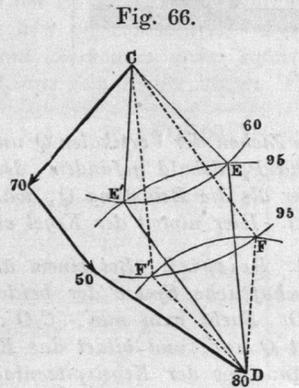
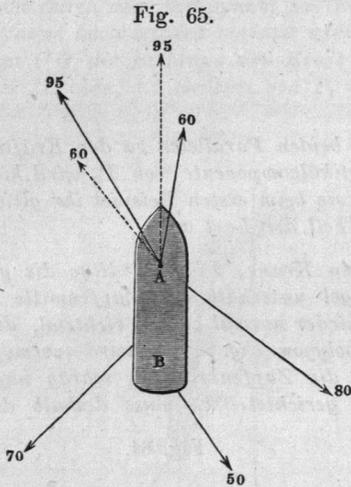


Zapfen mit einem entsprechenden Anlauf oberhalb der Pfanne bei B versehen werden\*).

Will man bei Untersuchung der Krane mit noch grösserer Genauigkeit verfahren, so hat man, wie Culmann a. a. O. zeigt, die Richtung des Widerstandes an dem Rollenlager (C bei Fig. 61 und 63, B bei Fig. 59) innerhalb des Reibungswinkels veränderlich anzunehmen, und diejenige Lösung zu benutzen, welche die stärkste Zapfenbelastung liefert.

4. Beispiel. Drei Kräfte von 70, 50 und 80<sup>k</sup> wirken unter den durch Fig. 65 angegebenen Winkeln in einer Ebene auf einen Körper AB so ein, dass ihre Mittelkraft durch den Punkt A geht, an welchem zwei weitere Kräfte von 95 und 60<sup>k</sup> angreifen und mit jenen ins Gleichgewicht treten sollen. Unter welchen Winkeln mit den übrigen Kräften wird dies geschehen?

Nachdem in Fig. 66 die Kräfte 70, 50 und 80 von C bis D aneinander aufgetragen worden, beschreibt man aus C und D Kreise mit den



Halbmessern 60 und 95, und erhält die Schnittpunkte E und E' oder F und F', wonach man die beiden Richtungslinien DE und EC (gleichbedeutend mit F'C und DF') oder die Linien DF und FC (gleichbedeutend mit E'C und DE') erhält. Beide Lösungen sind in Fig. 65 eingetragen.

5. Beispiel. Ein Obelisk soll unter Drehung um eine Basiskante A, Fig. 67, auf seinen Sockel gehoben werden, indem eine hebende Kraft  $P_1$  in gegebener Richtung am oberen Ende angreift. In welcher Richtung

\*) Dies wird manchmal bei ähnlichen Kränkonstruktionen übersehen. Dem Verfasser ist ein Fall bekannt, wo deshalb ein Dreissig-Tonnen-Kran beim Heben einer Last von etwa 20 Tonnen zum Umstürzen kam, indem das Lager sich von dem nur zum Stützen eingerichteten Zapfen abstreifte.

muss eine Kraft  $P_3$  von gegebener Grösse auf die Stelle  $A$  des Körpers wirken, damit der Sockel nur Vertikaldruck erfährt?

Fig. 67.

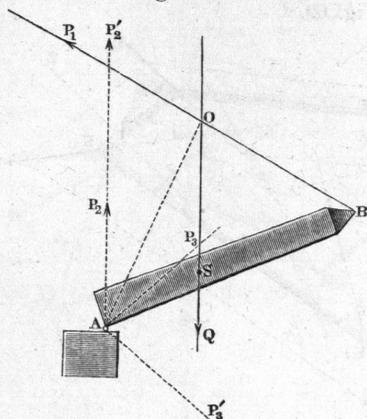
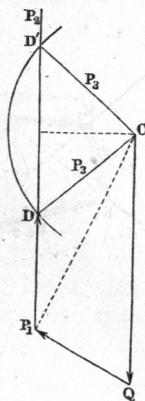


Fig. 68.



Verlängert man die durch den Schwerpunkt  $S$  des Obeliskens gehende, das zu hebende Gewicht ausdrückende Kraft  $Q$  bis zum Schnitte  $O$  mit der Kraft  $P_1$ , so muss zunächst für das Gleichgewicht  $OA$  die Richtung der Mittelkraft von  $Q$  und  $P_1$  sein. Diese Mittelkraft ist nun in eine vertikal gerichtete Kraft  $P_2$  und eine Kraft  $P_3$  von gegebener Grösse zu zerlegen. Nach Auftragung von  $Q$  und  $P_1$  in dem Zuge  $CQP_1$ , Fig. 68, zieht man durch  $P_1$  eine Vertikale  $P_1P_2 \dots$ , und beschreibt aus  $C$  mit der Zirkelöffnung  $P_3$  einen Kreis. Dieser schneidet die  $P_1P_2$  bei genügender Grösse in den Punkten  $D$  und  $D'$ , wonach wieder zwei Lösungen sich ergeben, indem entweder  $P_2$  die Grösse  $P_1D$  und  $P_3$  die Richtung  $DC$ , oder  $P_2$  die Grösse  $P_1D'$  und  $P_3$  die Richtung  $D'C$  erhält. Eine Lösung ist überhaupt nur dann möglich, wenn  $P_3$  mindestens die Grösse des Lothes aus  $C$  auf die  $P_1P_2 \dots$  besitzt. Die beiden gefundenen Richtungen sind in Fig. 67 als  $AP_3$  und  $AP'_3$  eingetragen. — Aufgaben der in diesem Beispiel behandelten Art sind übrigens, wie schon oben angedeutet wurde, selten.

## §. 35.

### Gleichgewicht der inneren Kräfte am Seilpolygon.

Unter den inneren Kräften im Seil- oder Gelenkpolygon verstehen wir, wie oben erläutert wurde, die auf Zug oder auf Druck wirkenden Kräfte in den einzelnen Gliedern oder Seiten des Seilpolygons, die in Fig. 69 (a. f. S.) mit  $S_{1 \cdot 2}$ ,  $S_{2 \cdot 3}$  u. s. w. bezeichnet sind. Diese Kräfte haben eine solche Grösse, dass sie einander an jedem