Aus einer Ecke O des Polygons $OABCDE$, Fig. 39, ziehe die Diagonale OB, welche O mit dem nächsten Eckpunkte verbindet, lege parallel dazu eine Gerade durch den zwischen O und B befindlichen Eckpunkt und verlängere die dritte Seite CB bis zum Schnitte B' mit der genannten Parallelen; verbindet man dann O mit B', so ist, da $\triangle\ OBB' = \triangle\ OBA$, das Vieleck $OB'CDE$ inhaltgleich mit dem ursprünglichen, hat aber eine Ecke weniger. Man ziehe nun OC und durch B' die $B'C' \parallel OC$ u. s. f., auch an der anderen Seite von O kann so verfahren werden, worauf schliesslich ein Dreieck $OC'D'$ erhalten wird, welches dem Polygon inhaltgleich ist, und leicht nach dem Früheren auszumessen ist. Die unbenutzten Verbindungslinien OB' u. s. w. brauchen nicht gezogen zu werden. Das Verfahren eignet sich, wie Culmann hervorhebt und allgemeiner ausführt, trefflich für die Ausmessung von Bahn- und Strassenprofilen.

Fig. 39.

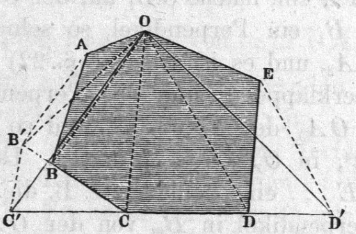
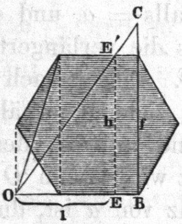


Fig. 40.



Regelmässige Polygone, wie das Sechseck in Fig. 40, brauchen nur zur Hälfte verwandelt zu werden, worauf sie wie Parallelogramme ausgemessen werden können.

§. 28.

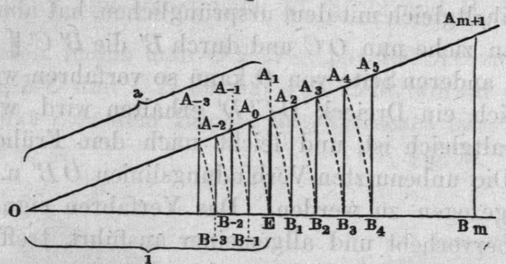
Potenziren von Strecken.

Eine Strecke a in die $n$te Potenz erheben heisst eine Strecke x angeben, welche die Einheit von a so oft enthält, als die $n$te Potenz von a angibt, oder welche a^n Einheiten der a lang ist. Das einzuschlagende Verfahren lässt sich, wenn n eine ganze, übrigens positive oder negative Zahl ist, sofort aus der graphischen Multiplikation und Division ableiten, indem es als eine wiederholte Multiplikation oder Division von a mit a aufzufassen ist.

Auch dieses Verfahren ist, entsprechend den früher aufgezeigten Mannigfaltigkeiten, auf mancherlei verschiedene Weisen ausführbar.

I. (Siehe §. 22, I.) Man mache OE, Fig. 41, $=$ der Einheit, errichte in E ein Perpendikel und schneide in dasselbe aus

Fig. 41.

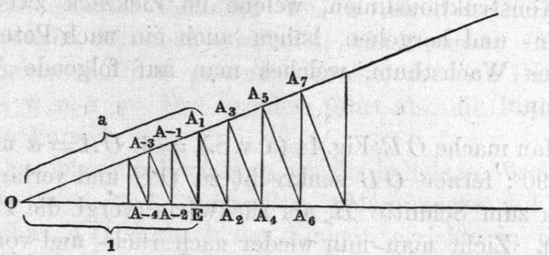


O mit $OA_1 =$ dem Grundfaktor a ein, mache OB_1 auf der $OE\ldots$ ebenfalls $= a$, und errichte in B_1 ein Perpendikel, so schneidet dieses die verlängerte OA_1 in A_2, und es ist (nach I. §. 22) $OA_2 = a^2$. Dieses nach OB_2 niederklappend, und das Perpendikel B_2A_3 ziehend, erhält man in OA_3 den Werth a^3, und so fortfahrend in OB_4 den Werth a^4, in OB_5 den a^5 u. s. f. Ueberhaupt wird, wenn OB_m auf $OE\ldots$ eine beliebige, z. B. die $m$te Potenz von a ist, durch das Perpendikel in B_m von der $OA_1\ldots$ die $m+1$te Potenz von a in dem Stücke OA_{m+1} abgeschnitten. Umgekehrt wird durch ein Loth aus dem Endpunkte A_{m+1} einer Potenz von a auf die Achse $OE\ldots$ von dieser ein Stück OB_m abgeschnitten, welches die um 1 verminderte Potenz von a ist (vergl. die Divisionsregel in I. §. 23).

Hieraus folgt ferner, dass das Loth A_1E aus A_1 auf $OE\ldots$ die Potenz a^1 auf a^0, d. i. 1 bringt, wie auch durch die Voraussetzung klar. Trägt man nun wieder OE nach OA_0 und fällt ein Loth A_0B_{-1}, so ist $OB_{-1} = a^{-1}$ oder $\frac{1}{a}$, d. i. der reziproke Werth von OA_1; so fortfahrend erhält man in OB_{-2} den Werth $\frac{1}{a^2}$, in OB_{-3} den Werth $\frac{1}{a^3}$ u. s. f.

II. Durch Verbindung der Multiplikationsregeln I. und III. §. 22 erhält man folgendes Potenzirverfahren. Man mache wieder, Fig. 42 $OE = 1$, $OA_1 = a$, EA_1 senkrecht zu OE, und ziehe durch A_1 eine Senkrechte auf OA_1, so schneidet diese die $OE\ldots$ in A_2, und es ist $OA_2 = a^2$; in A_2 ein Perpendikel bis zum Schnitte A_3 mit $OA_1\ldots$ errichtend, erhält man

Fig. 42.



$OA_3 = a^3$, darauf durch ein weiteres Perpendikel auf OA_1 in OA_4 den Werth a^4, und so fortfahrend auf der Achse $OE\ldots$ die geraden, auf $OA_1\ldots$ die ungeraden, und zwar beidemal positiven Potenzen von a. Von E aus rückwärts schreitend erhält man in OA_{-1} die Reziproke von a, in OA_{-2} den Werth $\frac{1}{a^2}$, und so fortfahrend auf $OA_1\ldots$ die ungeraden negativen, auf $OE\ldots$ die geraden negativen Potenzen von a.

Die beiden vorstehenden Verfahren setzen voraus, dass $a > 1$ sei; bei den beiden folgenden ist dagegen $a < 1$ vorausgesetzt.

III. Nachdem OE, Fig. 43, gleich der Einheit gemacht, trage man $OA = a$ so auf, dass AE senkrecht zu OA steht. Zieht man dann das Loth $E1$, das Gegenloth $1\,2$, dann Loth $2\,3$, Gegenloth $3\,4$ u. s. w., so ist: $O1 = \frac{1}{a}$, $O2 = \frac{1}{a^2}$, $O3 = \frac{1}{a^3}$ u. s. f.

Fig. 43.

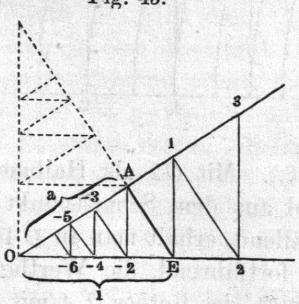
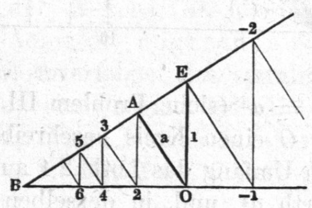


Fig. 44.



Von E aus nach links schreitend und abwechselnd Perpendikel und Gegenperpendikel ziehend, erhält man die Werthe: $O - 2$

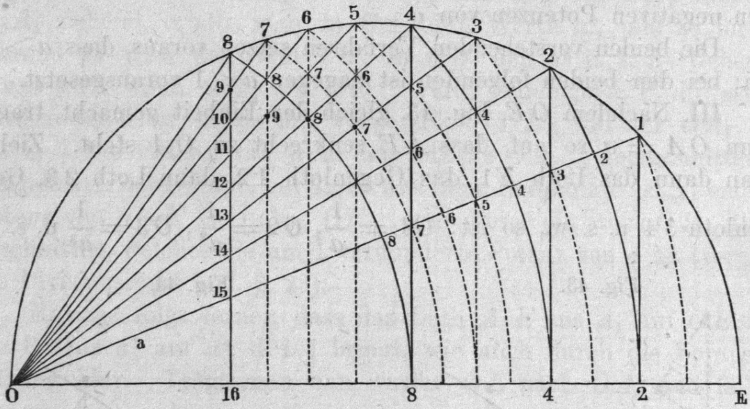
$= a^2$, $O - 3 = a^3$, $O - 4 = a^4$ u. s. w., hier also links die positiven, rechts die negativen Potenzen von a (Bew. s. III. §. 22, auch aus dem obigen Verfahren II. zu entnehmen).

Die Konstruktionslinien, welche im Zickzack zwischen den Achsen hin- und hergehen, haben auch ein nach Potenzen fortschreitendes Wachsthum, welches man auf folgende Weise benutzen kann.

IV. Man mache OE, Fig. 44 (a. v. S.), $= 1$, $OA = a$ und Winkel $OAE = 90^0$, ferner OB senkrecht zu OE und verlängere EA sowohl bis zum Schnitte B, als rückwärts (vergl. die Punktirung in Fig. 43). Zieht man nun wieder nach rück- und vorwärts die Lothe und Gegenlothe wie vorhin, so erhält man folgende Werthe: $OA = a$, $A2 = a^2$, $23 = a^3$ u. s. f., ferner $OE = a^0$, $E - 1 = a^{-1} = \frac{1}{a}$, $-1 - 2 = \frac{1}{a^2}$, $-2 - 3 = \frac{1}{a^3}$ u. s. w.

V. Man schlage über OE als Einheit einen Halbkreis, Fig. 45, mache $O1 = a$, und fälle aus 1 auf OE das Loth 12, so ist

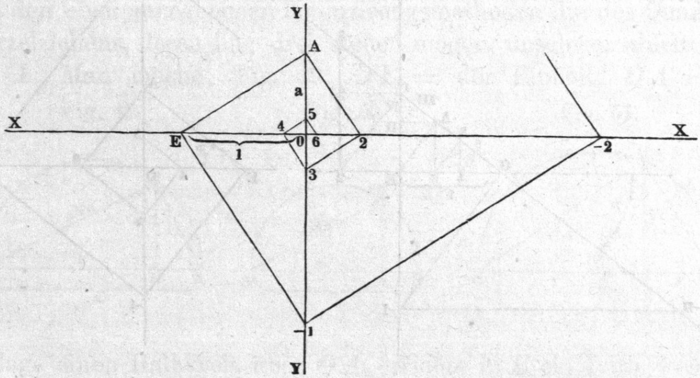
Fig. 45.



$O2 = a^2$ (siehe Problem III. dieses §.). Mit $O2$ als Halbmesser aus O einen Kreis beschreibend und aus dem Schnittpunkt mit dem Umfang das Loth 24 auf OE fällend, erhält man in $O4$ den Werth a^4, und, in derselben Weise fortfahrend, die Werthe $O8 = a^8$, a^{16} u. s. w. Der Schnittpunkt 3 des Lothes 2 4 mit dem Strahl $O1$ steht aber von O um a^3 ab. Denn es ist $O3 : O1 = O4 : O2$, oder: $O3 : a = a^4 : a^2$, d. i. $O3 = a^3$. Jedes der aus einem Potenzpunkt des Umfanges auf die OE gefällten Lothe schneidet den nächstvorigen Strahl in einem Punkte, welcher um die um 1 verminderte Potenz von O absteht. So erhält man die zwischen der 1sten, 2ten, 4ten und 8ten Potenz liegenden arithmetisch aufsteigenden Potenzen von a durch Lothefällen und Streckenabtragen. Die eben erwähnten Schnittpunkte selbst liegen in einem neuen durch O gehenden Kreise, der den Durchmesser a^2 hat, u. s. w. u. s. w. Das Problem führt also die Potenzenfolge in mehreren Formen vor.

VI. Das folgende Verfahren ist für beliebige Werthe von a, seien sie $>$ oder <1, anwendbar. Man mache OE, Fig. 46, auf der Achse XOX gleich der Einheit, errichte in O ein Perpendikel YOY, schneide auf demselben $OA = a$ ab, und ziehe (oder denke gezogen) die EA. Zieht man alsdann die $A2$ normal zu EA, so ist der erhaltene Abschnitt $O2$ auf der X-Achse

Fig. 46.



der Werth a^2; wird dann 23 senkrecht zu $A2$ gezogen, so ergibt sich in dem Abschnitt $O3$ auf der Y-Achse der Werth a^3, und so fortfahrend erhält man auf der X-Achse a^4, überhaupt auf dieser die geraden, auf der Y-Achse die ungeraden positiven Potenzen von a. Beim Rückwärtsverfolgen des spiraligen Streckenzuges vermindert sich der Exponent je um 1 beim Uebergang von einer auf die andere Achse. Von A nach E fahrend, erhält man in EO den Werth $a^0 = 1$, darauf in $O-1$ den Werth $\frac{1}{a}$, darauf die Werthe $\frac{1}{a^2}, \frac{1}{a^3}$ u. s. w. (Bew.: Mult. VI. §. 22). Dieses Verfahren ist sehr geeignet für einzelne Potenzirungen von dargestellten, in einer Zeichnung vorkommenden Grössen.