

§. 13.

Drehungsfestigkeit.

Tragkraft und Verdrehungswinkel.

Ein stabförmiger Körper, den entgegengesetzt gerichtete Kräftepaare um seine geometrische Achse zu drehen suchen, wird auf Drehungsfestigkeit in Anspruch genommen. Hierbei widerstehen die Elemente eines Normalschnittes mit ihrer Schub- oder Gleitungsfestigkeit, und zwar tritt bei Beanspruchungen innerhalb der Elastizitätsgrenze Gleichgewicht ein zwischen dem Moment der verdrehenden äusseren Kräfte einerseits, und den Momenten der Spannungen in den verschiedenen Querschnittelementen andererseits, beide bezogen auf die polare Schwerpunktsachse des Querschnittes, d. h. auf die im Schwerpunkt des Querschnittes senkrecht auf ihm stehende Achse. Die Drehungsfestigkeit ist somit eine höhere Gattung der Schubfestigkeit, zu welcher sie in ähnlichem Verhältniss steht, wie die Biegefestigkeit zur Zug- und Druckfestigkeit.

Nennt man nun:

M das statische Moment der auf einen Stabquerschnitt wirkenden verdrehenden Kräfte oder das Kraftmoment,

J_p das polare Trägheitsmoment des Querschnittes, d. h. dessen Trägheitsmoment zu seiner polaren Schwerpunktsachse*),

a den Abstand des entferntesten Elementes des Querschnittes von dessen Schwerpunkt,

\mathfrak{S} die in diesem Element eintretende Schubspannung,

so ist

$$M = \frac{\mathfrak{S} J_p}{a} \dots \dots \dots (17)$$

Wenn der Stab lauter gleiche Querschnitte besitzt, so ist $\frac{J_p}{a}$ konstant. Führt man dann das Moment M auf einen Arm A , an welchem die verdrehende Kraft P angreift, zurück, so ist der gefährliche Querschnitt derjenige, für welchen M seinen Maximalwerth annimmt, und demnach die Tragkraft des Stabes:

$$P = \frac{\mathfrak{S} J_p}{A_m a} \dots \dots \dots (18)$$

*) Eine bei einzelnen Querschnittformen anzubringende Korrektion vorbehalten, vergl. §. 14.

wenn A_m den dem Maximum von M entsprechenden Werth von A bezeichnet.

Die Elastizitätsgrenze wird wie bei der Schubfestigkeit erreicht, wenn $\mathfrak{S} = \frac{4}{5}$ des kleineren der beiden Tragmodel des Materials, aus welchem der Stab besteht. (Vergl. §. 5.) Dieser Umstand ist bei Vergleichung von Biegungs- und Verdrehungsbeanspruchung im Auge zu behalten.

Die Verdrehung, welche zwei von einander abstehende Querschnitte des Stabes gegeneinander annehmen, heisst der Verdrehungs- oder Torsionswinkel. Er werde mit ϑ bezeichnet; für den Abstand x der beiden Querschnitte hat man allgemein:

$$\frac{d\vartheta}{dx} = \frac{M}{J_p G} \cdot \dots \dots \dots (19)$$

wobei G den Drehungsmodul des Materials bezeichnet, welcher $\frac{2}{5}$ des Elastizitätsmoduls E ist.

Die folgende Tafel enthält nun für eine Reihe von Angriffsarten der verdrehenden Kräfte an einem prismatischen Stab die Werthe für:

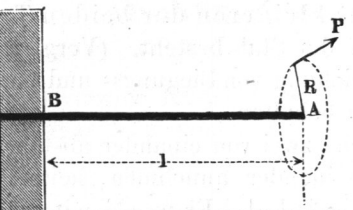
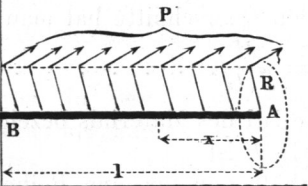
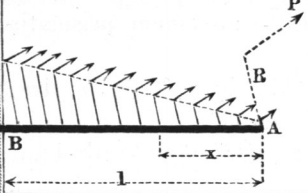
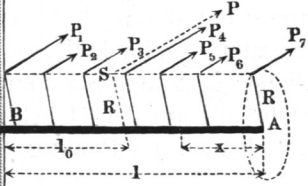
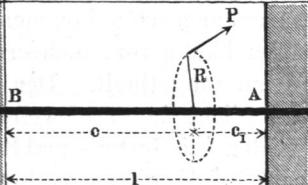
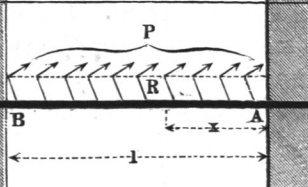
das Moment M an einer beliebigen Stelle (x) des Stabes,

die Tragkraft P nach Formel (18),

und den in Bogenmaass ausgedrückten Verdrehungswinkel ϑ des Stabes,

wobei mit PR das Gesamtmoment der verdrehenden Kräfte bezeichnet ist. Ausserdem bedeutet S beim Fall Nro. IV. den Angriffschwerpunkt sämmtlicher dort den Stab auf Verdrehung beanspruchenden Kräfte, welche alle auf den Hebelarm R zurückgeführt sind; l_0 ist dabei der Abstand des Punktes S von der Befestigungsebene des Stabes.

Die vorgeführten Beanspruchungsarten kommen in den Maschinen alle mehr oder weniger häufig vor, mehrere andere sind unten bei den Torsionsfedern mitgetheilt. Der Fall IV. der folgenden Tabelle ist der gewöhnliche der Triebwellen in den Fabriken. Die Fälle V. und VI. finden bei Gestell- und Rahmenbauten Anwendung. Aus den Formeln bei V. geht z. B. hervor, dass an einem Lokomotivrahmen, der etwa bei A und B festgehalten, und zwischen beiden Stellen den sogenannten Geradführungsbügel aufzunehmen hätte, der letztere die geringste Beanspruchung des Rahmens auf Torsion hervorbringt, wenn er mitten zwischen A und B gestellt wird.

| Nro. | Angriffsweise. | Kraftmoment M . |
|------|---|--|
| I. |  | $M = PR$ für alle Punkte zwischen A und B . |
| II. |  | $M = PR \frac{x}{l}$. |
| III. |  | $M = PR \frac{x^2}{l^2}$. $PR =$ dem Gesamtmoment der verdrehenden Kräfte. |
| IV. |  | $M =$ Summe der innerhalb der Länge x angreifenden Momente. |
| V. |  | Im Stück c : $M = PR \frac{c_1}{l}$. Im Stück c_1 : $M = PR \frac{c}{l}$. |
| VI. |  | $M = PR \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{l} \right)$. |

| Tragkraft P . | Verdrehungswinkel ϑ . | Bemerkungen. |
|---|--|---|
| $P = \frac{\epsilon J_p}{aR}$ | $\vartheta = \frac{PR.l}{J_p G}$ $= \frac{\epsilon l}{G a}$ | Alle Querschnitte zwischen A und B sind gleich fest. |
| $P = \frac{\epsilon J_p}{aR}$ | $\vartheta = \frac{1}{2} \frac{PR.l}{J_p G}$ $= \frac{1}{2} \frac{\epsilon l}{G a}$ | Gefährlicher Querschnitt bei B . |
| $P = \frac{\epsilon J_p}{aR}$ | $\vartheta = \frac{1}{3} \frac{PR.l}{J_p G}$ $= \frac{1}{3} \frac{\epsilon l}{G a}$ | Die drehenden Kräfte sind gleichförmig abnehmend von B nach A vertheilt. Gefährlicher Querschnitt bei B . |
| $P = \frac{\epsilon J_p}{aR}$ | $\vartheta = \frac{PR.l_0}{J_p G}$ $= \frac{\epsilon l_0}{G a}$ | Allgemeine Form für die Fälle I., II. und III. Gefährlicher Querschnitt bei B . Der Werth von ϑ in III. wird aus dem in IV. erhalten, wenn man für l_0 den dort sich ergebenden Werth $\frac{l}{3}$ einsetzt u. s. w. |
| Wenn $c_1 < c$, so ist: $P = \frac{\epsilon J_p l}{aR c}$ | $\vartheta = \frac{PR}{J_p G} \frac{c c_1}{l}$ $= \frac{\epsilon c_1}{G a}$ | Gefährlicher Querschnitt im Stücke c_1 als dem kürzeren Stücke. |
| $P = 2 \frac{\epsilon J_p}{aR}$ | $\vartheta = \frac{1}{8} \frac{PR.l}{J_p G}$ $= \frac{1}{4} \frac{\epsilon l}{G a}$ | Gefährliche Querschnitte bei A und B . |