§. 5.

Schub- oder Gleitungsfestigkeit.

Ein Körper wird in einem Querschnitt auf Schub- oder Gleitungsfestigkeit, die auch Abscheerungs- oder Scheerfestigkeit genannt wird, beansprucht, wenn die angreifende Kraft P in der Ebene des Querschnittes wirkt.

Ist wieder q die Grösse des Querschnittes, und $\mathfrak{S}$ die darin eintretende Spannung, so hat man wie bei Zug- und Druckfestigkeit für die Tragkraft:

$$P = \mathfrak{S}q \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Die Elastizitätsgrenze wird erreicht, wenn $\mathfrak{S} = {}^4/_5$ des kleineren der beiden Tragmodel des Materials wird, also beim Schmiedeisen, wo $T = T_1 = 15$, bei $\mathfrak{S} = 12$, für Gusseisen, wo $T < T_1$ und $= 7{,}5$ bei $\mathfrak{S} = 6$. Es tritt nämlich hier die Maximalspannung nicht in der Ebene des Querschnittes, sondern um 45^0 dagegen geneigt ein, und hat die ${}^5/_4$fache Grösse von $\mathfrak{S}$.

Die Querverschiebung, welche die zwei Flächen des auf Gleitungsfestigkeit beanspruchten Querschnittes erleiden, ist innerhalb der Elastizitätsgrenze sehr klein, macht sich aber bemerkbar, wenn wie bei einem auf Drehungsfestigkeit beanspruchten Stabe viele querverschobene Querschnitte aufeinander folgen.

Gleichung (3) gilt auch für solche Fälle, wo die Trennung der beanspruchten Flächen bezweckt wird, also für das Abschneiden, Ausstossen, Durchlochen, d. i. das Arbeiten mit denjenigen Maschinen, welche man neuerdings häufig unter dem Namen Durchbruch-Maschinen zusammenfasst. Die Spannung $\mathfrak{S}$, bei welcher der Bruch erfolgt, zeigt sich etwas weniges abweichend von dem Bruchmodul für Zug (K). Die Abweichung erklärt sich daraus, dass K und K_1 beim Abscheeren gleichzeitig zur Wirkung kommen. Für die Berechnung der Durchbruch-Maschinen genügt es, etwa 1,1 K als Bruchkoëffizient einzuführen.

§. 6.

Biegungsfestigkeit.

Tragkraft und elastische Linie.

Ein stabförmiger Körper, an welchem solche äussere Kräfte sich das Gleichgewicht halten, welche senkrecht zur Stabachse gerichtet sind, ist auf Biegungsfestigkeit beansprucht. So lange die Beanspruchung die Elastizitätsgrenze nicht überschreitet, tritt für jeden Normalquerschnitt des Stabes Gleichgewicht ein zwischen dem Moment der äusseren Kräfte einerseits, und den Momenten der in dem Querschnitt widerstehenden inneren Kräfte andererseits, beide bezogen auf die neutrale Achse des Querschnittes. Diese ist ein Aequator des Querschnittes, d. h. sie geht durch den Schwerpunkt desselben, und steht senkrecht auf der Biegungsebene. Sie theilt den Querschnitt in zwei Theile, von denen in dem einen alle zur Stabachse parallelen Fasern proportional ihrer Entfernung von der neutralen Achse auf Zug beansprucht sind (Zugseite des Querschnittes), während in dem anderen die Fasern auf Druck beansprucht werden (Druckseite des Querschnittes), und zwar ebenfalls proportional ihrem Abstand von der neutralen Achse. Gleichweit von der neutralen Achse entfernte Fasern auf Zug- und Druckseite erleiden dabei gleiche aber entgegengesetzt gerichtete Formänderungen. Die Biegungsfestigkeit ist sonach eine Vereinigung von Zug- und Druckfestigkeit, wobei beide in einer höheren Ordnung, nämlich mit Achsendrehung, vorkommen. Ist nun:

M das statische Moment der einen Querschnitt auf Biegung beanspruchenden Mittelkraft, bezogen auf die neutrale Achse des Querschnittes, oder das sogenannte Kraftmoment,

J das Trägheitsmoment des Querschnittes zu seiner neutralen Achse,

a der Abstand der stärkst gespannten, d. h. der von der neutralen Achse am weitesten entfernten Faser auf der Zug- oder der Druckseite des Querschnittes,

$\mathfrak{S}$ die in dieser Faser eintretende Spannung, so ist:

$$M = \mathfrak{S} \frac{J}{a} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

Das Produkt $\mathfrak{S} \frac{J}{a}$ ist das statische Moment sämmtlicher Faserspannungen bezogen auf die neutrale Achse und heisse das Spannungsmoment des untersuchten Querschnittes, oder auch dessen Tragmoment für die Spannung $\mathfrak{S}$. Ist der gebogene Stab prismatisch, die biegende Mittelkraft P und ihr Hebelarm für irgend einen Querschnitt x, so kann zunächst $M = Px$ für jeden Querschnitt einen anderen Werth haben. Derjenige Querschnitt, für welchen Px seinen grössten Werth annimmt, heisst der gefährliche Querschnitt, und die biegende Kraft P, welche in ihm die Spannung $\mathfrak{S}$ hervorruft, ist die Tragkraft des Stabes für die Spannung $\mathfrak{S}$, so dass man für die Tragkraft hat:

$$P = \frac{\mathfrak{S} J}{x_m a} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

wobei x_m denjenigen Werth von x bezeichnet, bei welchem Px ein Maximum ist.

Die die Schwerpunkte der Stabquerschnitte verbindende Achse des Stabes erfährt bei der Biegung keine oder nur eine vernachlässigbar kleine Längenänderung; sie wird nur gebogen, und zwar gilt für ihren Krümmungshalbmesser ϱ die Formel:

$$\varrho = \frac{JE}{M} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Die Kurve, nach welcher die Krümmung stattfindet, heisst eine elastische Linie, deren Gleichung der allgemeine Ausdruck

$$\frac{d_2 y}{dx^2} = \frac{M}{JE} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

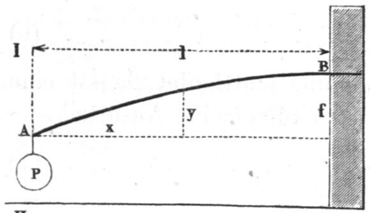
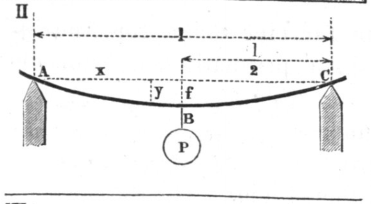
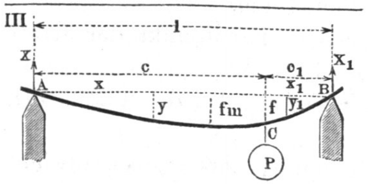
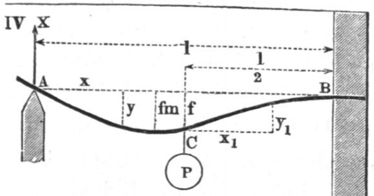
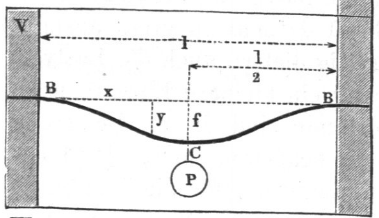
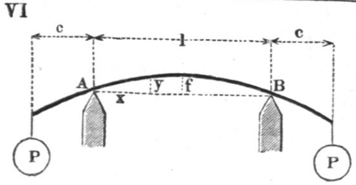
gibt.

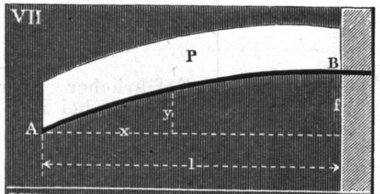
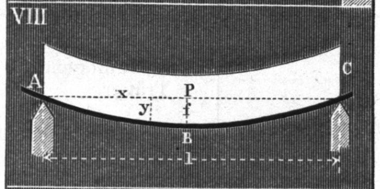
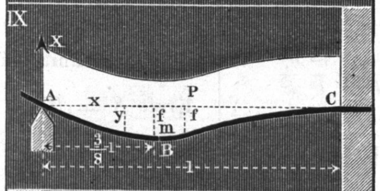
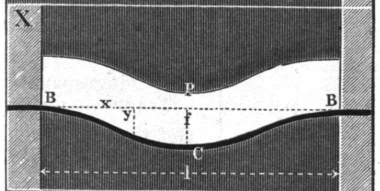
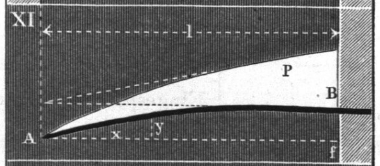
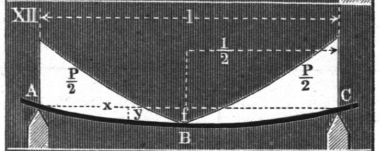
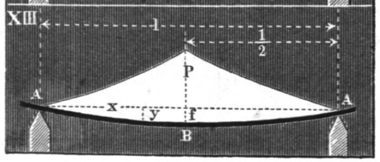
In der folgenden Tafel sind nun für eine Reihe von Angriffarten einer biegenden Kraft auf einen prismatischen Stab die Werthe zusammengestellt für

das Kraftmoment M für den Punkt x,
die Tragkraft P nach Formel (5),
die Koordinaten x, y der elastischen Linie,
für den Werth f der Abszisse y am Angriffpunkt der Kraft bei den Belastungsweisen Nro. I. bis VI.,
und endlich für die stärkste Einsenkung f bei den Fällen VII. bis XIII.

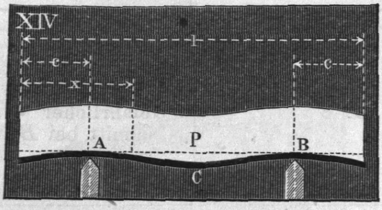
Bei sämmtlichen aufgeführten Fällen ist das eigene Gewicht des betrachteten Balkens vernachlässigt, was bei zahlreichen praktischen Fällen, namentlich des Maschinenbaufaches, zulässig ist, weniger beim Brückenbaufach. Die Fälle VII. bis X. können als solche benutzt werden, bei denen das Stabgewicht berücksichtigt werden soll. In den Fällen XI. und XII. ist gezeigt, wie eine passende ungleichförmige Vertheilung der Last eines Balkens dessen Tragkraft wesentlich erhöhen kann, indem bei der Belastungsweise nach XI. und XII. die Tragkraft $1^1/_2$mal so gross ausfällt, als bei Nro. VII. und VIII. Gleichzeitig liefern auch die Lastvertheilungen in XI. und XII. noch obendrein kleinere Einsenkungen als Nro. VII. und VIII. Diese Umstände sind für die Belastung von Magazinen, Speichern u. s. w. sehr beachtenswerth. Die Lastvertheilung in Nr. XIII. ist dagegen ungünstig für die Tragkraft; sie zieht dieselbe auf das $^3/_4$fache des Falles Nro. VIII. herab und macht auch die Einsenkung f grösser als dort.

Zu beachten ist, dass die Einsenkung f durchgehends mit der dritten Potenz der Längenabmessungen wächst, und dass sie bei verschiedener Auflagerungsart des Stabes sehr stark verändert auftritt.

Angriffweise.	Kraftmoment M.	Tragkraft.	Gleichung der elastischen Linie.	Einsenkung f.	Bemerkungen.
I 	$M = Px$	$P = \frac{\mathfrak{S}J}{la}$	$y = \frac{P}{JE}\frac{l^3}{2}\left[\frac{x}{l} - \frac{1}{3}\frac{x^3}{l^3}\right]$	$f = \frac{P}{JE}\frac{l^3}{3}$	Freiträger. Gefährlicher Querschnitt bei B.
II 	$M = \frac{Px}{2}$	$P = 4\,\frac{\mathfrak{S}J}{al}$	$y = \frac{P}{JE}\frac{l^3}{16}\left[\frac{x}{l} - \frac{4}{3}\frac{x^3}{l^3}\right]$	$f = \frac{P}{JE}\frac{l^3}{48}$	Frei aufliegender Träger. Gef. Querschnitt in der Mitte.
III 	Für AC: $M = \frac{Pc_1x}{l}$ Für BC: $M = \frac{Pcx_1}{l}$	$P = \frac{l}{cc_1}\frac{\mathfrak{S}J}{a}$	$y = \frac{P}{JE}\frac{c^2c_1^2}{6l}\left[2\frac{x}{c} + \frac{x}{c_1} - \frac{x^3}{c^2c_1}\right]$ $y_1 = \frac{P}{JE}\frac{c_1^2c^2}{6l}\left[2\frac{x_1}{c_1} + \frac{x_1}{c} - \frac{x_1^3}{c_1^2c}\right]$	$f = \frac{P}{JE}\frac{l^3}{3}\frac{c^2}{l^2}\frac{c_1^2}{l^2}$ f_{max} bei $x = c\sqrt{\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\frac{c_1}{c}}$	Gef. Querschnitt bei C. Kraft $X = P\frac{c_1}{l}$ „ $X_1 = P\frac{c}{l}$
IV 	Für AC: $M = \frac{5}{16}Px$ Für BC: $M = Pl\left(\frac{5}{32} - \frac{11}{16}\frac{x_1}{l}\right)$	$P = \frac{16}{3}\frac{\mathfrak{S}J}{la}$	$y = \frac{P}{JE}\frac{l^3}{32}\left[\frac{x}{l} - \frac{5}{3}\frac{x^3}{l^3}\right]$ $y_1 = \frac{P}{JE}\frac{l^3}{32}\left[\frac{1}{4}\frac{x_1}{l} + \frac{5}{2}\frac{x_1^2}{l^2} - \frac{11}{3}\frac{x_1^3}{l^3}\right]$	$f = \frac{P}{JE}\frac{7l^3}{768}$ $f_{max} = \sqrt{\frac{1}{5}}\,\frac{Pl^3}{48JE}$ bei $x = l\sqrt{\frac{1}{5}}$	Halb eingespannter Träger. Gef. Querschnitt bei B. Kraft $X = \frac{5}{16}P$.
V 	$M = \frac{Pl}{2}\left(\frac{x}{l} - \frac{1}{4}\right)$	$P = 8\,\frac{\mathfrak{S}J}{la}$	$y = \frac{P}{JE}\frac{l^3}{16}\left[\frac{x^2}{l^2} - \frac{4}{3}\frac{x^3}{l^3}\right]$	$f = \frac{P}{JE}\frac{l^3}{192}$	Eingespannter Träger. Gef. Querschnitte bei B und C.
VI 	Für AB: $M = Pc$	$P = \frac{\mathfrak{S}J}{ca}$	$y = f - \varrho + \sqrt{\varrho^2 - x^2 + l\left(x - \frac{l}{4}\right)}$ wobei $\varrho = \frac{JE}{Pc}$	$f = \frac{P}{JE}\frac{l^3}{8}\frac{c}{l}$	Gef. Quersch. an einer beliebigen Stelle zwischen A und B.

Angriffweise.	Kraftmoment M.	Tragkraft P.	Gleichung der elastischen Linie.	Einsenkung f.	Bemerkungen.
	$M = \frac{Px}{2}\frac{x}{l}$	$P = 2\frac{\mathfrak{S}J}{la}$	$y = \frac{P}{JE}\frac{l^3}{6}\left[\frac{x}{l} - \frac{1}{4}\frac{x^4}{l^4}\right]$	$f = \frac{P}{JE}\frac{l^3}{8}$	Freiträger. Gefährlicher Querschnitt bei B.
	$M = \frac{Px}{2}\left(1 - \frac{x}{l}\right)$	$P = 8\frac{\mathfrak{S}J}{la}$	$y = \frac{P}{JE}\frac{l^3}{24}\left[\frac{x}{l} - 2\frac{x^3}{l^3} + \frac{x^4}{l^4}\right]$	$f = \frac{P}{JE}\frac{5l^3}{384}$	Frei aufliegender Träger. Gef. Querschnitt in der Mitte.
	$M = \frac{Px}{2}\left(\frac{3}{4} - \frac{x}{l}\right)$	$P = 8\frac{\mathfrak{S}J}{la}$	$y = \frac{P}{JE}\frac{l^3}{48}\left[\frac{x}{l} - 3\frac{x^3}{l^3} + 2\frac{x^4}{l^4}\right]$	$f = \frac{P}{JE}\frac{l^3}{192}$	Gef. Querschnitt bei C. Stärkste Senkung bei $x = \frac{l}{16}(1 + \sqrt{33})$ Kraft $X = {}^3/_8 P$. Wendepunkt bei $x = {}^3/_4 l$.
	M für $x = 0$; $-\frac{Pl}{2}\cdot\frac{1}{6} = \frac{Pl}{12}$ $M = \frac{Pl}{2}\left(\frac{1}{6} - \frac{x}{l} + \frac{x^2}{l^2}\right)$ M für $x = \frac{l}{2}$ $= \frac{Pl}{2}\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2} + \frac{l^2}{4l^2}\right) = \frac{Pl}{2}\left(\frac{2-6+3}{12}\right) = \frac{Pl}{24}$	$P = 12\frac{\mathfrak{S}J}{la}$	$y = \frac{P}{JE}\frac{l^3}{24}\left[\frac{x^2}{l^2} - 2\frac{x^3}{l^3} + \frac{x^4}{l^4}\right]$	$f = \frac{P}{JE}\frac{l^3}{384}$	Gef. Querschnitt bei B. Wendepunkt bei $x = \frac{l}{2}\left(1 - \sqrt{\frac{1}{3}}\right)$
	$M = \frac{Px}{3}\frac{x^2}{l^2}$	$P = 3\frac{\mathfrak{S}J}{la}$	$y = \frac{P}{JE}\frac{l^3}{12}\left[\frac{x}{l} - \frac{1}{5}\frac{x^5}{l^5}\right]$	$f = \frac{P}{JE}\frac{l^3}{15}$	Freiträger. Gef. Querschnitt bei B.
	$M = Px\left(\frac{1}{2} - \frac{x}{l} + \frac{2}{3}\frac{x^2}{l^2}\right)$	$P = 12\frac{\mathfrak{S}J}{la}$	$y = \frac{P}{JE}\frac{l^3}{12}\left[\frac{3}{8}\frac{x}{l} - \frac{x^3}{l^3} + \frac{x^4}{l^4} - \frac{2}{5}\frac{x^5}{l^5}\right]$	$f = \frac{P}{JE}\frac{3l^3}{320}$	Gef. Querschnitt in der Mitte.
	$M = Px\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\frac{x^2}{l^2}\right)$	$P = 6\frac{\mathfrak{S}J}{la}$	$y = \frac{P}{JE}\frac{l^3}{12}\left[\frac{5}{8}\frac{x}{l} - \frac{x^3}{l^3} + \frac{2}{5}\frac{x^5}{l^5}\right]$	$f = \frac{P}{JE}\frac{l^3}{60}$	Gef. Querschnitt in der Mitte.

XIV. Für einen auf zwei symmetrisch angebrachte Stützen A und B gelagerten Stab mit der gleichförmig vertheilten Last P hat man für das Kraftmoment:



$$M = \frac{Px}{2}\left(\frac{x}{l} - 1 + \frac{c}{x}\right).$$

Die Tragkraft ändert sich je nach der Stellung der Stützen, also dem Verhältniss von c zu l; sie wird ein Maximum, wenn

$$c = 0{,}207\,l \left[\text{d.i. } l\left(\sqrt{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\right)\right]$$

gemacht wird. Die Tragkraft ist alsdann sehr nahe:

$$P = 47\,\frac{\mathfrak{S}J}{la},$$

also fast 6mal so gross, als im Falle VIII, die Stützungsart mithin sehr günstig. Gefährliche Querschnitte liegen dabei an den Punkten A, B und C.

§. 7.

Querschnitt-Tabelle.

Der Werth $\frac{J}{a}$ in Gleichung (4) hängt bloss von Abmessungen des Stabquerschnittes ab, und wird im folgenden als **Querschnittmodul** bezeichnet. Für eine Reihe von Querschnittformen sind in der nachstehenden Tabelle zusammengestellt die Werthe für:

das (äquatoriale) Trägheitsmoment J zur neutralen Achse, welche den Figuren punktirt eingezeichnet ist;

die grösste Faserentfernung a auf Zug- und Druckseite, oder für jede Seite einzeln (a' und a''), wenn der Querschnitt nicht zweiachsig symmetrisch ist;

den (äquatorialen) Querschnittmodul $Z = \frac{J}{a}$, für welchen sich auch zwei Werthe ergeben, wenn a' von a'' verschieden ist,

und den Flächeninhalt F des Querschnittes, welcher bei Gewichtberechnungen dienlich ist.

Wo in der Spalte für a steht: „durch Versuche oder graphisch zu bestimmen", sind die Ausdrücke zu verwickelt, um hier noch praktisch genannt werden zu können. Für diese Fälle schneidet man ein Modell des zu betrachtenden Querschnittes aus Karton aus und sucht dessen Schwerpunkt durch Abwägen auf einer Schneide oder man bedient sich der **graphostatischen Methode**, siehe §. 46.