

§. 10.

**Körper von gleicher Biegungsfestigkeit.**

Man erhält einen Körper von gleicher Biegungsfestigkeit, wenn man in einem der Biegung ausgesetzten Stabe die Querschnitte so wählt, dass in allen die Maximalspannung  $\mathfrak{S}$  auf Zug- oder Druckseite denselben Werth erhält; demnach lässt sich gemäss Formel (4) die Gleichung für die Körperform entwickeln aus:

$$\frac{Ma}{J} = Const. \dots \dots \dots (9)$$

Die Körperformen von gleicher Biegungsfestigkeit und besonders ihre Annäherungen finden zahlreiche Anwendungen im Maschinenbau; von ihnen gilt übrigens ebenfalls das in §. 4 Gesagte in vollem Maasse. Eine Reihe derselben zeigt die folgende Tafel.

Die Biegung, welche Körper von gleicher Festigkeit in Folge der Belastung annehmen, ist nothwendig grösser, als bei prismatischen Körpern von derselben Angriffweise der biegenden Kraft. Bei mehreren Fällen der folgenden Tafel ist die Einsenkung  $f$  angegeben; sie ist z. B. bei I. doppelt, bei V.  $1\frac{1}{2}$ mal so gross als bei dem gleicherweise angegriffenen prismatischen Stabe. Im allgemeinen gilt für die elastische Linie derjenigen (genau geformten) der folgenden Körper, deren Achse im unbelasteten Zustande gerade ist, der Ausdruck:

$$\frac{d_2 y}{dx^2} = \frac{M_0}{EJ_0} \frac{a_0}{a_x} \dots \dots \dots (10)$$

wenn

$M_0$  das Moment der biegenden Kraft für irgend einen Querschnitt, z. B. den an der Befestigungsstelle,

$J_0$  dessen Trägheitsmoment,

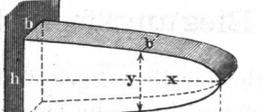
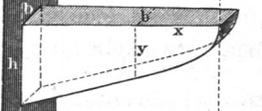
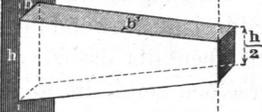
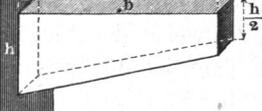
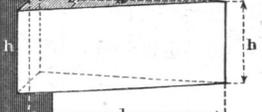
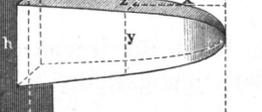
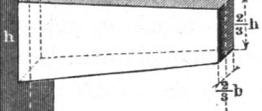
$a_0$  dessen grössten Faserabstand, und

$a_x$  den grössten, auf derselben Seite wie  $a_0$  gelegenen Faserabstand des bei  $x$  gelegenen Querschnittes bezeichnet.

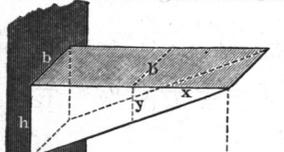
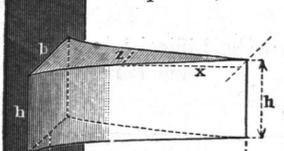
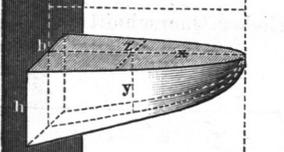
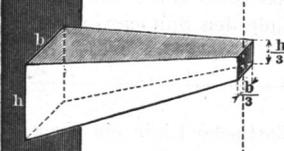
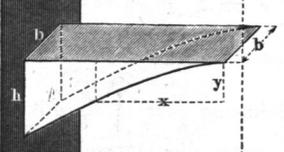
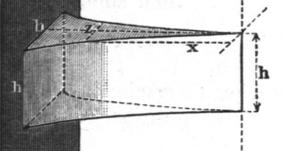
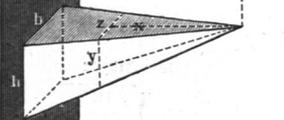
Für den Krümmungshalbmesser  $\varrho$  der elastischen Kurve an der Stelle  $xy$  ist dann:

$$\varrho = \frac{EJ_0}{M_0 a_0} a_x \dots \dots \dots (11)$$

welcher Werth konstant wird, also einem Kreisbogen angehört, wenn  $a_x = a_0$ , d. h. wenn alle Höhen im Stabe von gleicher Grösse sind, wie bei Fall V, X und XIV.

Nro.	Form.	Angriffsweise.	Gleichung.	Tragkraft.	Körper-Inhalt.	Bemerkungen.
I.			Für den Rechteckquerschnitt ist: $\frac{zy^2}{bh^2} = \frac{x}{l},$ Fall I. und II., $z = b,$	$P = \frac{\epsilon bh^2}{6l}$	$\frac{2}{3} bhl$	Einsenkung des freien Endes: $f = \frac{2}{3} \frac{Pl^3}{J_0 E}; J_0 = \frac{bh^3}{12}.$
II.			$\frac{y}{h} = \sqrt{\frac{x}{l}}.$ Parabolisch abgestumpfter Keil.	$P = \frac{\epsilon bh^2}{6l}$	$\frac{2}{3} bhl$	Die elastische Linie ist im Normalzustande eine Parabel.
III.			Annäherung an Form I. Abgestumpfter Keil.	$P = \frac{\epsilon bh^2}{6l}$	$\frac{3}{4} bhl$	Gefährlicher Querschnitt an der Befestigungsstelle.
IV.			Annäherung an Form II. Abgestumpfter Keil.	$P = \frac{\epsilon bh^2}{6l}$	$\frac{3}{4} bhl$	Die elastische Linie halbirt im Normalzustande den Spitzenwinkel des Keiles.
V.			$y = h; \frac{z}{b} = \frac{x}{l}.$ Normalkeil.	$P = \frac{\epsilon bh^2}{6l}$	$\frac{1}{2} bhl$	Elastische Linie ein Kreisbogen. $f = \frac{1}{2} \frac{Pl^3}{J_0 E}; J_0 = \frac{bh^3}{12}.$
VI.			$\frac{z}{y} = \frac{b}{h}; \frac{y}{h} = \sqrt[3]{\frac{x}{l}}.$ Kubisch-parabolisch abgestumpfte Pyramide.	$P = \frac{\epsilon bh^2}{6l}$	$\frac{3}{5} bhl$	Die Gleichung $\frac{y}{h} = \sqrt[3]{\frac{x}{l}}$ gilt hier überhaupt, wenn die Querschnitte alle ähnlich sind.
VII.			Annäherung an Form VI. Abgestumpfte Pyramide.	$P = \frac{\epsilon bh^2}{6l}$	$\frac{19}{27} bhl$	Gefährlicher Querschnitt an der Befestigungsstelle.
VIII.			Normalkegel-Stumpf. Annäherung an die strenge Form von der Gleichung $\frac{y}{h} = \sqrt[3]{\frac{x}{l}}.$	$P = \frac{\epsilon \pi d^3}{32 l}$	$\frac{19}{108} \pi l d^2$	Für gleiche Tragkraft mit Fall I. bis VII. hat man: $\frac{d}{h} = \sqrt[3]{\frac{16}{3\pi} \frac{b}{h}}.$

Die Last P greift am freien Ende an, Fall I., Tabelle S. 6.

Nro.	Form.	Angriffsweise.	Gleichung.	Tragkraft.	Körper-Inhalt.	Bemerkungen.			
IX.		Last P gleichförmig vertheilt. Fall VII., Tabelle S. 6.	Beim Rechteckquerschn. allgemein: $\frac{z y^2}{b h^2} = \frac{x^2}{l^2};$ $z = b; \frac{y}{h} = \frac{x}{l} \text{ Keil.}$	$P = \frac{\sigma b h^2}{3l}$	$\frac{1}{2} b h l$	Unter Abstumpfung der Endschärfe gut verwendbar.			
X.			Last P gleichförmig vertheilt. Fall VII., Tabelle S. 6.	$y = h; \frac{x}{l} = \sqrt{\frac{z}{b}}$ Parabolisch zugeshärfter Keil.	$P = \frac{\sigma b h^2}{3l}$	$\frac{1}{3} b h l$	Elastische Linie ein Kreisbogen. $f = \frac{1}{4} \frac{P l^3}{J_0 E}; J_0 = \frac{b h^3}{12}$		
XI.				Last P gleichförmig vertheilt. Fall VII., Tabelle S. 6.	$\frac{z}{y} = \frac{b}{h}; \frac{y}{h} = \sqrt[3]{\frac{x^2}{l^2}}$ Pyramide abgestumpft nach semi-kubischen od. Neil'schen Parabeln.	$P = \frac{\sigma b h^2}{3l}$	$\frac{3}{7} b h l$	Zeigt eine gute Grundform für architektonische Tragsteine.	
XII.					Last P gleichförmig vertheilt. Fall VII., Tabelle S. 6.	Annäherung an Form XI. Abgestumpfte Pyramide.	$P = \frac{\sigma b h^2}{3l}$	$\frac{13}{27} b h l$	Gefährlicher Querschnitt an der Befestigungsstelle.
XIII.						Last P gleichförmig abnehmend vertheilt. Fall XI., Tabelle S. 6.	Beim Rechteckquerschn. allgemein: $\frac{z y^2}{b h^2} = \frac{x^3}{l^3};$ $z = b; \frac{x}{l} = \sqrt[3]{\frac{y^2}{h^2}}$ Keil, zugeshärft nach der semi-kubischen Parabel.	$P = \frac{\sigma b h^2}{2l}$	$\frac{2}{5} b h l$
XIV.		Last P gleichförmig abnehmend vertheilt. Fall XI., Tabelle S. 6.					$y = h; \frac{x}{l} = \sqrt[3]{\frac{z}{b}}$ Nach kubischen Parabeln zugeshärfter Keil.	$P = \frac{\sigma b h^2}{2l}$	$\frac{1}{4} b h l$
XV.			Last P gleichförmig abnehmend vertheilt. Fall XI., Tabelle S. 6.				$\frac{z}{y} = \frac{b}{h}; \frac{y}{h} = \frac{x}{l}$ Pyramide.	$P = \frac{\sigma b h^2}{2l}$	$\frac{1}{3} b h l$

Mit den vorstehend gegebenen Formen sind nur die allereinfachsten der sich hier darbietenden Fälle erschöpft; leicht würden dieselben auf eine grosse Anzahl zu vermehren sein. (Übungsaufgaben.) Hierfür brauchte man z. B. nur die Veränderlichkeit der Breiten- oder Höhenabmessungen etwas verwickelter einzuführen, als es geschah. So ergibt sich z. B., wenn man bei I. den Grundriss parabolisch gestaltet, d. i.  $\frac{z}{b} = \sqrt{\frac{x}{l}}$  macht,  $\frac{y}{h} = \sqrt[4]{\frac{x}{l}}$  (biquadratische Parabel) u. s. w. Zusammengesetztere Querschnitte liefern ebenfalls neue Körpergebilde, deren mannigfaltige Abänderungen einen reichen Wechsel von Formen darzubieten vermögen. Beispiele hierzu finden sich u. a. bei den Tragachsen, Kapitel VII. Siehe übrigens auch weiter unten bei den Biegungsfedern, wo besondere Formen dadurch entstehen, dass die neutrale Schicht ursprünglich nicht eben ist.

## §. 11.

**Scheerfestigkeit in der neutralen Schicht.**

Da in einem gebogenen Stabe auf der Zugseite lauter Zugkräfte, auf der Druckseite lauter Druckkräfte zwischen den Faser-molekülen wirken, erfährt die neutrale Schicht eine Beanspruchung auf Scheerfestigkeit, und darf deshalb nicht unter einer gewissen Breitenabmessung ausgeführt werden\*). Die zu vermeidende untere Grenze liegt zwar in der Regel sehr tief; doch verdient sie immerhin gekannt zu sein. Heisst die kleinste zulässige Breite  $z_0$ , und die Mittelkraft der auf einer oder der anderen Seite eines Querschnittes angreifenden äusseren Kräfte  $R$ , so muss sein, wenn die Schubspannung an der neutralen Schicht den Werth  $\mathfrak{S}_0$  nicht überschreiten soll:

$$z_0 \geq \frac{R}{\mathfrak{S}_0} \frac{U}{2J} \quad \dots \dots \dots (14)$$

Hierbei darf  $\mathfrak{S}_0$  nicht über  $\frac{4}{5}$  des kleineren der beiden Tragmodel des Materiales betragen (vergl. §. 5). Zugleich bedeutet  $J$  wie bisher das Trägheitsmoment des Querschnittes, d. i. die Summation der Produkte aller der neutralen Schicht parallelen Flächenelemente mit den Quadraten ihrer Abstände von der neutralen Schicht,  $U$  aber das statische Moment des Querschnittes, d. i. die

\*) Siehe Zeitschr. des Ver. deutsch. Ing. 1859, S. 193; auch Grashof's Festigkeitslehre (Berlin, Gärtner), S. 147.