

ERSTER ABSCHNITT.

FESTIGKEIT DER MATERIALIEN.

§. 1.

Vorbemerkungen.

Die Lehre von der Festigkeit der Materialien gibt Aufschluss über die Widerstände, welche feste Körper den auf sie wirkenden Kräften entgegensetzen. Die hier benutzten Kunstausrücke dieser Lehre haben folgenden Sinn.

Flächendruck, Druck auf die Flächeneinheit.

Spannung, die auf die Flächeneinheit zurückgeführte Anspannung der Molekularfasern; allgemeiner: Kraft auf die Flächeneinheit.

Tragmodul, die Spannung, welche der Elastizitätsgrenze entspricht. Der Zug- und der Druckfestigkeit entsprechen ein Zug- und ein Drucktragmodul.

Bruchkoeffizient oder Bruchmodul, die Spannung, bei welcher eine Molekularfaser ihren Zusammenhang aufgibt.

Elastizitätsmodul, das Maass der elastischen Nachgiebigkeit eines Materials, die Spannung, bei welcher ein prismatischer, in seiner Längenrichtung beanspruchter Körper um seine ganze Länge ausgedehnt oder zusammengepresst wird (eine solche Formänderung als möglich vorausgesetzt).

Theoretische Tragkraft, die Kraft, welche in einem von ihr irgendwie (auf Zug, Druck, Drehung, Biegung etc.) beanspruchten Körper in der stärkst gespannten Faser eine Spannung gleich dem Tragmodul hervorruft, also die Festigkeit des Körpers bis zur Elastizitätsgrenze in Anspruch nimmt.

Praktische Tragkraft oder Tragkraft schlechthin wird dieselbe Kraft genannt, wenn sie jene Spannung nur bis zu einer beabsichtigten und für zulässig erachteten Höhe unterhalb der Elastizitätsgrenze treibt. („Tragkraft“ der Eisenbahnwagen.)

Tragsicherheit, das Verhältniss zwischen der theoretischen Tragkraft und der Belastung, oder was dasselbe ist, zwischen dem Tragmodul und der stärksten eintretenden Spannung.

Bruchkraft oder Bruchbelastung heisst die obige Kraft, wenn sie in der stärkst gespannten Faser des Körpers eine Spannung gleich dem Bruchmodul hervorruft; die Bruchkraft ist in besonderen Fällen die Kraft zum Zerreißen, Zerdrücken, Abscheeren, Abwinden, Abbrechen, Zerknicken.

Bruchsicherheit, Sicherheit gegen den Bruch, das Verhältniss zwischen der Bruchkraft und der Belastung.

Beanspruchung, der umgekehrte Werth der Sicherheit.

Als allgemeine Regel für den Maschinenbau kann es gelten, dass in der Regel eine zweifache Tragsicherheit den auf einen Konstruktionstheil einwirkenden statischen Kräften gegenüber passend ist. Unter Umständen muss indessen nach oben oder unten von dem genannten Maasse abgewichen werden; nach oben darf um so mehr abgewichen werden, je genauer die Aufsuchung der statischen Kräfte stattgefunden hat. Nie soll man einen Maschinetheil bei seinem Gebrauche über seine theoretische Tragkraft hinaus belasten; dagegen sind bei einzelnen Materialien, namentlich z. B. beim Schmiedeeisen, solche Probelastungen, welche den Körper bloss über eine seiner Elastizitätsgrenzen hinaus beanspruchen, ohne sich der Bruchkraft zu sehr zu nähern, allem Anschein nach nicht schädlich. (Siehe §. 2.)

Die Ermittlung der Bruchkraft und somit die Benutzung der Bruchmodul beschränkt sich vorzugsweise auf diejenigen Fälle, wo der Bruch (das Zerreißen, Zerbrennen, Durchlöcheren etc.) eines Körpers geradezu bezweckt wird; für die Berechnung von bleibenden Konstruktionen ist der Hauptwerth auf die Tragmodul zu legen.

§. 2.

Festigkeits-Koeffizienten für das metrische System.

Die in nachstehender Tabelle zusammengestellten Koeffizienten sind Mittelwerthe aus zahlreichen, von vielen Experimentatoren an den verschiedensten Gattungen der aufgeführten Materialien angestellten Versuchen. Bei dem „Holz“ sind die Mittelwerthe für Eichen-, Buchen-, Tannen- und Eschenholz; als wenig von einander abweichend, zusammengefasst.

Materialien, bei welchen die zusammengehörigen Bruch- und Tragmodul sich stark unterscheiden, besitzen in hohem Grade die Eigenschaft der Zähigkeit. Die Versuche am Schmiedeeisen zeigen, dass eine nicht gar zu weit über die Elastizitätsgrenze hinaus getriebene Belastung, welche also eine bleibende Formänderung in dem belasteten Körper hervorruft, den Elastizitätsmodul nicht verändert, den Tragmodul aber erhöht. So zeigt z. B. ein Schmiedeeisenstab, der mit 20% pro Quadratmillimeter ausgedehnt wurde, in dem neuen Zustande bei Erneuerung der Belastung einen Zutragsmodul von 20 statt von 15%. (Benutzung dieser Erscheinung beim Drahtziehen.) Die Zähigkeit ist eine sehr gute Eigenschaft für ein Konstruktionsmaterial; sie kann wenigstens annähernd bemessen werden aus den Quotienten $K:T$ und $K_1:T_1$. Geschwächt wird sofort der obige übertrieben belastete Eisenstab, wenn man ihn nach dem Ausdehnen über die andere Elastizitätsgrenze hinaus zusammenpresst; zu seinem anfänglichen Tragmodul kehrt er nach jener ersten Streckung zurück, wenn man ihn ausglüht.

Material	Elastizitätsmodul E	Tragmodul		Bruchmodul	
		für Zug T	für Druck T_1	für Zug K	für Druck K_1
Schmiedeeisen	20000	15	15	40	22
Eisendraht	20000	30	—	70	—
Eisenblech	17000	—	—	32	—
Gusseisen	10000	7,5	15	11	63
Federstahl, gehärtet	20000	50 bis 70	—	80	—
Gussstahl, ungehärtet	20000	25	—	80	—
Gussstahl, federhart	30000	65 bis 150	—	100	—
Kupfer, gehämmert	11000	2,5	—	30	70
Kupferdraht	13000	12	—	40	—
Messing	6500	4,8	—	12	110
Messingdraht	10000	13	—	50	—
Glockengut, Bronze	3200	9	—	13	—
Phosphorbronze	—	15	—	36	—
Sterrometall	—	15	—	75	—
Blei	500	1	—	1,3	5
Holz	1100	2	1,8	9	5
Hanfseil, neu	250 (?)	5 (?)	—	12	—
Hanfseil, alt	50 (?)	1 (?)	—	5	—
Treibriemen, gebr.	15 bis 20	1,6	—	2,9	—
Granit	—	—	—	—	8
Kalkstein	—	—	—	—	5
Quarz	—	—	—	—	12
Sandstein	—	—	—	—	7
Ziegelstein	—	—	—	—	0,6
Kalksteinmauerwerk	—	—	—	—	5
Sandsteinmauerwerk	—	—	—	—	1,5
Ziegelmauerwerk	—	—	—	—	0,4

Bei Rechnungen mit den Werthen dieser Tabelle sind die Abmessungen in Millimetern, die Kräfte in Kilogrammen einzusetzen.

§. 3.

Zug- und Druckfestigkeit.

Ein Stab ist auf Zugfestigkeit beansprucht, wenn die angreifende Kraft P ihn in seiner Längenrichtung auszudehnen sucht. Ist dagegen die Kraft gerade entgegengesetzt gerichtet, so beansprucht sie den Körper auf Druckfestigkeit, vorausgesetzt übrigens, dass die Länge des Stabes gegen dessen Querschnittmaasse nicht zu gross sei (vergl. §. 16).

Ist q Querschnitt des Stabes,

\mathfrak{E} die darin durch die Kraft P hervorgerufene Spannung, so ist bei Vernachlässigung des Eigengewichtes des Stabes die Tragkraft bei der Spannung \mathfrak{E} :

$$P = \mathfrak{E}q (1)$$

Beispiel. Ein Dachstuhl übe an seinem Fusse einen Horizontal-schub von 10000* aus, welcher durch eine horizontale runde Querstange aufgenommen werden soll. Gestattet man in derselben die Spannung

$$\mathfrak{E} = 5^k, \text{ so ist zu setzen bei der Stangendicke } d: \mathfrak{E}q = 5 \cdot \frac{\pi}{4} d^2 = 10000;$$

woraus $d = 50,46, \sim 50\text{mm}^*$.

Die Hauptformänderungen, welche die Beanspruchung auf Zug- oder Druckfestigkeit in einem Körper hervorruft, sind Verlängerung oder Verkürzung desselben. Ein prismatischer, durch die Kraft P auf Zug beanspruchter Körper von der ursprünglichen Länge l verlängert sich um die Grösse λ , für welche gilt:

$$\frac{\lambda}{l} = \frac{\mathfrak{E}}{E} (2)$$

welche Formel so lange richtig bleibt, als \mathfrak{E} nicht grösser als der Zugtragmodul T ist. — Dieselbe Formel gilt für die Zusammenpressung des Stabes durch die Kraft P , wobei der Drucktragmodul T_1 die Grenze der Gültigkeit der Formel angibt.

Beispiel. Die oben berechnete Querstange sei vor dem Einsetzen 35^m lang; sie wird sich dann bei eintretender Belastung verlängern um:

$$\lambda = \frac{35000 \cdot 5}{20000} = \frac{35}{4} \sim 9\text{mm}.$$

Die vorstehende Formel (2) ist ein Erfahrungssatz. Derselbe bildet die Grundlage der ganzen Festigkeitslehre.

*) Das Zeichen „ \sim “ bedeutet: „sei“ oder „abgerundet auf“.

Formel (1) gilt, weil bei Zug- und Druckfestigkeit alle Querschnittelemente gleichstark beansprucht werden, auch über die Elastizitätsgrenze hinaus, so dass man mittelst derselben die Kraft finden kann, welche einen Körper zerreisst oder zerdrückt. Man hat dafür die betreffenden Bruchmodel einzusetzen.

Beispiel. Zum Zerreißen der oben berechneten Stange bedarf es einer Zugkraft $P = K \cdot q$ oder, der Tabelle §. 2 gemäss, $P = 40 \cdot 50^2 \frac{\pi}{4} = 78540k$; zum Zerdrücken eines niedrigen Stückes derselben bedürfte es einer Kraft $P_1 = K_1 q = 22 \cdot 50^2 \frac{\pi}{4} = 43197k$.

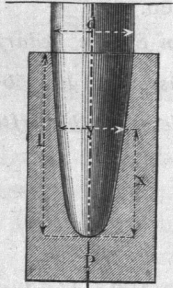
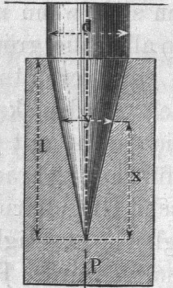
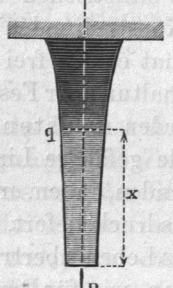
§. 4.

Körper von gleicher Zug- und Druckfestigkeit.

Körperformen von gleicher Festigkeit ergeben sich, wenn man in einem Körper die Querschnitte so wählt, dass in allen die grösste Spannung \mathcal{S} denselben Werth erhält, wodurch eine verhältnissmässig sehr günstige Materialverwendung erzielt werden kann. Solche Körperformen werden indessen gewöhnlich nicht mit Genauigkeit, sondern nur näherungsweise zur Ausführung gebracht; sie dienen in vielen Fällen sogar nur als stilistische Grundformen, die einer Konstruktion nur den Ausdruck der gleichen Festigkeit zu verleihen haben, ohne dass diese streng eingehalten würde. Dem Konstrukteur sind sie aus beiden Gründen von Werth; ja es möchte der Zahl nach die zweite Benutzungsart, die des stilistischen Vorbildes, häufiger sein als die erstere. Sind dem Konstruirenden die Festigkeitsformen recht geläufig geworden, und hat er sich frei gemacht von dem Gedanken, dass die für die Gleichhaltung der Festigkeit erforderlichen Kurven streng eingehalten werden müssten, so wird er bald dahin gelangen, stets ansprechende gefällige Linien für schwer zu belastende Konstruktionstheile zu finden, indem er die Grundform, welche der starre mathematische Ausdruck liefert, mit künstlerischer Freiheit und Selbständigkeit in das Leben überträgt.

Nachfolgend gegebene Formen gelten für Zug- wie für Druckfestigkeit. Als Beispiele technischer Nützlichkeit der beiden ersten Formen können die Holzschrauben, die eingegossenen Schraubenstifte, Säulchen etc., für die der dritten Form die erst neuerdings so gebauten steinernen Kamine mit leiser Einziehung im Schafte, sowie hohe Brücken- und Viadukt Pfeiler*) dienen.

*) Vergl. Baumeister, archit. Formenlehre, S. 226.

Form.	Gleichung.	Bemerkungen.
	$\frac{y}{d} = \sqrt{\frac{x}{l}}$ $d = \sqrt{\frac{4}{\pi} \frac{P}{\sigma}}$	<p><i>P</i> ist gleichförmig auf die ganze Länge des Stabes vertheilt. Die Querschnitte des Stabes sind kreisförmig. Profil: Parabel. Annäherungsform: Kegelstumpf mit dem Enddurchmesser $\frac{d}{2}$.</p>
	$\frac{y}{d} = \frac{x}{l}$ $d = \sqrt{\frac{4}{\pi} \frac{P}{\sigma}}$	<p><i>P</i> ist gleichförmig abnehmend von oben nach unten vertheilt. Querschnitte: kreisförmig. Körperform: Normalkegel.</p>
	$q = \frac{P}{\sigma} e^{\frac{\gamma}{\sigma} x}$ <p>$e = 2,718 \dots =$ Basis der natürlichen Logarithmen.</p> $\log. q = \log. \frac{P}{\sigma} + 0,434 \frac{\gamma}{\sigma} x.$	<p>Der Körper ist ausser durch <i>P</i> durch sein Eigengewicht belastet, welches pro Kubikeinheit = γ gesetzt ist. Die Querschnitte wachsen nach der Befestigungsstelle hin wie die Abszissen einer Logistik.</p>

§. 5.

Schub- oder Gleitungsfestigkeit.

Ein Körper wird in einem Querschnitt auf Schub- oder Gleitungsfestigkeit, die auch Abscherungs- oder Scheerfestigkeit genannt wird, beansprucht, wenn die angreifende Kraft P in der Ebene des Querschnittes wirkt.

Ist wieder q die Grösse des Querschnittes, und \mathfrak{S} die darin eintretende Spannung, so hat man wie bei Zug- und Druckfestigkeit für die Tragkraft:

$$P = \mathfrak{S}q \dots \dots \dots (3)$$

Die Elastizitätsgrenze wird erreicht, wenn $\mathfrak{S} = \frac{4}{5}$ des kleineren der beiden Tragmodul des Materials wird, also beim Schmiedeseisen, wo $T = T_1 = 15$, bei $\mathfrak{S} = 12$, für Gusseisen, wo $T < T_1$ und $= 7,5$ bei $\mathfrak{S} = 6$. Es tritt nämlich hier die Maximalspannung nicht in der Ebene des Querschnittes, sondern um 45° dagegen geneigt ein, und hat die $\frac{5}{4}$ fache Grösse von \mathfrak{S} .

Die Querverschiebung, welche die zwei Flächen des auf Gleitungsfestigkeit beanspruchten Querschnittes erleiden, ist innerhalb der Elastizitätsgrenze sehr klein, macht sich aber bemerkbar, wenn wie bei einem auf Drehungsfestigkeit beanspruchten Stabe viele querverschobene Querschnitte aufeinander folgen.

Gleichung (3) gilt auch für solche Fälle, wo die Trennung der beanspruchten Flächen bezweckt wird, also für das Abschneiden, Ausstossen, Durchlochen, d. i. das Arbeiten mit denjenigen Maschinen, welche man neuerdings häufig unter dem Namen Durchbruch-Maschinen zusammenfasst. Die Spannung \mathfrak{S} , bei welcher der Bruch erfolgt, zeigt sich etwas wenig abweichend von dem Bruchmodul für Zug (K). Die Abweichung erklärt sich daraus, dass K und K_1 beim Abscheeren gleichzeitig zur Wirkung kommen. Für die Berechnung der Durchbruch-Maschinen genügt es, etwa $1,1 K$ als Bruchkoeffizient einzuführen.

§. 6.

Biegungsfestigkeit.

Tragkraft und elastische Linie.

Ein stabförmiger Körper, an welchem solche äussere Kräfte sich das Gleichgewicht halten, welche senkrecht zur Stabachse gerichtet sind, ist auf Biegungsfestigkeit beansprucht. So lange die Beanspruchung die Elastizitätsgrenze nicht überschreitet, tritt für jeden Normalquerschnitt des Stabes Gleichgewicht ein zwischen dem Moment der äusseren Kräfte einerseits, und den Momenten

der in dem Querschnitt widerstehenden inneren Kräfte andererseits, beide bezogen auf die neutrale Achse des Querschnittes. Diese ist ein Aequator des Querschnittes, d. h. sie geht durch den Schwerpunkt desselben, und steht senkrecht auf der Biegungeebene. Sie theilt den Querschnitt in zwei Theile, von denen in dem einen alle zur Stabachse parallelen Fasern proportional ihrer Entfernung von der neutralen Achse auf Zug beansprucht sind (Zugseite des Querschnittes), während in dem anderen die Fasern auf Druck beansprucht werden (Druckseite des Querschnittes), und zwar ebenfalls proportional ihrem Abstand von der neutralen Achse. Gleichweit von der neutralen Achse entfernte Fasern auf Zug- und Druckseite erleiden dabei gleiche aber entgegengesetzt gerichtete Formänderungen. Die Biegungsfestigkeit ist sonach eine Vereinigung von Zug- und Druckfestigkeit, wobei beide in einer höheren Ordnung, nämlich mit Achsendrehung, vorkommen. Ist nun:

M das statische Moment der einen Querschnitt auf Biegunge beanspruchenden Mittelkraft, bezogen auf die neutrale Achse des Querschnittes, oder das sogenannte Kraftmoment,

J das Trägheitsmoment des Querschnittes zu seiner neutralen Achse, a der Abstand der stärkst gespannten, d. h. der von der neutralen Achse am weitesten entfernten Faser auf der Zug- oder der Druckseite des Querschnittes,

\mathfrak{E} die in dieser Faser eintretende Spannung, so ist:

$$M = \mathfrak{E} \frac{J}{a} \dots \dots \dots (4)$$

Das Produkt $\mathfrak{E} \frac{J}{a}$ ist das statische Moment sämtlicher Faser-
spannungen bezogen auf die neutrale Achse und heisse das Spannungsmoment des untersuchten Querschnittes, oder auch dessen Tragmoment für die Spannung \mathfrak{E} . Ist der gebogene Stab prismatisch, die biegende Mittelkraft P und ihr Hebelarm für irgend einen Querschnitt x , so kann zunächst $M = Px$ für jeden Querschnitt einen anderen Werth haben. Derjenige Querschnitt, für welchen Px seinen grössten Werth annimmt, heisst der gefährliche Querschnitt, und die biegende Kraft P , welche in ihm die Spannung \mathfrak{E} hervorruft, ist die Tragkraft des Stabes für die Spannung \mathfrak{E} , so dass man für die Tragkraft hat:

$$P = \frac{\mathfrak{E}J}{x_m a} \dots \dots \dots (5)$$

wobei x_m denjenigen Werth von x bezeichnet, bei welchem Px ein Maximum ist.

Die die Schwerpunkte der Stabquerschnitte verbindende Achse des Stabes erfährt bei der Biegung keine oder nur eine vernachlässigbar kleine Längenänderung; sie wird nur gebogen, und zwar gilt für ihren Krümmungshalbmesser ρ die Formel:

$$\rho = \frac{JE}{M} \dots \dots \dots (6)$$

Die Kurve, nach welcher die Krümmung stattfindet, heisst eine elastische Linie, deren Gleichung der allgemeine Ausdruck

$$\frac{d_2 y}{dx^2} = \frac{M}{JE} \dots \dots \dots (7)$$

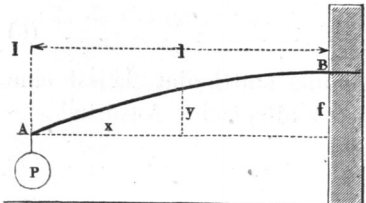
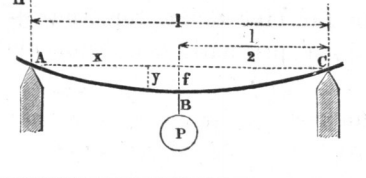
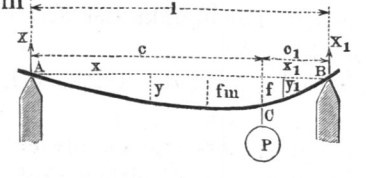
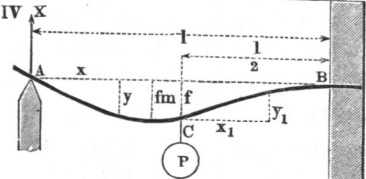
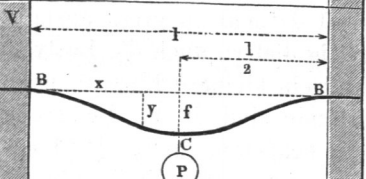
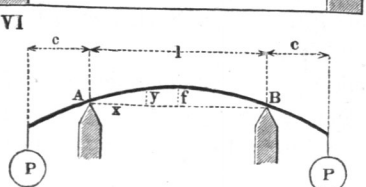
gibt.

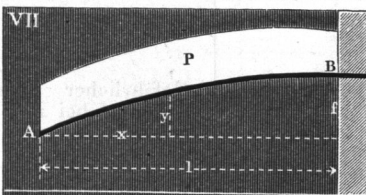
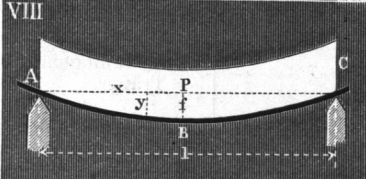
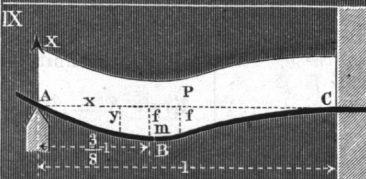
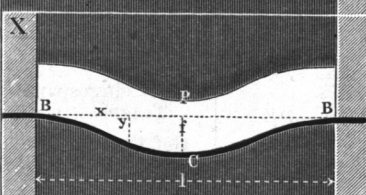
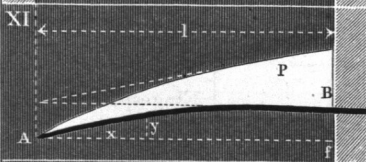
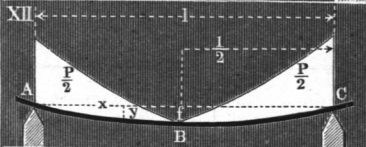
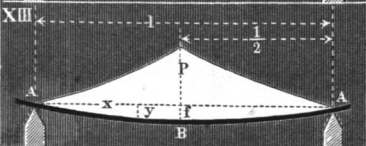
In der folgenden Tafel sind nun für eine Reihe von Angriffsarten einer biegenden Kraft auf einen prismatischen Stab die Werthe zusammengestellt für

- das Kraftmoment M für den Punkt x ,
- die Tragkraft P nach Formel (5),
- die Koordinaten x, y der elastischen Linie,
- für den Werth f der Abszisse y am Angriffspunkt der Kraft bei den Belastungsweisen Nro. I. bis VI.,
- und endlich für die stärkste Einsenkung f bei den Fällen VII. bis XIII.

Bei sämtlichen aufgeführten Fällen ist das eigene Gewicht des betrachteten Balkens vernachlässigt, was bei zahlreichen praktischen Fällen, namentlich des Maschinenbaufaches, zulässig ist, weniger beim Brückenbaufach. Die Fälle VII. bis X. können als solche benutzt werden, bei denen das Stabgewicht berücksichtigt werden soll. In den Fällen XI. und XII. ist gezeigt, wie eine passende ungleichförmige Vertheilung der Last eines Balkens dessen Tragkraft wesentlich erhöhen kann, indem bei der Belastungsweise nach XI. und XII. die Tragkraft $1\frac{1}{2}$ mal so gross ausfällt, als bei Nro. VII. und VIII. Gleichzeitig liefern auch die Lastvertheilungen in XI. und XII. noch obendrein kleinere Einsenkungen als Nro. VII. und VIII. Diese Umstände sind für die Belastung von Magazinen, Speichern u. s. w. sehr beachtenswerth. Die Lastvertheilung in Nr. XIII. ist dagegen ungünstig für die Tragkraft; sie zieht dieselbe auf das $\frac{3}{4}$ fache des Falles Nro. VIII. herab und macht auch die Einsenkung f grösser als dort.

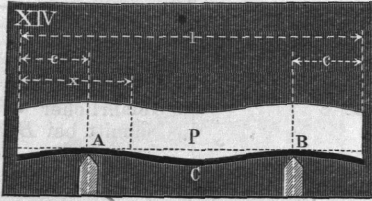
Zu beachten ist, dass die Einsenkung f durchgehends mit der dritten Potenz der Längenabmessungen wächst, und dass sie bei verschiedener Auflagerungsart des Stabes sehr stark verändert auftritt.

Angriffsweise.	Kraftmoment M .	Tragkraft.	Gleichung der elastischen Linie.	Einsenkung f .	Bemerkungen.
	$M = Px$	$P = \frac{6J}{la}$	$y = \frac{P}{JE} \frac{l^3}{2} \left[\frac{x}{l} - \frac{1}{3} \frac{x^3}{l^3} \right]$	$f = \frac{P}{JE} \frac{l^3}{3}$	Freitragender. Gefährlicher Querschnitt bei B.
	$M = \frac{Px}{2}$	$P = 4 \frac{6J}{al}$	$y = \frac{P}{JE} \frac{l^3}{16} \left[\frac{x}{l} - \frac{4}{3} \frac{x^3}{l^3} \right]$	$f = \frac{P}{JE} \frac{l^3}{48}$	Frei aufliegender Träger. Gef. Querschnitt in der Mitte.
	Für AC: $M = \frac{Pc_1x}{l}$ Für BC: $M = \frac{Pcx_1}{l}$	$P = \frac{l}{cc_1} \frac{6J}{a}$	$y = \frac{P}{JE} \frac{c^2c_1^2}{6l} \left[2\frac{x}{c} + \frac{x}{c_1} - \frac{x^3}{c^2c_1} \right]$ $y_1 = \frac{P}{JE} \frac{c_1^2c^2}{6l} \left[2\frac{x_1}{c_1} + \frac{x_1}{c} - \frac{x_1^3}{c_1^2c} \right]$	$f = \frac{P}{JE} \frac{l^3}{3} \frac{c^2}{l^2} \frac{c_1^2}{l^2}$ f_{max} bei $x = c \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \frac{c_1}{c}}$	Gef. Querschnitt bei C. Kraft $X = P \frac{c_1}{l}$ " $X_1 = P \frac{c}{l}$
	Für AC: $M = \frac{5}{16} Px$ Für BC: $M = Pl \left(\frac{5}{32} - \frac{11x_1}{16l} \right)$	$P = \frac{16}{3} \frac{6J}{la}$	$y = \frac{P}{JE} \frac{l^3}{32} \left[\frac{x}{l} - \frac{5}{3} \frac{x^3}{l^3} \right]$ $y_1 = \frac{P}{JE} \frac{l^3}{32} \left[\frac{1}{4} \frac{x_1}{l} + \frac{5}{2} \frac{x_1^2}{l^2} - \frac{11}{3} \frac{x_1^3}{l^3} \right]$	$f = \frac{P}{JE} \frac{7l^3}{768}$ $f_{max} = \sqrt{\frac{1}{5}} \frac{Pl^3}{48JE}$ bei $x = l \sqrt{\frac{1}{5}}$	Halb eingespannter Träger. Gef. Querschnitt bei B. Kraft $X = \frac{5}{16} P$.
	$M = \frac{Pl}{2} \left(\frac{x}{l} - \frac{1}{4} \right)$	$P = 8 \frac{6J}{la}$	$y = \frac{P}{JE} \frac{l^3}{16} \left[\frac{x^2}{l^2} - \frac{4}{3} \frac{x^3}{l^3} \right]$	$f = \frac{P}{JE} \frac{l^3}{192}$	Eingespannter Träger. Gef. Querschnitte bei B und C.
	Für AB: $M = Pc$	$P = \frac{6J}{ca}$	$y = f - c + \sqrt{c^2 - x^2 + l \left(x - \frac{l}{4} \right)}$ wobei $c = \frac{JE}{Pc}$	$f = \frac{P}{JE} \frac{l^3}{8} \frac{c}{l}$	Gef. Quersch. an einer beliebigen Stelle zwischen A und B.

Angriffsweise.	Kraftmoment M .	Tragkraft P .
VII 	$M = \frac{Px}{2} \frac{x}{l}$	$P = 2 \frac{6J}{la}$
VIII 	$M = \frac{Px}{2} \left(1 - \frac{x}{l}\right)$	$P = 8 \frac{6J}{la}$
IX 	$M = \frac{Px}{2} \left(\frac{3}{4} - \frac{x}{l}\right)$	$P = 8 \frac{6J}{la}$
X 	$M = \frac{Pl}{2} \left(\frac{1}{6} - \frac{x}{l} + \frac{x^2}{l^2}\right)$ <i>Handwritten notes: $M_{\min} x = 0, \frac{Pl}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{Pl}{12}$ $M_{\min} x = \frac{l}{2}$ $= \frac{Pl}{2} \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2} + \frac{l^2}{4l^2}\right) = \frac{Pl}{2} \left(\frac{2-6+3}{12}\right) = \frac{Pl}{24}$</i>	$P = 12 \frac{6J}{la}$
XI 	$M = \frac{Px}{3} \frac{x^2}{l^2}$	$P = 3 \frac{6J}{la}$
XII 	$M = Px \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{l} + \frac{2x^2}{3l^2}\right)$	$P = 12 \frac{6J}{la}$
XIII 	$M = Px \left(\frac{1}{2} - \frac{2x^2}{3l^2}\right)$	$P = 6 \frac{6J}{la}$

Gleichung der elastischen Linie.	Einsenkung f .	Bemerkungen.
$y = \frac{P l^3}{JE 6} \left[\frac{x}{l} - \frac{1}{4} \frac{x^4}{l^4}\right]$	$f = \frac{P l^3}{JE 8}$	Freitragler. Gefährlicher Querschnitt bei B.
$y = \frac{P l^3}{JE 24} \left[\frac{x}{l} - 2 \frac{x^3}{l^3} + \frac{x^4}{l^4}\right]$	$f = \frac{P 5l^3}{JE 384}$	Frei aufliegender Träger. Gef. Querschnitt in der Mitte.
$y = \frac{P l^3}{JE 48} \left[\frac{x}{l} - 3 \frac{x^3}{l^3} + 2 \frac{x^4}{l^4}\right]$	$f = \frac{P l^3}{JE 192}$	Gef. Querschnitt bei C. Stärkste Senkung bei $x = \frac{l}{16} (1 + \sqrt{33})$ Kraft $X = \frac{3}{8} P$. Wendepunkt bei $x = \frac{3}{4} l$.
$y = \frac{P l^3}{JE 24} \left[\frac{x^2}{l^2} - 2 \frac{x^3}{l^3} + \frac{x^4}{l^4}\right]$	$f = \frac{P l^3}{JE 384}$	Gef. Querschnitt bei B. Wendepunkt bei $x = \frac{l}{2} \left(1 - \sqrt{\frac{1}{3}}\right)$
$y = \frac{P l^3}{JE 12} \left[\frac{x}{l} - \frac{1}{5} \frac{x^5}{l^5}\right]$	$f = \frac{P l^3}{JE 15}$	Freitragler. Gef. Querschnitt bei B.
$y = \frac{P l^3}{JE 12} \left[\frac{3x}{8l} - \frac{x^3}{l^3} + \frac{x^4}{l^4} - \frac{2x^5}{5l^5}\right]$	$f = \frac{P 3l^3}{JE 320}$	Gef. Querschnitt in der Mitte.
$y = \frac{P l^3}{JE 12} \left[\frac{5x}{8l} - \frac{x^3}{l^3} + \frac{2x^5}{5l^5}\right]$	$f = \frac{P l^3}{JE 60}$	Gef. Querschnitt in der Mitte.

XIV. Für einen auf zwei symmetrisch angebrachte Stützen *A* und *B* gelagerten Stab mit der gleichförmig vertheilten Last *P* hat man für das Kraftmoment:



$$M = \frac{Px}{2} \left(\frac{x}{l} - 1 + \frac{c}{x} \right).$$

Die Tragkraft ändert sich je nach der Stellung der Stützen, also dem Verhältniss von *c* zu *l*; sie wird ein Maximum, wenn

$$c = 0,207l \left[\text{d. i. l} \left(\sqrt{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \right) \right]$$

gemacht wird. Die Tragkraft ist alsdann sehr nahe:

$$P = 47 \frac{\mathfrak{E}J}{la},$$

also fast 6mal so gross, als im Falle VIII, die Stützungsart mithin sehr günstig. Gefährliche Querschnitte liegen dabei an den Punkten *A*, *B* und *C*.

§. 7.

Querschnitt-Tabelle.

Der Werth $\frac{J}{a}$ in Gleichung (4) hängt bloss von Abmessungen des Stabquerschnittes ab, und wird im folgenden als Querschnittsmodul bezeichnet. Für eine Reihe von Querschnittsformen sind in der nachstehenden Tabelle zusammengestellt die Werthe für:

das (äquatoriale) Trägheitsmoment *J* zur neutralen Achse, welche den Figuren punktirt eingezeichnet ist;

die grösste Faserentfernung *a* auf Zug- und Druckseite, oder für jede Seite einzeln (*a'* und *a''*), wenn der Querschnitt nicht zweiachsig symmetrisch ist;

den (äquatorialen) Querschnittsmodul $Z = \frac{J}{a}$, für welchen sich

auch zwei Werthe ergeben, wenn *a'* von *a''* verschieden ist, und den Flächeninhalt *F* des Querschnittes, welcher bei Gewichtberechnungen dienlich ist.

Wo in der Spalte für *a* steht: „durch Versuche oder graphisch zu bestimmen“, sind die Ausdrücke zu verwickelt, um hier noch praktisch genannt werden zu können. Für diese Fälle schneidet man ein Modell des zu betrachtenden Querschnittes aus Karton aus und sucht dessen Schwerpunkt durch Abwägen auf einer Schneide oder man bedient sich der graphostatischen Methode, siehe §. 46.

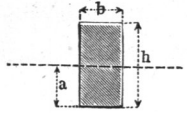
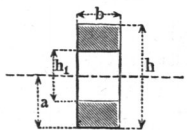
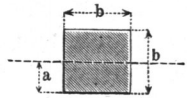

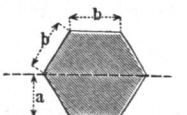
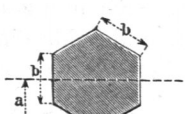
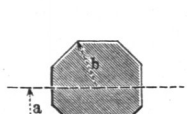
Die Benutzung der Querschnitt-Tafel wird aus folgendem Beispiel klar werden.

Beispiel. Man sucht das Trägheitsmoment eines kreisförmigen Querschnittes von 104^{mm} Durchmesser. Nach Nro. XX. der folgenden Tafel ist dasselbe: $J = \frac{\pi}{64} 104^4 \sim 5742500$. In preuss. Zollen gemessen würde $d = 4$ sein, daher für Rechnungen in preussischem Masssystem zu nehmen ist: $J = \frac{\pi}{64} 4^4 = 12,56$.

Durch passende Theilung und Verbindung der gegebenen Querschnittfiguren lassen sich dieselben in andere verwandeln, für welche dann die hier stehenden Formeln gelten. So lässt sich aus dem Querschnitt Nro. VIII. der eines rechteckigen Rohres machen, aus Nro. XI. ein E-förmiger u. s. w. Nicht unwichtig ist es ferner, einzelne allgemeine Aufschlüsse zu beachten, welche die Tafel liefern kann. Vor allem zeigen die einzelnen Werthe den starken Einfluss der Höhenabmessungen der Querschnitte, und zugleich denjenigen solcher Querschnitttheile, welche weit von der neutralen Schicht entfernt liegen. Hiermit steht im Zusammenhang die eigenthümliche Wirkung der Verstärkungsrippen, deren man sich namentlich bei gusseisernen Theilen so vielfach bedient. Diese Rippen wirken nämlich bei den auf Biegung beanspruchten Körpern nicht sowohl durch ihr eigenes Material, als dadurch, dass sie die neutralen Schichten der übrigen Theile günstig verlegen, d. h. sie weit von der Hauptmasse des Materials abrücken. Sie treten also erst mittelbar in Thätigkeit, leisten aber dabei vortreffliche Dienste, wenn der Entwerfende diesen Gesichtspunkt wohl im Auge behält. Ein Beispiel wird das Ausgesprochene deutlich machen.

Es sei ein Querschnitt von der Form Nro. XV. gegeben, und zwar mit den Verhältnissen $b = 8b_1$, $h = 12b_1$, $h_1 = 11b_1$ (siehe Fig. 1, §. 9). Diesen Schnitt denke man sich nun zerlegt in den senkrechten und den horizontalen Theil, und beide einzeln ausgeführt. Dann haben die beiden Theile die Querschnittmodel: $\frac{11^2 \cdot b_1^3}{6} = 20\frac{1}{6}b_1^3$ und $\frac{8b_1^3}{6}$, zusammen also $21,5b_1^3$. Derselbe

Querschnitt aber hat, als Ganzes aufgefasst (siehe §. 9) den Modul $Z = 34,8b_1^3$, d. i. er bietet mehr als das $1\frac{1}{2}$ fache an Festigkeit, und zwar hat die senkrechte Rippe die Festigkeit der waagerechten Platte auf etwa das 10fache des Werthes gesteigert, den sie im vereinzeltten Zustande besitzen würde. Andere Querschnittformen liefern oft noch günstigere Erhöhungen.

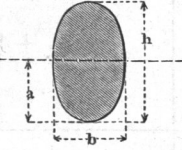
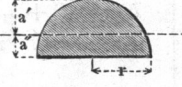
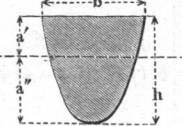
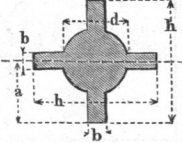
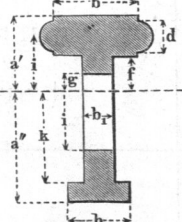
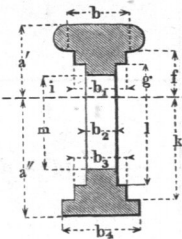
Nro.	Querschnitt.	Trägheitsmoment J .
I.		$\frac{b h^3}{12}$
II.		$\frac{b (h^3 - h_1^3)}{12}$
III.		$\frac{b^4}{12}$
IV.		$\frac{b^4}{12}$
V.		$\frac{5 \sqrt{3}}{16} b^4 = 0,5413 b^4$
VI.		$\frac{5 \sqrt{3}}{16} b^4$
VII.		$\frac{1 + 2 \sqrt{2}}{6} b^4 = 0,638 b^4$

Abstand a .	Querschnittsmodul Z .	Flächeninhalt F .
$\frac{h}{2}$	$\frac{b h^2}{6}$	$b h$
$\frac{h}{2}$	$\frac{b (h^3 - h_1^3)}{6 h}$	$b (h - h_1)$
$\frac{b}{2}$	$\frac{b^3}{6}$	b^2
$\frac{b}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{2}}{12} b^3 = 0,118 b^3$	b^2
$b \sqrt{\frac{3}{4}} = 0,866 b$	$\frac{5}{8} b^3$	$\frac{3 \sqrt{3}}{2} b^2 = 2,598 b^2$
b	$\frac{5 \sqrt{3}}{16} b^3$	$\frac{3 \sqrt{3}}{2} b^2$
$0,924 b$	$0,677 b^3$	$2,828 b^2$

Nro.	Querschnitt.	Trägheitsmoment J .	Abstand a .	Querschnittmodul Z .	Flächeninhalt F .
VIII.		$\frac{b h^3 - (b - b_1) h_1^3}{12}$	$\frac{h}{2}$	$\frac{b h^3 - (b - b_1) h_1^3}{6 h}$	$b h - (b - b_1) h_1$
IX.		$\frac{b (h^3 - h_1^3) + b_1 (h_1^3 - h_2^3)}{12}$	$\frac{h}{2}$	$\frac{b (h^3 - h_1^3) + b_1 (h_1^3 - h_2^3)}{6 h}$	$b (h - h_1) + b_1 (h_1 - h_2)$
X.		$\frac{b h^3 + b_1 h_1^3}{12}$	$\frac{h}{2}$	$\frac{b h^3 + b_1 h_1^3}{6 h}$	$b h + b_1 h_1$
XI.		$\frac{b h^3 - (b - b_2) h_1^3 + b_1 h_2^3}{12}$	$\frac{h}{2}$	$\frac{b h^3 - (b - b_2) h_1^3 + b_1 h_2^3}{6 h}$	$b h - (b - b_2) h_1 + b_1 h_2$
XII.		$\frac{b h^3 + (h_1 - b) h_1^3 + (h - h_1) b^3}{12}$	$\frac{h}{2}$	$\frac{b h^3 + (h_1 - b) h_1^3 + (h - h_1) b^3}{6 h}$	$b h + (h_1 - b) h_1 + (h - h_1) b$
XIII.		$\frac{b h^3}{36}$	$a' = \frac{h}{3}$ $a'' = \frac{2}{3} h$	$Z' = \frac{b h^2}{12}$ $Z'' = \frac{b h^2}{18}$	$\frac{b h}{2}$
XIV.		$\frac{b^2 + 4 b b_1 + b_1^2}{36 (b + b_1)} h^3$	$a' = \frac{b + 2 b_1}{b + b_1} \frac{h}{3}$ $a'' = \frac{2 b + b_1}{b + b_1} \frac{h}{3}$	$Z' = \frac{b^2 + 4 b b_1 + b_1^2}{12 (b + 2 b_1)} h^2$ $Z'' = \frac{b^2 + 4 b b_1 + b_1^2}{12 (2 b + b_1)} h^2$	$\frac{b + b_1}{2} h$

Nro.	Querschnitt.	Trägheitsmoment J .
XV.		$\frac{1}{3} [b (a'^3 - f^3) + b_1 (f^3 + a''^3)]$
XVI.		$\frac{1}{3} [b (a'^3 - f^3) + b_1 (f^3 + g^3) + b_2 (a''^3 - g^3)]$
XVII.		$\frac{1}{3} [b (a'^3 - f^3) + b_1 (f^3 + g^3 - i^3 - k^3) + b_2 (a''^3 - g^3)]$
XVIII.		$\frac{1}{3} [\frac{b_1 - b_2}{4 (f + a'')} (a''^4 - f^4) + b (a'^3 - f^3) + b_2 (f^3 + a''^3)]$
XIX.		$\frac{1}{3} [\frac{b_1 - b_2}{4 (f + g)} (g^4 - f^4) + b (a'^3 - f^3) + b_2 (f^3 + g^3) + b_3 (a''^3 - g^3)]$
XX.		$\frac{\pi}{64} d^4 = 0,0491 d^4$
XXI.		$\frac{\pi}{64} (d^4 - d_1^4) = 0,0491 (d^4 - d_1^4)$

Abstand a .	Querschnittsmodul Z .	Flächeninhalt F .
$a' = \frac{b h_2^2 + b_1 h_1 (h + h_2)}{2 [b h - (b - b_1) h_1]}$ $a'' = h - a'$	$Z' = \frac{J}{a'}$ $Z'' = \frac{J}{a''}$	$b_1 h_1 + b h_2$
Durch Versuche oder graphisch zu bestimmen.	$Z' = \frac{J}{a'}$ $Z'' = \frac{J}{a''}$	$b (a - f) + b_1 (f + g) + b_2 (a'' - g)$
Durch Versuche oder graphisch zu bestimmen.	$Z' = \frac{J}{a'}$ $Z'' = \frac{J}{a''}$	$b (a' - f) + b_1 (f + g - i - k) + b_2 (a'' - g)$
Durch Versuche oder graphisch zu bestimmen.	$Z' = \frac{J}{a'}$ $Z'' = \frac{J}{a''}$	$b (a' - f) + \frac{b_1 + b_2}{2} (f + a'')$
Durch Versuche oder graphisch zu bestimmen.	$Z' = \frac{J}{a'}$ $Z'' = \frac{J}{a''}$	$b (a' - f) + \frac{b_1 + b_2}{2} (f + g) + b_3 (a'' - g)$
$\frac{d}{2}$	$\frac{\pi}{32} d^3$	$\frac{\pi}{4} d^2$
$\frac{d}{2}$	$\frac{\pi}{32} \frac{d^4 - d_1^4}{d}$	$\frac{\pi}{4} (d^2 - d_1^2)$

Nro.	Querschnitt.	Trägheitsmoment J .	Abstand a .	Querschnittmodul Z .	Flächeninhalt F .
XXII.		$\frac{\pi}{64} b h^3$	$\frac{h}{2}$	$\frac{\pi}{32} b h^2$	$\frac{b h \pi}{4}$
XXIII.		$0,110 r^4$	$a' = 0,5755 r$ $a'' = 0,4244 r$	$Z' = 0,19 r^3$ $Z'' = 0,26 r^3$	$\frac{r^2 \pi}{2}$
XXIV.		(Parabelabschnitt.) $\frac{8}{175} b h^3 = 0,0457 b h^3$	$a' = \frac{2}{5} h$ $a'' = \frac{3}{5} h$	$Z' = \frac{4}{35} b h^2 = 0,114 b h^2$ $Z'' = \frac{8}{105} b h^2 = 0,076 b h^2$	$\frac{2}{3} b h$
XXV.		$\frac{1}{12} \left[\frac{3\pi}{16} d^4 + b (h^3 - d^3) + b^3 (h - d) \right]$	$\frac{h}{2}$	$\frac{1}{6h} (0,589 d^4 + b(h^3 - d^3) + b^3(h - d))$	$\frac{\pi}{4} d^2 + 2 b (h - d)$
XXVI.		$\frac{1}{3} \left[b (a'^3 - f^3) + b_1 (f^3 - g^3 + k^3 - l^3) + b_2 (a''^3 - k^3) \right]$ $+ \frac{\pi}{64} (d^4 + 16 d^2 i^2)$	Durch Versuche oder graphisch zu bestimmen.	$Z' = \frac{J}{a'}$ $Z'' = \frac{J}{a''}$	$b (a' - f) + b_1 (f - g + k - l)$ $+ b_2 (a'' - k) + \frac{\pi}{4} d^2$
XXVII.		$\frac{1}{3} \left[b (a'^3 - f^3) + b_1 (f^3 - g^3) + b_2 (g^3 - i^3 + l^3 - m^3) \right]$ $+ b_3 (k^3 - l^3) + b_4 (a''^3 - k^3)$ $+ \frac{\pi}{64} \left[(a' - f)^4 + 8 (a' + f) (a' - f)^2 \right]$	Durch Versuche oder graphisch zu bestimmen.	$Z' = \frac{J}{a'}$ $Z'' = \frac{J}{a''}$	$b (a - f) + b_1 (f - g)$ $+ b_2 (g - i + l - m)$ $+ b_3 (k - l) + b_4 (a - k)$ $+ \frac{\pi}{4} (a' - f)^2$

§. 8.

Werthe der Spannung \mathfrak{S} .

Die Elastizitätsgrenze wird in einem gebogenen Stab auf Zug- und Druckseite einzeln erreicht, wenn die dort eintretende Spannung $\mathfrak{S} =$ dem betreffenden Tragmodul wird. Man darf daher für \mathfrak{S} nie einen so grossen Werth einsetzen, dass auf einer der beiden Seiten der Tragmodul überschritten würde. Diese Bedingung wird bei zweiachsig symmetrischen Querschnitten erfüllt, wenn man für \mathfrak{S} den durch die Sicherheit dividirten kleineren Tragmodul setzt, bei Gusseisen also die Sicherheit stets auf den Zugtragmodul bezieht.

Bei solchen Querschnitten hingegen, wo $a' < a''$, untersuche man zunächst, welche Seite die Zugseite, und welche die Druckseite des Querschnittes ist. Ist dann

a der grösste Faserabstand auf der Zug-, a_1 der auf der Druckseite, T der Zugtragmodul, T_1 der Drucktragmodul, M das statische Moment der biegenden Kraft,

m der Sicherheitskoeffizient, so dass bei 2facher, 3facher, 4facher Sicherheit $m = 2, 3, 4$ ist,

so nehme man:

Wenn $\frac{a}{a_1} > \frac{T}{T_1}$	$M = \frac{T}{m} \frac{J}{a}$
Wenn $\frac{a}{a_1} < \frac{T}{T_1}$	$M = \frac{T_1}{m} \frac{J}{a_1}$
Wenn $\frac{a}{a_1} = \frac{T}{T_1}$	$M = \frac{T}{m} \frac{J}{a}$ oder $\frac{T_1}{m} \frac{J}{a_1}$

Beispiel. Bei Gusseisen ist $\frac{T}{T_1} = \frac{1}{2}$; ferner sei bei dem parabolischen Querschnitt Nro. XXIV. die Sehne auf der Zugseite gelegen, so ist dort $a = \frac{2}{5}h$, $a_1 = \frac{3}{5}h$, $\frac{a}{a_1} = \frac{2}{3}$. Hier ist demnach $\frac{a}{a_1} > \frac{T}{T_1}$, also für \mathfrak{S} der Werth $\frac{T}{m}$ oder $\frac{7,5}{m}$ zu setzen, und dabei $M = \frac{7,5}{m} \frac{4}{35} b h^2$ zu machen. — Bei Schmiedeeisen, wo $T = T_1$, ist die Untersuchung nicht nöthig, wie dieselbe denn überhaupt bei der leider so geringen Zahl bekannter Tragmodel einstweilen nur beim Gusseisen eine Anwendung finden kann.

§. 9.

Querschnitte von gleicher Festigkeit.

Um das Material bei Trägern mit Biegungsbelastung gut zu verwenden, ist dasselbe, unter Erhaltung einer guten Verbindung aller Querschnitttheile, möglichst entfernt von der neutralen Schicht anzubringen. Zugleich gewinnt man eine gute Materialbenutzung, wenn man die Querschnittform so wählt, dass bei einer genügend weit getriebenen Belastung die Spannungen auf Zug- und Druckseite gleichzeitig die Elastizitätsgrenze erreichen. Man hat hierfür zu machen:

$$\frac{a}{a_1} = \frac{T}{T_1}.$$

Querschnitte, bei denen dieses Verhältniss eingehalten ist, heissen Querschnitte von gleicher Festigkeit*). Bei Schmiedeeisen sind demnach die zweiachsig symmetrischen Querschnitte am zweckmässigsten, weil hier $T = T_1$. Bei Gusseisen sind unter der Voraussetzung, dass die biegende Kraft eine konstante Richtung habe, solche Querschnitte am besten, wo $a_1 = 2a$, weil hier $T_1 = 2T$. Unter Berücksichtigung dieses Verhältnisses sind die folgenden Querschnitte, bei welchen b und b_1 ein beliebiges Verhältniss zu einander haben können, gebildet (Fig. 1, 2, 3).

Fig. 1.

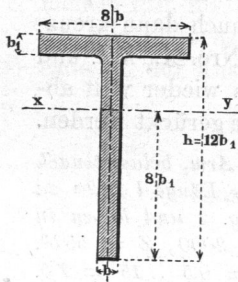


Fig. 2.

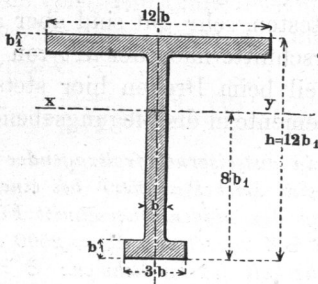
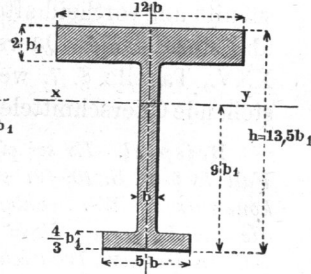


Fig. 3.



Man hat für diese Querschnitte, wenn $b_1 = b$:

$J = 278 b^4$	$440 b^4$	$992 b^4$
$Z = 34,8 b^3$	$55 b^3$	$102,4 b^3$
$F = 19 b^2$	$25 b^2$	$40,8 b^2$
$\varphi = 1$	$0,97$	$1,04$

*) Siehe hierüber auch: Klose's Theorie der eisernen Träger mit Doppelflanschen, Hannover 1862, aus welcher Schrift der zweite Querschnitt entnommen ist.

Die Zugseite ist die der neutralen Achse zunächstliegende. Als Querschnittsmodul ist der Werth $\frac{J}{a_1}$ ausgerechnet, so dass für \mathfrak{S} stets $\frac{T_1}{m}$ einzuführen ist. F bezeichnet wieder den Flächeninhalt und φ den verhältnissmässigen Materialaufwand, denjenigen von Fig. 1 gleich 1 gesetzt.

Man erhält φ allgemein aus:

$$\varphi = \frac{\beta_1}{\beta} \left(\frac{\alpha}{\alpha_1} \right)^{2/3} \left(\frac{\mathfrak{S}}{\mathfrak{S}_1} \right)^{2/3} \dots \dots \dots (8)$$

wobei sich die bezifferten Buchstaben auf den zu untersuchenden Querschnitt, die unbezifferten auf den bekannten, mit dem Materialaufwand 1 beziehen, ferner $F = \beta b^2$, $Z = \alpha b^3$, und hier $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_1$ zu setzen ist. \mathfrak{S} und \mathfrak{S}_1 fallen nur dann verschieden aus, wenn $a : a_1$ nicht bei beiden Querschnitten gleich ist. Man sieht indessen aus (8), dass kleine Abweichungen von dem genauen Verhältniss nur wenig merkbar werden.

Greift die biegende Kraft abwechselnd in entgegengesetzter Richtung an, so ist auch für Gusseisen der zweiachsig symmetrische Querschnitt am besten, und stets der kleinere Tragmodul als Grenzwert für \mathfrak{S} einzuführen. Aendert sich die Krafrichtung fortwährend so, dass sich die neutrale Achse um den Schwerpunkt des Querschnittes dreht (Tragachsen), so ist der Kreisringquerschnitt am vortheilhaftesten, sehr gut sind aber auch dann kreuz- und sternförmige Querschnitte nach der Art von Nro. X., XII. und XXV., Tabelle §. 7, weil beim Drehen hier stets wieder weit abstehende Querschnittelemente in die Biegeebene gerückt werden.

Beispiel. Es sei ein gusseiserner freitragender Arm, belastet nach Fall I., §. 6, S. 10, für eine Last $P = 2500^k$ bei einer Länge $l = 2^m$ zu konstruiren. Wir wählen den obigen Querschnitt Fig. 2 und haben in die Gleichung (4): $M = \mathfrak{S}Z$ zu setzen: $M = 2500 \cdot 2000$, $Z = 55 b^3$. Bei zweifacher Tragsicherheit ist zu nehmen: $\mathfrak{S} = 0,5 \cdot 15 = 7,5$. Diese Werthe eingeführt gibt: $2500 \cdot 2000 = 7,5 \cdot 55 b^3$, woraus

$$b = 100 \sqrt[3]{\frac{5}{55 \cdot 7,5}} = \frac{100}{\sqrt[3]{82,5}} \sim 23^{mm}. \text{ Die Querschnittsfläche beträgt}$$

dabei $25 \cdot 23^2 = 13225 \square^{mm}$. Die übrigen Querschnittsmaasse ergeben sich aus den der Fig. 2 eingeschriebenen Verhältnisszahlen. Würde statt 2facher nur 1½fache Sicherheit gefordert, so wäre $\mathfrak{S} = 15 : 1,5 = 10$ zu setzen. Der Querschnitt und damit der Materialverbrauch würde kleiner, und zwar fele er nach (8) auf $\left(\frac{1,5}{2}\right)^{2/3}$ oder 0,825 des vorberechneten Werthes.

§. 10.

Körper von gleicher Biegungsfestigkeit.

Man erhält einen Körper von gleicher Biegungsfestigkeit, wenn man in einem der Biegung ausgesetzten Stabe die Querschnitte so wählt, dass in allen die Maximalspannung \mathfrak{S} auf Zug- oder Druckseite denselben Werth erhält; demnach lässt sich gemäss Formel (4) die Gleichung für die Körperform entwickeln aus:

$$\frac{Ma}{J} = Const. \dots \dots \dots (9)$$

Die Körperformen von gleicher Biegungsfestigkeit und besonders ihre Annäherungen finden zahlreiche Anwendungen im Maschinenbau; von ihnen gilt übrigens ebenfalls das in §. 4 Gesagte in vollem Maasse. Eine Reihe derselben zeigt die folgende Tafel.

Die Biegung, welche Körper von gleicher Festigkeit in Folge der Belastung annehmen, ist nothwendig grösser, als bei prismatischen Körpern von derselben Angriffweise der biegenden Kraft. Bei mehreren Fällen der folgenden Tafel ist die Einsenkung f angegeben; sie ist z. B. bei I. doppelt, bei V. $1\frac{1}{2}$ mal so gross als bei dem gleicherweise angegriffenen prismatischen Stabe. Im allgemeinen gilt für die elastische Linie derjenigen (genau geformten) der folgenden Körper, deren Achse im unbelasteten Zustande gerade ist, der Ausdruck:

$$\frac{d_2 y}{dx^2} = \frac{M_0}{EJ_0} \frac{a_0}{a_x} \dots \dots \dots (10)$$

wenn

M_0 das Moment der biegenden Kraft für irgend einen Querschnitt, z. B. den an der Befestigungsstelle,

J_0 dessen Trägheitsmoment,

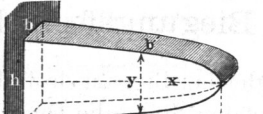
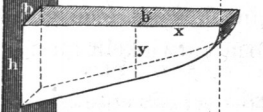
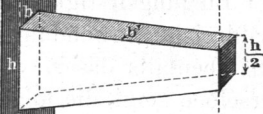
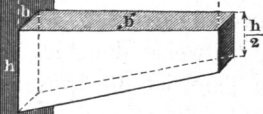
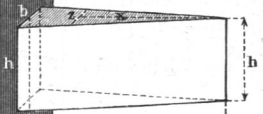
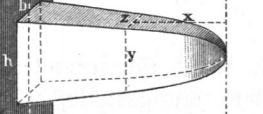
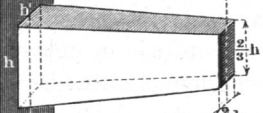
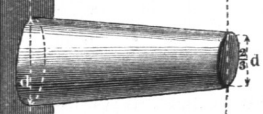
a_0 dessen grössten Faserabstand, und

a_x den grössten, auf derselben Seite wie a_0 gelegenen Faserabstand des bei x gelegenen Querschnittes bezeichnet.

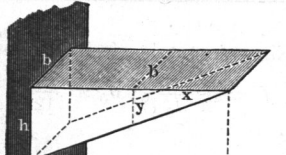
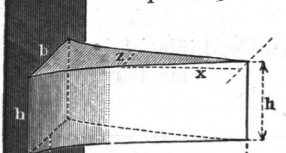
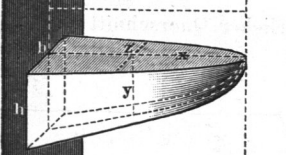
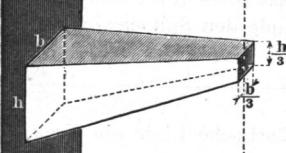
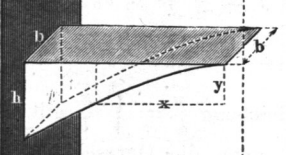
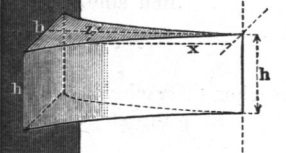
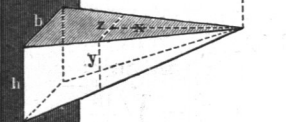
Für den Krümmungshalbmesser ϱ der elastischen Kurve an der Stelle xy ist dann:

$$\varrho = \frac{EJ_0}{M_0 a_0} a_x \dots \dots \dots (11)$$

welcher Werth konstant wird, also einem Kreisbogen angehört, wenn $a_x = a_0$, d. h. wenn alle Höhen im Stabe von gleicher Grösse sind, wie bei Fall V, X und XIV.

Nro.	Form.	Angriffsweise.	Gleichung.	Tragkraft.	Körper-Inhalt.	Bemerkungen.
I.			Für den Rechteckquerschnitt ist: $\frac{zy^2}{bh^2} = \frac{x}{l},$ Fall I. und II., $z = b,$	$P = \frac{\epsilon bh^2}{6l}$	$\frac{2}{3} bhl$	Einsenkung des freien Endes: $f = \frac{2}{3} \frac{Pl^3}{J_0 E}; J_0 = \frac{bh^3}{12}.$
II.			$\frac{y}{h} = \sqrt{\frac{x}{l}}.$ Parabolisch abgestumpfter Keil.	$P = \frac{\epsilon bh^2}{6l}$	$\frac{2}{3} bhl$	Die elastische Linie ist im Normalzustande eine Parabel.
III.			Annäherung an Form I. Abgestumpfter Keil.	$P = \frac{\epsilon bh^2}{6l}$	$\frac{3}{4} bhl$	Gefährlicher Querschnitt an der Befestigungsstelle.
IV.			Annäherung an Form II. Abgestumpfter Keil.	$P = \frac{\epsilon bh^2}{6l}$	$\frac{3}{4} bhl$	Die elastische Linie halbirt im Normalzustande den Spitzenwinkel des Keiles.
V.			$y = h; \frac{z}{b} = \frac{x}{l}.$ Normalkeil.	$P = \frac{\epsilon bh^2}{6l}$	$\frac{1}{2} bhl$	Elastische Linie ein Kreisbogen. $f = \frac{1}{2} \frac{Pl^3}{J_0 E}; J_0 = \frac{bh^3}{12}.$
VI.			$\frac{z}{y} = \frac{b}{h}; \frac{y}{h} = \sqrt[3]{\frac{x}{l}}.$ Kubisch-parabolisch abgestumpfte Pyramide.	$P = \frac{\epsilon bh^2}{6l}$	$\frac{3}{5} bhl$	Die Gleichung $\frac{y}{h} = \sqrt[3]{\frac{x}{l}}$ gilt hier überhaupt, wenn die Querschnitte alle ähnlich sind.
VII.			Annäherung an Form VI. Abgestumpfte Pyramide.	$P = \frac{\epsilon bh^2}{6l}$	$\frac{19}{27} bhl$	Gefährlicher Querschnitt an der Befestigungsstelle.
VIII.			Normalkegel-Stumpf. Annäherung an die strenge Form von der Gleichung $\frac{y}{h} = \sqrt[3]{\frac{x}{l}}.$	$P = \frac{\epsilon \pi d^3}{32 l}$	$\frac{19}{108} \pi l d^2$	Für gleiche Tragkraft mit Fall I. bis VII. hat man: $\frac{d}{h} = \sqrt[3]{\frac{16}{3\pi} \frac{b}{h}}.$

Die Last P greift am freien Ende an, Fall I., Tabelle S. 6.

Nro.	Form.	Angriffsweise.	Gleichung.	Tragkraft.	Körper-Inhalt.	Bemerkungen.			
IX.		Last P gleichförmig vertheilt. Fall VII., Tabelle S. 6.	Beim Rechteckquerschn. allgemein: $\frac{z y^2}{b h^2} = \frac{x^2}{l^2};$ $z = b; \frac{y}{h} = \frac{x}{l} \text{ Keil.}$	$P = \frac{\sigma b h^2}{3l}$	$\frac{1}{2} b h l$	Unter Abstumpfung der Endschärfe gut verwendbar.			
X.			Last P gleichförmig vertheilt. Fall VII., Tabelle S. 6.	$y = h; \frac{x}{l} = \sqrt{\frac{z}{b}}.$ Parabolisch zugeshärfter Keil.	$P = \frac{\sigma b h^2}{3l}$	$\frac{1}{3} b h l$	Elastische Linie ein Kreisbogen. $f = \frac{1}{4} \frac{P l^3}{J_0 E}; J_0 = \frac{b h^3}{12}.$		
XI.				Last P gleichförmig vertheilt. Fall VII., Tabelle S. 6.	$\frac{z}{y} = \frac{b}{h}; \frac{y}{h} = \sqrt[3]{\frac{x^2}{l^2}}.$ Pyramide abgestumpft nach semi-kubischen od. Neil'schen Parabeln.	$P = \frac{\sigma b h^2}{3l}$	$\frac{3}{7} b h l$	Zeigt eine gute Grundform für architektonische Tragsteine.	
XII.					Last P gleichförmig vertheilt. Fall VII., Tabelle S. 6.	Annäherung an Form XI. Abgestumpfte Pyramide.	$P = \frac{\sigma b h^2}{3l}$	$\frac{13}{27} b h l$	Gefährlicher Querschnitt an der Befestigungsstelle.
XIII.						Last P gleichförmig abnehmend vertheilt. Fall XI., Tabelle S. 6.	Beim Rechteckquerschn. allgemein: $\frac{z y^2}{b h^2} = \frac{x^3}{l^3};$ $z = b; \frac{x}{l} = \sqrt[3]{\frac{y^2}{h^2}}.$ Keil, zugeshärft nach der semi-kubischen Parabel.	$P = \frac{\sigma b h^2}{2l}$	$\frac{2}{5} b h l$
XIV.		Last P gleichförmig abnehmend vertheilt. Fall XI., Tabelle S. 6.					$y = h; \frac{x}{l} = \sqrt[3]{\frac{z}{b}}.$ Nach kubischen Parabeln zugeshärfter Keil.	$P = \frac{\sigma b h^2}{2l}$	$\frac{1}{4} b h l$
XV.			Last P gleichförmig abnehmend vertheilt. Fall XI., Tabelle S. 6.				$\frac{z}{y} = \frac{b}{h}; \frac{y}{h} = \frac{x}{l}.$ Pyramide.	$P = \frac{\sigma b h^2}{2l}$	$\frac{1}{3} b h l$

Mit den vorstehend gegebenen Formen sind nur die allereinfachsten der sich hier darbietenden Fälle erschöpft; leicht würden dieselben auf eine grosse Anzahl zu vermehren sein. (Übungsaufgaben.) Hierfür brauchte man z. B. nur die Veränderlichkeit der Breiten- oder Höhenabmessungen etwas verwickelter einzuführen, als es geschah. So ergibt sich z. B., wenn man bei I. den Grundriss parabolisch gestaltet, d. i. $\frac{z}{b} = \sqrt{\frac{x}{l}}$ macht, $\frac{y}{h} = \sqrt[4]{\frac{x}{l}}$ (biquadratische Parabel) u. s. w. Zusammengesetztere Querschnitte liefern ebenfalls neue Körpergebilde, deren mannigfaltige Abänderungen einen reichen Wechsel von Formen darzubieten vermögen. Beispiele hierzu finden sich u. a. bei den Tragachsen, Kapitel VII. Siehe übrigens auch weiter unten bei den Biegungsfedern, wo besondere Formen dadurch entstehen, dass die neutrale Schicht ursprünglich nicht eben ist.

§. 11.

Scheerfestigkeit in der neutralen Schicht.

Da in einem gebogenen Stabe auf der Zugseite lauter Zugkräfte, auf der Druckseite lauter Druckkräfte zwischen den Fasermolekülen wirken, erfährt die neutrale Schicht eine Beanspruchung auf Scheerfestigkeit, und darf deshalb nicht unter einer gewissen Breitenabmessung ausgeführt werden*). Die zu vermeidende untere Grenze liegt zwar in der Regel sehr tief; doch verdient sie immerhin gekannt zu sein. Heisst die kleinste zulässige Breite z_0 , und die Mittelkraft der auf einer oder der anderen Seite eines Querschnittes angreifenden äusseren Kräfte R , so muss sein, wenn die Schubspannung an der neutralen Schicht den Werth \mathfrak{S}_0 nicht überschreiten soll:

$$z_0 \geq \frac{R}{\mathfrak{S}_0} \frac{U}{2J} \quad \dots \quad (14)$$

Hierbei darf \mathfrak{S}_0 nicht über $\frac{4}{5}$ des kleineren der beiden Tragmodel des Materiales betragen (vergl. §. 5). Zugleich bedeutet J wie bisher das Trägheitsmoment des Querschnittes, d. i. die Summation der Produkte aller der neutralen Schicht parallelen Flächenelemente mit den Quadraten ihrer Abstände von der neutralen Schicht, U aber das statische Moment des Querschnittes, d. i. die

*) Siehe Zeitschr. des Ver. deutsch. Ing. 1859, S. 193; auch Grashof's Festigkeitslehre (Berlin, Gärtner), S. 147.

Summation der Produkte aller jener Flächenelemente mit den genannten Abständen selbst.

Für den Rechteckquerschnitt Nr. I., Tabelle S. 16 ist

$$U = \frac{bh^2}{4},$$

für den Doppel-*T*-Querschnitt Nr. VIII., Tabelle S. 18,

$$U = \frac{bh^2 - (b - b_1)h_1^2}{4}.$$

R ist in jedem einzelnen Falle besonders zu ermitteln, bei der Angriffweise Nr. II., S. 10, ist z. B. *R* für alle Querschnitte zwischen

B und *C* gleich der Stützkraft $\frac{P}{2}$ u. s. f.

Die Gleichung (14) dient nicht sowohl zur Ermittlung von z_0 selbst, als zur Untersuchung, ob die Breite der neutralen Schicht nicht etwa zu klein gewählt worden sei. In der That kommt dies aber bei den gewöhnlichen Trägerkonstruktionen, namentlich bei den im Maschinenbau benutzten, selten vor. Setzt man, um hierüber Aufschluss zu erhalten, $z_0 =$ dem in (14) angegebenen Werthe und macht auch $\mathfrak{S}_0 = \frac{4}{5} \mathfrak{S}$, so folgt aus (14):

$$\mathfrak{S} = \frac{5}{4} \frac{R}{z_0} \frac{U}{2J}.$$

Dies in die auf denselben Querschnitt bezogene Gleichung (4) einsetzend, erhält man:

$$\frac{M}{R} = \frac{5}{8} \frac{U}{z_0 a} \dots \dots \dots (15)$$

$\frac{M}{R}$ ist der Hebelarm der Kraft *R*; derselbe möge mit *A* bezeichnet werden. *U*: $z_0 a$ ergibt eine der Höhenabmessungen des Querschnittes; demnach liefert (15) eine Gleichung zwischen zwei Abmessungen des in Betracht gezogenen Trägers. Für den einfachen Rechteckquerschnitt erhält man durch Einsetzung des obigen Werthes von *U*, indem z_0 hier = *b* und $a = \frac{h}{2}$ ist: $\frac{h}{A} = \frac{16}{5}$.

Grösser darf also *h* nicht gewählt werden, wenn nicht die Beanspruchung auf Schub über die auf Dehnung oder Kürzung (auf Zug- und Druckseite) hinausgehen soll. Diese Betrachtung hat offenbar hauptsächlich Werth für den gefährlichen Querschnitt, also z. B. bei der Angriffweise II., S. 10, für den Punkt *B*. Für diesen ist aber $A = \frac{l}{2}$, also zu wählen: $\frac{h}{l} \cong \frac{8}{5}$. Dieses Höhenverhältniss ist aber so gross, dass es für die gewöhnlichen Fälle

schon von selbst vermieden wird. Mehr beachtenswerth wird das Resultat für die Konstruktion verzahnter Balken aus Holz, welche bei manchen Bauwerken Anwendung finden. Bei diesen wird die Widerstandsfähigkeit der neutralen Schicht durch das Verzahnen oftmals stark herabgezogen, mitunter z. B. bis auf die Hälfte derjenigen des vollen Balkens, was eine entsprechende Verminderung des Grenzverhältnisses $\frac{h}{l}$ erfordert.

Für den Doppel-T-Querschnitt kommt:

$$\frac{h}{A} = \frac{16}{5 \left[\frac{b}{b_1} - \left(\frac{b}{b_1} - 1 \right) \left(\frac{h_1}{h} \right)^2 \right]}$$

Die Klammer im Nenner enthält einen unächtigen Bruch, rückt also die obere Grenze von $\frac{h}{A}$ etwas herab, doch bleibt gewöhnlich der zu vermeidende Werth von $\frac{h}{A}$ noch sehr hoch.

Beanspruchungen, welche der vorbehandelten verwandt sind, finden bei T-Trägern an dem Ansatz der Flantschen an die Mittelrippe statt; auch sie sind nur selten zu berücksichtigen. Man sehe übrigens die oben angezogenen Quellen.

§. 12.

Träger mit gemeinsamer Belastung.

Wenn zwei prismatische Träger mit ihren Mitten aufeinander liegen und an diesem Punkte gemeinsam durch eine Kraft P belastet sind, während sie an den Enden aufliegen, so werden sie um gleichviel gebogen, wobei die Summe ihrer Gegenwirkungen P' und P'' mit P ins Gleichgewicht tritt. Die beiden Gegenwirkungen verhalten sich aber nach der Formel Zeile II., Spalte 2, Seite 10 wie folgt:

$$\frac{P'}{P''} = \frac{J' E' l'^3}{J'' E'' l''^3},$$

woraus, da:

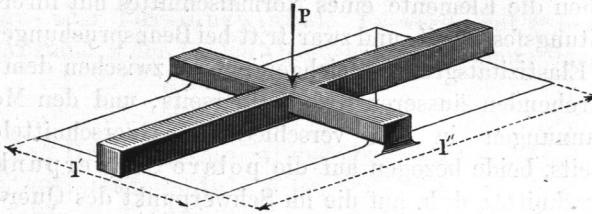
$$P' = 4 \frac{\mathfrak{E}' J'}{\alpha' l'} \quad \text{und} \quad P'' = 4 \frac{\mathfrak{E}'' J''}{\alpha'' l''},$$

folgt:

$$\frac{\mathfrak{E}'}{\mathfrak{E}''} = \frac{E'}{E''} \frac{\alpha'}{\alpha''} \left(\frac{l''}{l'} \right)^2 \cdot \dots \dots \dots (16)$$

Die beiden Träger wirken also bei gleichem Material ($E' = E''$) nur dann unter gleicher Sicherheit, wenn das Produkt $\frac{a'}{a''} \cdot \left(\frac{l''}{l'}\right)^2 = 1$ ist. Sind die Träger noch gleichlang, so muss $a' = a''$, d. h. es müssen die Höhen gleich sein, ohne dass übrigens die Breiten gleich zu sein nöthig haben.

Fig. 4.



Beispiel. Ein gusseiserner Träger, der wie ein symmetrisches Kreuz gestaltet ist, Fig. 4, soll in dem Kreuzungspunkte die Last P tragen; die beiden Längen verhalten sich wie 3:2. Dann ist für gleiche Sicherheit der vier Arme, wenn dieselben prismatisch sind, nach (16) zu machen:

$$\frac{a'}{a''} = \left(\frac{l''}{l'}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9};$$

d. h. die Querschnittshöhe des kurzen Armes muss sich zu der des langen verhalten wie 4:9; bei Anwendung gleicher Querschnitte in beiden Armen würde sich die Beanspruchung des kurzen Armes zu der des langen nach (16) verhalten wie 9:4.

Aus der vorstehenden Betrachtung folgt ferner, dass rechteckige Blechplatten von gleichförmig vertheilter, oder auch von konzentrirter Belastung und ringsumlaufender Unterstüzung, parallel der kürzeren Achse weit stärker beansprucht werden, als parallel der längeren. Haben gemeinsam belastete Träger auch noch verschiedenes Material, so hängt ihre günstige Wirkung, wie Formel (16) lehrt, sehr von der Wahl der Dimensionen, und zwar der Höhen- und Längenabmessungen ab. Aufeinander gelegte guss- und schmiedeiserne Balken bieten danach nur bei besonders angepasster Proportionirung die Summe ihrer einzelnen Tragkräfte als gemeinsame Tragkraft dar. Beim Verstärken bestehender Konstruktionen ist hierauf zu achten.

§. 13.

Drehungsfestigkeit.

Tragkraft und Verdrehungswinkel.

Ein stabförmiger Körper, den entgegengesetzt gerichtete Kräftepaare um seine geometrische Achse zu drehen suchen, wird auf Drehungsfestigkeit in Anspruch genommen. Hierbei widerstehen die Elemente eines Normalschnittes mit ihrer Schub- oder Gleitungsfestigkeit, und zwar tritt bei Beanspruchungen innerhalb der Elastizitätsgrenze Gleichgewicht ein zwischen dem Moment der verdrehenden äusseren Kräfte einerseits, und den Momenten der Spannungen in den verschiedenen Querschnittelementen andererseits, beide bezogen auf die polare Schwerpunktsachse des Querschnittes, d. h. auf die im Schwerpunkt des Querschnittes senkrecht auf ihm stehende Achse. Die Drehungsfestigkeit ist somit eine höhere Gattung der Schubfestigkeit, zu welcher sie in ähnlichem Verhältniss steht, wie die Biegefestigkeit zur Zug- und Druckfestigkeit.

Nennt man nun:

M das statische Moment der auf einen Stabquerschnitt wirkenden verdrehenden Kräfte oder das Kraftmoment,

J_p das polare Trägheitsmoment des Querschnittes, d. h. dessen Trägheitsmoment zu seiner polaren Schwerpunktsachse*),

a den Abstand des entferntesten Elementes des Querschnittes von dessen Schwerpunkt,

\mathfrak{S} die in diesem Element eintretende Schubspannung,

so ist

$$M = \frac{\mathfrak{S} J_p}{a} \dots \dots \dots (17)$$

Wenn der Stab lauter gleiche Querschnitte besitzt, so ist $\frac{J_p}{a}$ konstant. Führt man dann das Moment M auf einen Arm A , an welchem die verdrehende Kraft P angreift, zurück, so ist der gefährliche Querschnitt derjenige, für welchen M seinen Maximalwerth annimmt, und demnach die Tragkraft des Stabes:

$$P = \frac{\mathfrak{S} J_p}{A_m a} \dots \dots \dots (18)$$

*) Eine bei einzelnen Querschnittformen anzubringende Korrektur vorbehalten, vergl. §. 14.

wenn A_m den dem Maximum von M entsprechenden Werth von A bezeichnet.

Die Elastizitätsgrenze wird wie bei der Schubfestigkeit erreicht, wenn $\mathfrak{E} = \frac{4}{5}$ des kleineren der beiden Tragmodel des Materials, aus welchem der Stab besteht. (Vergl. §. 5.) Dieser Umstand ist bei Vergleichung von Biegungs- und Verdrehungsbeanspruchung im Auge zu behalten.

Die Verdrehung, welche zwei von einander abstehende Querschnitte des Stabes gegeneinander annehmen, heisst der Verdrehungs- oder Torsionswinkel. Er werde mit ϑ bezeichnet; für den Abstand x der beiden Querschnitte hat man allgemein:

$$\frac{d\vartheta}{dx} = \frac{M}{J_p G} \cdot \dots \dots \dots (19)$$

wobei G den Drehungsmodul des Materials bezeichnet, welcher $\frac{2}{5}$ des Elastizitätsmoduls E ist.

Die folgende Tafel enthält nun für eine Reihe von Angriffsarten der verdrehenden Kräfte an einem prismatischen Stab die Werthe für:

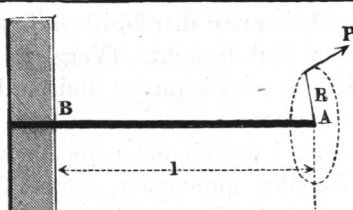
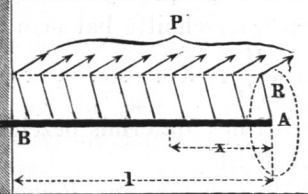
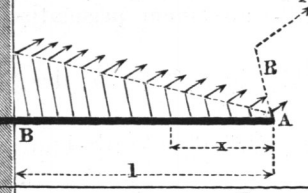
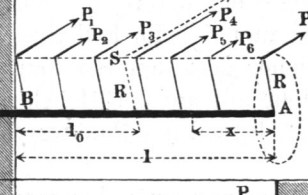
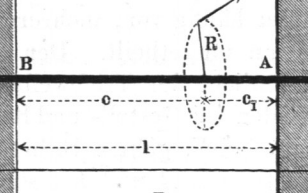
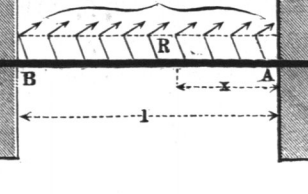
das Moment M an einer beliebigen Stelle (x) des Stabes,

die Tragkraft P nach Formel (18),

und den in Bogenmaass ausgedrückten Verdrehungswinkel ϑ des Stabes,

wobei mit PR das Gesamtmoment der verdrehenden Kräfte bezeichnet ist. Ausserdem bedeutet S beim Fall Nro. IV. den Angriffschwerpunkt sämmtlicher dort den Stab auf Verdrehung beanspruchenden Kräfte, welche alle auf den Hebelarm R zurückgeführt sind; l_0 ist dabei der Abstand des Punktes S von der Befestigungsebene des Stabes.

Die vorgeführten Beanspruchungsarten kommen in den Maschinen alle mehr oder weniger häufig vor, mehrere andere sind unten bei den Torsionsfedern mitgetheilt. Der Fall IV. der folgenden Tabelle ist der gewöhnliche der Triebwellen in den Fabriken. Die Fälle V. und VI. finden bei Gestell- und Rahmenbauten Anwendung. Aus den Formeln bei V. geht z. B. hervor, dass an einem Lokomotivrahmen, der etwa bei A und B festgehalten, und zwischen beiden Stellen den sogenannten Geradführungsbügel aufzunehmen hätte, der letztere die geringste Beanspruchung des Rahmens auf Torsion hervorbringt, wenn er mitten zwischen A und B gestellt wird.

Nro.	Angriffsweise.	Kraftmoment M .
I.		$M = PR$ für alle Punkte zwischen A und B .
II.		$M = PR \frac{x}{l}$.
III.		$M = PR \frac{x^2}{l^2}$. PR = dem Gesamtmoment der verdrehenden Kräfte.
IV.		M = Summe der innerhalb der Länge x angreifenden Momente.
V.		Im Stück c : $M = PR \frac{c_1}{l}$. Im Stück c_1 : $M = PR \frac{c}{l}$.
VI.		$M = PR \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{l} \right)$.

Tragkraft P .	Verdrehungswinkel ϑ .	Bemerkungen.
$P = \frac{\varrho J_p}{aR}$	$\vartheta = \frac{PR.l}{J_p G}$ $= \frac{\varrho l}{G a}$	Alle Querschnitte zwischen A und B sind gleich fest.
$P = \frac{\varrho J_p}{aR}$	$\vartheta = \frac{1}{2} \frac{PR.l}{J_p G}$ $= \frac{1}{2} \frac{\varrho l}{G a}$	Gefährlicher Querschnitt bei B .
$P = \frac{\varrho J_p}{aR}$	$\vartheta = \frac{1}{3} \frac{PR.l}{J_p G}$ $= \frac{1}{3} \frac{\varrho l}{G a}$	Die drehenden Kräfte sind gleichförmig abnehmend von B nach A vertheilt. Gefährlicher Querschnitt bei B .
$P = \frac{\varrho J_p}{aR}$	$\vartheta = \frac{PR.l_0}{J_p G}$ $= \frac{\varrho l_0}{G a}$	Allgemeine Form für die Fälle I., II. und III. Gefährlicher Querschnitt bei B . Der Werth von ϑ in III. wird aus dem in IV. erhalten, wenn man für l_0 den dort sich ergebenden Werth $\frac{l}{3}$ einsetzt u. s. w.
Wenn $c_1 < c$, so ist: $P = \frac{\varrho J_p l}{aR c}$	$\vartheta = \frac{PR}{J_p G} \frac{c c_1}{l}$ $= \frac{\varrho c_1}{G a}$	Gefährlicher Querschnitt im Stücke c_1 als dem kürzeren Stücke.
$P = 2 \frac{\varrho J_p}{aR}$	$\vartheta = \frac{1}{8} \frac{PR.l}{J_p G}$ $= \frac{1}{4} \frac{\varrho l}{G a}$	Gefährliche Querschnitte bei A und B .

§. 14.

Polare Trägheitsmomente und Querschnittsmodell.

Das polare Trägheitsmoment J_p eines Querschnittes bestimmt sich leicht, indem man hat:

$$J_p = J_1 + J_2 \dots \dots \dots (20)$$

wenn J_1 und J_2 äquatoriale Trägheitsmomente desselben Querschnittes zu zwei seiner, einander rechtwinklig schneidenden Schwerlinien bezeichnen, deren Werthe für eine Menge von Querschnitten aus Tabelle §. 7 bekannt sind. Man kann demnach den polaren

Querschnittsmodul $\frac{J_p}{a} = Z_p$ leicht für die in der Praxis vor-

kommenden Fälle bestimmen. Eine Ausnahme machen indessen diejenigen Querschnitte, bei denen nicht $J_1 = J_2$, was z. B. bei Nro. III., VII., XII., XX., XXV. etc. §. 7 der Fall ist. Bei ihnen

bedürfen die Ausdrücke J_p und $\frac{J_p}{a} = Z_p$ einer besonderen, durch

weitläufige Rechnungen zu ermittelnden Korrektion, da bei denselben das Windschiefwerden der Querschnitte in Folge der Verdrehung einen stark bemerklichen Einfluss ausübt. Für das Rechteck, den für die Maschinenpraxis wichtigsten jener Querschnitte, sind in der folgenden kleinen Tabelle die korrigirten

Werthe von J_p und $Z_p = \frac{J_p}{a}$ aufgeführt, während für Kreis und

Quadrat die einer Korrektion nicht bedürftigen, aus (20) erhaltenen Werthe gegeben sind.

Beispiel. Ein cylindrischer schmiedeiserner Stab sei nach der An-
griffweise Nro. I. des vorigen Paragraphen von einer Kraft $P = 450k$ an
einem Hebelarm $R = 600mm$ ergriffen, und habe einen Durchmesser $d =$
 $100mm$ bei einer Länge $l = 1200mm$. Dann ist die Spannung \mathcal{E} an seinem

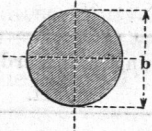
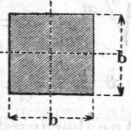
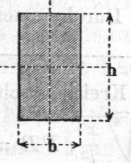
Umfang: $\mathcal{E} = \frac{a}{J_p} PR = \frac{16}{\pi} \frac{270000}{100^3} = 1,38$, und der entstehende Ver-

drehungswinkel: $\vartheta = \frac{1,38 \cdot 1200}{8000 \cdot 50} = 0,00414$, was einem Winkel von $0^\circ 14'$

entspricht. Soll nun d verkleinert werden, so dass $\mathcal{E} =$ dem halben Trag-
modul für Verdrehung, d. i. $= \frac{1}{2} \frac{4}{5} \cdot 15 = 6$ wird, so ist zu nehmen:

$d = \sqrt[3]{\frac{16}{\pi \mathcal{E}} PR} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 270000}{\pi \cdot 6}} = 61,2$, wofür wir setzen $d = 61mm$.

Dann wird der Verdrehungswinkel: $\vartheta = \frac{6 \cdot 1200}{8000 \cdot 30,5} = 0,0294$, in Graden
 $1^\circ 40'$.

Nro.	Querschnitt.	Polares Trägheitsmoment J_p .	Polarer Querschnittmodul $Z_p = \frac{J_p}{a}$.
I.		$\frac{\pi}{32} d^4$	$\frac{\pi}{16} d^3.$
II.		$\frac{b^4}{6}$	$\frac{b^3}{3\sqrt{2}}$
III.		$\frac{1}{3} \frac{b^3 h^3}{b^2 + h^2}$	$\frac{b^2 h^2}{3\sqrt{b^2 + h^2}}$ Annähernd: $\frac{b^2 h^2}{3(0,4b + 0,96h)}$

§. 15.

Körper von gleicher Drehungsfestigkeit.

Um einen Körper von gleicher Drehungsfestigkeit zu erhalten, hat man dessen Querschnittsverhältnisse aus (17) zu entwickeln, indem man \mathfrak{S} konstant annimmt, also setzt:

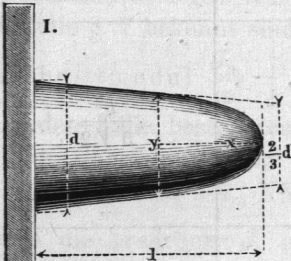
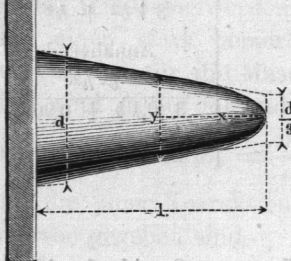
$$\frac{M a}{J_p} = Const. \dots \dots \dots (21)$$

Für den Fall I. in Tabelle §. 13 ist für alle Querschnitte $M = PR$, demnach sind diese dort nur alle gleich, d. h. der Körper prismatisch zu machen, um ihm überall dieselbe Festigkeit zu geben. Die Fälle II. und III. geben die in der nachfolgenden kleinen Tabelle zusammengestellten Formen. Der Verdrehungswinkel muss bei den Körpern von gleicher Festigkeit grösser ausfallen,

als bei den prismatischen Stäben; er ist bei den beiden unten gegebenen Körpern mitgetheilt. Man erhält ihn aus der Formel:

$$\frac{d\vartheta}{dx} = \frac{M}{J_x G} \dots \dots \dots (22)$$

wobei J_x das polare Trägheitsmoment des Querschnittes am Punkte (x) bedeutet.

Form.	Angriffsweise.	Gleichung und Verdrehungswinkel.
<p>I.</p> 	<p>Fall Nro. II. §. 13.</p>	<p>Kreisquerschnitt: $\frac{y}{d} = \sqrt[3]{\frac{x}{l}}$; $PR = \odot \frac{\pi}{16} d^3$; $\vartheta = 3 \odot \frac{l}{G} \frac{1}{d}$. Annäherungsform: Kegelstumpf mit dem oberen Durchmesser $\frac{2}{3} d$.</p>
<p>II.</p> 	<p>Fall Nro. III. §. 13.</p>	<p>Kreisquerschnitt: $\frac{y}{d} = \sqrt[3]{\frac{x^2}{l^2}}$; $PR = \odot \frac{\pi}{16} d^3$; $\vartheta = 6 \odot \frac{l}{G} \frac{1}{d}$. Annäherungsform: Kegelstumpf mit dem oberen Durchmesser $\frac{d}{3}$.</p>

Ueber andere Körper von gleicher Drehungsfestigkeit siehe §. 20 bei den Torsionsfedern.

§. 16.

**Rückwirkende, Zerknickungs- oder Streb-
festigkeit.**

Ein prismatischer Stab wird auf rückwirkende, Zerknickungs- oder Strebefestigkeit, wie man sie auch nennen kann, beansprucht, wenn er in der Richtung seiner Längsachse zusammengedrückt wird, und gleichzeitig seine Querschnittabmes-

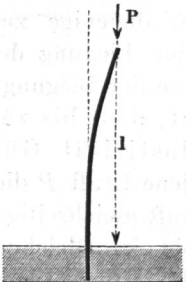
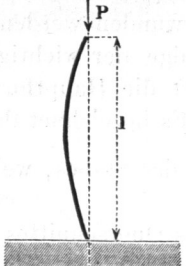
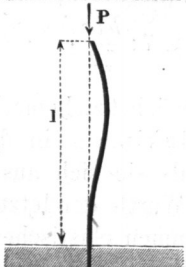
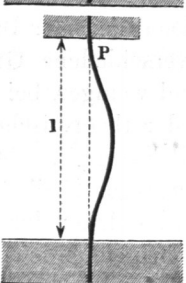
sungen nicht gross im Verhältniss zu seiner Länge sind. Bei dieser Beanspruchung kommen Druck- und Biegungsfestigkeit gleichzeitig in Betracht, und zwar letztere in der Eigenthümlichkeit, dass nicht die Abszisse der elastischen Linie der Hebelarm der biegenden Kraft ist, wie bei der Biegungsfestigkeit, sondern die Ordinate dieser Kurve. Daher rührt es, dass (bei Vernachlässigung gewisser sehr kleiner Rechnungswerthe) diejenige zusammendrückende Kraft P , welche überhaupt eine Biegung des Stabes hervorbringen kann, dieses bei jeder Grösse der Biegung vermag, also auch bis zum Bruch, vorausgesetzt, dass bis zu diesem die Gesetze der vollkommenen Elastizität Gültigkeit hätten. Dies aber angenommen, würde jene Kraft P die theoretische Tragkraft und theoretische Bruchkraft gleichzeitig sein, da ihr die Elastizitätskräfte des Stabes sowohl das Gleichgewicht zu halten vermögen, als diese Kräfte auch bei einmal eingetretener Bewegung des Lastpunktes durch P überwunden werden können.

In der folgenden Tabelle sind für einige der wichtigsten Angriffsarten der zusammendrückenden Kraft die Hauptformeln für die rückwirkende Festigkeit angegeben. Es bezeichnet dabei:

E den Elastizitätsmodul des Materials des Stabes, welcher als prismatisch angesehen ist;

J das kleinste Trägheitsmoment seines Querschnittes, bezogen auf eine Schwerlinie, also z. B. beim Rechteck, von der kleineren Seite b , der grösseren h , nach §. 7: $\frac{hb^3}{12}$.

Zu den nachstehenden Angaben ist zunächst zu bemerken, dass die sehr schätzbaren Versuche von Hodgkinson in der Regel eine etwas kleinere Bruchkraft liefern, als sie sich aus den obigen Formeln ergibt; dies thut aber dem Werth der letzteren keinen Eintrag, da diese nur für den vollkommen elastischen Körper aufgestellt sind, und deshalb richtig bleiben, wenn man als Belastung einen genügend kleinen Proportionaltheil der Bruchkraft P anwendet. Verschiedene empfehlen verschiedene Grade von Sicherheit. Bei Gusseisen soll $\frac{1}{4}$ bis $\frac{1}{6}$ und weniger, bei Schmiedeeisen ebenso, bei Holz $\frac{1}{5}$ bis $\frac{1}{10}$ oder $\frac{1}{12}$ der theoretischen Bruchkraft als obere Grenze der zulässigen Belastung zu betrachten sein. Diese Ungleichheiten rühren zum grossen Theil davon her, dass oft nicht gut angegeben werden kann, welcher der Fälle der folgenden Tabelle der in Anwendung zu bringende ist. Da sich die genannten Sicherheiten auf den Bruch beziehen, so ist beim

Nro.	Angriffsweise.	Theoretische Trag- und Bruchkraft.	Bemerkungen.
I.		$P = \frac{\pi^2}{4} \frac{JF}{l^2}$	Freitragende Strebe. Das Ende B ist festgeklemmt, gefährlicher Querschnitt an der Befestigungsstelle.
II.		$P = \pi^2 \frac{JE}{l^2}$	Lose Strebe. Beide Enden frei aufstehend und in der ursprünglichen Stabachse geführt. Gefährlicher Querschnitt in der Mitte.
III.		$P = 2\pi^2 \frac{JE}{l^2}$	Halbeingespannte Strebe. Das untere Ende festgeklemmt, das obere in der ursprünglichen Stabachse geführt.
IV.		$P = 4\pi^2 \frac{JE}{l^2}$	Eingespannte Strebe. Beide Enden festgeklemmt und in der ursprünglichen Stabachse geführt. Gefährliche Querschnitte an den Enden und in der Mitte.

Der Stab ist auf Druckfestigkeit zu berechnen, wenn:		
beim Kreisquerschnitt $\frac{l}{d}$ kleiner als	beim Rechteckquerschnitt $\frac{l}{b}$ (<i>b</i> die kleinere Seite) kleiner als	und dabei das Material
5 12 6	$5\frac{3}{4}$ 14 8	Gusseisen. Schmiedeeisen. Holz.
10 24 $11\frac{1}{2}$	$11\frac{1}{2}$ 28 $13\frac{1}{2}$	Gusseisen. Schmiedeeisen. Holz.
14 33 16	16 38 19	Gusseisen. Schmiedeeisen. Holz.
20 48 23	23 56 27	Gusseisen. Schmiedeeisen. Holz.

irgendwo nothwendigen Vergleich mit anderen Festigkeitsbeanspruchungen die Sicherheit bei diesen ebenfalls auf den Bruch zu beziehen. Von diesem Gesichtspunkte aus sind die Zahlen in Spalte 2, S. 45 berechnet, indem vorausgesetzt ist, dass die Sicherheit gegen Zerdrücken gleich derjenigen gegen Zerknicken genommen werde.

Die Hodgkinson'schen Versuche haben ferner noch gezeigt, dass flach aufstehende Säulen sich ungefähr so verhalten, als ob sie an dem abgeflachten Ende eingeklemmt wären. Im dritten Abschnitte werden verschiedene Anwendungen der Formeln für Strebfestigkeit gezeigt.

§. 17.

Körper von gleicher Strebfestigkeit.

Man erhält eine Körperform von gleicher rückwirkender oder Strebfestigkeit, wenn man die Querschnitte in einem der obigen Stäbe so vom gefährlichen Querschnitt aus abnehmen lässt, dass, eine kleine eingetretene Biegung vorausgesetzt, die Maximalspannung in jedem Querschnitt denselben Werth erhält.

Für den Fall Nro. II. des vorigen Paragraphen kann man sich, wenn der Querschnitt des Stabes der volle Kreis ist, der folgenden Formel*) bedienen:

$$\frac{x}{\left(\frac{l}{2}\right)} = \frac{2}{\pi} \left(\arcsin \frac{y}{h} - \frac{y}{h} \sqrt{1 - \left(\frac{y}{h}\right)^2} \right).$$

Uebersichtlicher gestaltet sich diese Formel, wenn man sie in eine Doppelgleichung auflöst, indem man setzt:

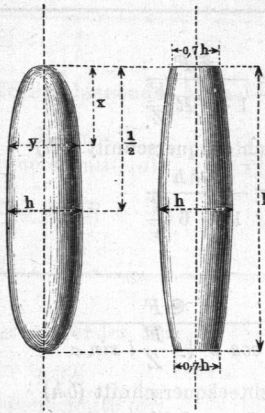
$$\left. \begin{array}{l} \frac{y}{h} = \sin \varphi \quad \dots \dots \dots \\ \frac{x}{\left(\frac{l}{2}\right)} = \frac{1}{\pi} (2 \varphi - \sin 2 \varphi) \end{array} \right\} \dots \dots \dots (23)$$

Diese Gleichung gestattet unschwer ein graphisches Auffinden der Begrenzungskurve, deren Abszissengleichung mit der-

*) Von Redtenbacher.

jenigen einer Cykloide, und deren Ordinatengleichung mit derjenigen einer Sinoide übereinstimmt und deshalb eine cykloidische Sinoide genannt werden kann.

Fig. 5.



Eine Verzeichnungsmethode dieser Kurve ist weiter unten bei den Pleuelstangen angegeben; die durch sie gelieferte Körperform wird angenähert durch die zweite der in Figur 5 angegebenen Formen, bei welcher die Erzeugungsline ein Kreisbogen (der Krümmungskreis für den Kurvenpunkt bei $x = \frac{l}{2}$) oder überhaupt eine schwach gekrümmte Linie ist. Eine solche Annäherung ist durchaus statt-

haft, da wirkliche Biegungen der Strebe doch nicht vorausgesetzt werden. Die vorstehende lose Strebe berechnet sich zu $\frac{3}{4}$ der Festigkeit einer cylindrischen von der gleichen Dicke h und Länge l .

§. 18.

Zusammengesetzte Festigkeit.

Vielfach kommt es vor, dass mehrere Kräfte zugleich die Festigkeit eines Körpers in verschiedener Art beanspruchen, so dass z. B. ein Querschnitt auf Zug und Biegung, auf Drehung und Biegung u. s. w. gleichzeitig angestrengt wird. Die Tragkraft oder die eintretende Maximalspannung sind dann anders zu bestimmen, als gewöhnlich. Für einige der am häufigsten vorkommenden und wichtigsten Fälle dieser sogenannten zusammengesetzten Festigkeit sind die Hauptformeln in der folgenden Tafel zusammengestellt. Es bezeichnet in derselben:

σ die grösste im gefährlichen Querschnitt eintretende Spannung,

Z den Querschnittsmodul des gefährlichen Querschnittes, welcher durch B in den Figuren bezeichnet ist,

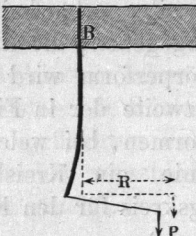
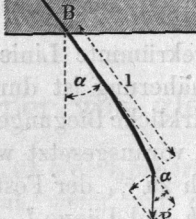
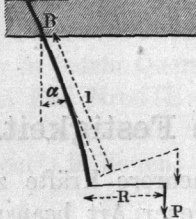
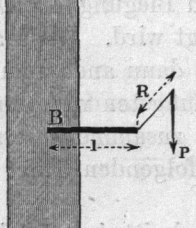
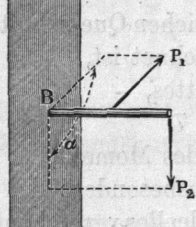
F den Flächeninhalt des Querschnittes,

J dessen Trägheitsmoment nach §. 7,

M_b ein biegendes, M_d ein verdrehendes Moment,

M_i ein ideelles Moment, und zwar insbesondere

$(M_b)_i$ ein ideelles biegendes, $(M_d)_i$ ein ideelles verdrehendes Moment.

Nro	Angriffsweise.	Tragkraft.
I.		$P = \frac{\mathcal{E} F}{1 + R \frac{F}{Z}}$ <p>Beim Rechteckquerschnitt (bh)</p> $P = \frac{\mathcal{E} b h}{1 + 6 \frac{R}{h}}$
II.		$P = \frac{\mathcal{E} F}{\cos \alpha + \frac{F}{Z} l \sin \alpha}$ <p>Beim Rechteckquerschnitt (bh)</p> $P = \frac{\mathcal{E} b h}{\cos \alpha + 6 \frac{l}{h} \sin \alpha}$
III.		$P = \frac{\mathcal{E} F}{\cos \alpha + \frac{F}{Z} (l \sin \alpha + R \cos \alpha)}$ <p>Beim Rechteckquerschnitt (bh)</p> $P = \frac{\mathcal{E} b h}{\cos \alpha + 6 \frac{l}{h} (\sin \alpha + \frac{R}{l} \cos \alpha)}$
IV.		$P = \frac{\mathcal{E} Z}{\frac{2}{3} l + \frac{2}{3} \sqrt{l^2 + R^2}}$ <p>Pl ist ein biegendes Moment M_b, PR ein verdrehendes Moment M_d.</p>
V.		$l = \frac{\mathcal{E} Z}{\sqrt{M_1^2 + M_2^2 + 2M_1 M_2 \cos \alpha}}$ <p>wobei M_1 das (biegende) Moment von P_1, M_2 dasjenige von P_2 bezeichnet.</p>

Ideelle Momente.

Ideelles biegendes Moment für die Spannung \mathcal{E} : $(M_b)_i = P \left(R + \frac{Z}{F} \right)$.

Beim Kreisquerschnitt (d):	Beim Ellipsenquerschnitt ($b h$):	Beim Rechteckquerschnitt ($b h$):
$(M_b)_i = P \left(R + \frac{d}{8} \right)$	$(M_b)_i = P \left(R + \frac{h}{8} \right)$	$(M_b)_i = P \left(R + \frac{h}{6} \right)$

Ideelles biegendes Moment für die Spannung \mathcal{E} : $(M_b)_i = P \left(l \sin \alpha + \frac{Z}{F} \cos \alpha \right)$.

Beim Kreisquerschnitt (d):	Beim Ellipsenquerschnitt ($b h$):	Beim Rechteckquerschnitt ($b h$):
$(M_b)_i = P \left(l \sin \alpha + \frac{d}{8} \cos \alpha \right)$	$(M_b)_i = P \left(l \sin \alpha + \frac{h}{8} \cos \alpha \right)$	$(M_b)_i = P \left(l \sin \alpha + \frac{h}{6} \cos \alpha \right)$

Ideelles biegendes Moment $(M_b)_i$ f. d. Spann. \mathcal{E} : $(M_b)_i = P \left(R \cos \alpha + l \sin \alpha + \frac{Z}{F} \cos \alpha \right)$.

Beim Kreisquerschnitt (d):	Beim Ellipsenquerschnitt ($b h$):	Beim Rechteckquerschnitt ($b h$):
$(M_b)_i = P \left(R \cos \alpha + l \sin \alpha + \frac{d}{8} \cos \alpha \right)$	$(M_b)_i = P \left(R \cos \alpha + l \sin \alpha + \frac{h}{8} \cos \alpha \right)$	$(M_b)_i = P \left(R \cos \alpha + l \sin \alpha + \frac{h}{6} \cos \alpha \right)$

Ideelles liegendes Moment für die Spannung \mathcal{E} :

$$(M_b)_i = \frac{3}{8} M_b + \frac{5}{8} \sqrt{M_b^2 + M_d^2}$$

Ideelles verdrehendes Moment für die Spannung \mathcal{E} :

$$(M_d)_i = \frac{3}{5} M_b + \sqrt{M_b^2 + M_d^2}$$

Ideelles biegendes Moment für die Spannung \mathcal{E} :

$$(M_b)_i = \sqrt{M_1^2 + M_2^2} + 2 M_1 M_2 \cos \alpha$$

In den Fällen IV. und V. ist vorausgesetzt, dass der Querschnitt des Stabes zu denjenigen gehöre, welche durch zwei rechtwinklige Schwerlinien in vier kongruente Stücke getheilt werden.

Eine Betrachtung dieser Formeln zeigt, dass man manchmal die zusammengesetzte Beanspruchung wohl beachten muss. Wenn z. B. im Fall I. $R = \frac{h}{2}$ ist, d. h. die an einer Stange aufgehängte Last am Rand des Querschnittes ihren Schwerpunkt hat, so ist

$P = \frac{\mathfrak{E}bh}{4}$, also die Tragkraft nur $\frac{1}{4}$ so gross, als bei einer genau zentralen Aufhängung. Ist der Querschnitt ein Kreis (d), so

wird $P = \frac{\mathfrak{E} \frac{\pi}{4} d^2}{1 + 8 \frac{R}{d}}$, d. i. wenn wieder die Last am Rande an-

gebracht, also $R = \frac{d}{2}$ gemacht wird, $P = \frac{\mathfrak{E}}{5} \frac{\pi}{4} d^2$, die Tragkraft ist also noch kleiner als beim Rechteckquerschnitt. Die Fälle I. und II. leiten sich aus III. ab, indem man dort beziehlich α oder $R = 0$ setzt.

Eine besondere Brauchbarkeit haben namentlich für den aufmerksamen Rechner die angegebenen ideellen Momente. Es ist zu beachten, dass beim Ellipsen- und dem Rechteckquerschnitte h als in der Biegungsebene liegend angenommen ist. Kennt man diese Dimension im voraus, was bei Annahme des Profils eines zu konstruierenden Trägers sehr häufig der Fall ist, so lässt sich mit Hilfe der ideellen Momente die zusammengesetzte Festigkeit leicht in Betracht ziehen, indem der in der Klammer zur Rechten enthaltene Ausdruck den Hebelarm der gegebenen Kraft P für das ideelle Moment angibt. Derselbe ist meistens, namentlich graphisch, sehr leicht zu bestimmen, und man kann alsdann gerade so wie bei einer gewöhnlichen Biegebungsbeanspruchung rechnen. Ist z. B. im Falle II. bei $\alpha = 45^\circ$, also $\cos \alpha = \sin \alpha = 0,707$ die Rechteckhöhe h gewählt, so ist der Querschnitt bei B so zu berechnen, als griffe eine biegende Kraft P an dem Arme $0,707l$ (der Projektion von l auf die Befestigungsebene) $+ 0,707 \frac{h}{6}$ an. Im Falle I. erhält

man bei $R = 0$ für den Kreisquerschnitt $(M_b)_i = P \frac{d}{8}$, was

gleichzusetzen ist $\mathfrak{E} \frac{\pi}{32} d^3$; dies gibt $P = \mathfrak{E} \frac{\pi}{4} d^2$, wie kommen muss, weil bei $R = 0$ der Stab nur auf Zugfestigkeit beansprucht

ist. $\frac{d}{8}$ ist danach also der Hebelarm, an welchem angreifend eine

biegende Kraft P den Stab ebenso stark beansprucht, als eine in der Achsenrichtung ziehende von gleicher Grösse. Dies gilt allerdings strenggenommen nur unter Vernachlässigung der Schubspannungen bei Berechnung der Biegung. — Viele nützliche Anwendungen finden auch die Formeln der Fälle IV. und V. (s. bei den Achsen und Wellen).

§. 19.

Festigkeit der Gefässwände.

Zur Beurtheilung der Festigkeit runder Gefässe von verhältnissmässig geringer Wanddicke können die in folgender Tabelle zusammengestellten Werthe, welche sich auf einige der wichtigsten Fälle der Maschinenpraxis beziehen, gebraucht werden. Die Theorie der Gefässfestigkeit ist noch nicht als völlig abgeschlossen zu betrachten; ziemlich unsicher erscheint namentlich bis dahin noch die Theorie des von aussen gepressten dünnwandigen Cylinders, weshalb die bezüglichen Formeln weggelassen wurden. In den umstehenden Ausdrücken bezeichnet:

p den auf die Gefässwand wirkenden Flächendruck (nach Abzug des gegenseitigen),

\mathfrak{S} die im Material der Wand eintretende Maximalspannung,

E den Elastizitätsmodul des Materials,

r und δ Gefässhalbmesser und -Wanddicke.

Die Formeln unter (I.) und (II.) haben eine bis zur Bruchgrenze gehende Gültigkeit, immerhin aber nur als Annäherungswerthe.


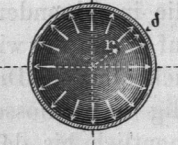
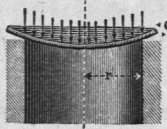
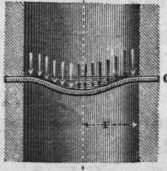
1. *Beispiel.* Für ein schmiedeisernes cylindrisches Gefäss von 1000^{mm} Durchmesser und 10^{mm} Wanddicke sei eine Materialspannung $\mathfrak{S} = 8$ gestattet. Dann kann dasselbe nach (I.) einer inneren Ueberdruckspannung

$$p = 8 \left(\sqrt{\frac{520}{500}} - 1 \right) = 8 \cdot 0,0198 = 0,158^k \text{ pro } \square \text{ Millimeter ausgesetzt}$$

werden. In Atmosphären ausgedrückt beträgt dies $100 \cdot 0,158 = 15,8$ Atm. Das Gefäss würde zerspringen (wegen $K = 40$), wenn die innere Spannung etwa das 5fache oder 79 Atmosphären betrüge.

2. *Beispiel.* Ein kugelförmiges Gefäss von den genannten Angaben würde nach (II.) für $\mathfrak{S} = 8$ einer Spannung $p = \frac{16 \cdot 10}{500} = 0,32^k$ pro $\square \text{mm}$, d. i. einem Drucke von 32 Atmosphären auszusetzen sein.

3. *Beispiel.* Ein dem ersten Gefässe angenieteter ebener schmiedeiserner Boden würde nach (IV.) bei $\mathfrak{S} = 8$ folgende grosse Dicke δ haben müssen: $\delta = 500 \cdot \sqrt{\frac{2}{8}} \cdot \sqrt{\frac{0,158}{8}} = 500 \cdot 0,516 \cdot 0,14 = 57,12 \sim 57 \text{mm}$.

Nro.	Angriffsweise.	Tragkraft p .	Wanddicke δ .
I. Cylinder.		$p = \sigma \left(\sqrt{1 + \frac{2\delta}{r}} - 1 \right)$	$\frac{\delta}{r} = \frac{p}{\sigma} \left(1 + \frac{p}{2\sigma} \right)$
II. Kugel.		$p = 2\sigma \frac{\delta}{r}$	$\frac{\delta}{r} = \frac{p}{2\sigma}$
III. Runde Platte.		$p = \sigma \left(\frac{\delta}{r} \right)^2$	$\frac{\delta}{r} = \sqrt{\frac{p}{\sigma}}$
IV. Runde Platte.		$p = \frac{3}{2} \sigma \left(\frac{\delta}{r} \right)^2$	$\frac{\delta}{r} = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{\frac{p}{\sigma}}$

Die Einbiegung f , welche die ebene runde Platte erfährt, lässt sich nach Grashof für den Fall III. berechnen aus:

$$\frac{f}{\delta} = \frac{5}{6} \left(\frac{r}{\delta} \right)^4 \frac{p}{E} \dots \dots \dots (24)$$

und für den Fall IV.:

$$\frac{f}{\delta} = \frac{1}{6} \left(\frac{r}{\delta} \right)^4 \frac{p}{E} \dots \dots \dots (25)$$

4. Beispiel. Die in Beispiel 3. berechnete Platte würde sich hiernach wegen $E = 20000$ einbiegen um $f = \frac{57}{6} \cdot \left(\frac{500}{57} \right)^4 \cdot \frac{0,158}{20000} = 0,44mm$.

Für Gefässe, deren Wände wegen aussergewöhnlicher innerer Pressungen verhältnissmässig sehr dick gemacht werden müssen, wie die Cylinder und Pumpen hydraulischer Pressen, die Kanonen u. s. w., reichen die vorstehenden Formeln nicht aus. Bei solchen Gefässen sind die Faserspannungen an verschiedenen Punkten eines Radius unter Umständen sehr von einander verschieden; ihr Verhältniss ist aber von entscheidendem Einfluss auf die Tragkraft. Je nachdem dieses Verhältniss der Spannungen angenommen oder berechnet wird, gestalten sich die Formeln für die Wanddicke wesentlich anders. Brix berechnet die Spannungen an verschiedenen Punkten eines Radius unter der Annahme, dass die Dicke der Rohrwand durch die innere Pressung nicht geändert werde; Barlow nimmt eine Aenderung an, und zwar eine solche, bei der der ringförmige Querschnitt des (runden) Gefässes seine Grösse nicht ändere; Lamé macht keine vorgängige Annahme, sondern berechnet mit grosser Strenge die Spannungsänderung, welche an jeder Stelle in Folge der inneren Pressung stattfindet, und hat damit die zuverlässigste, das wahrscheinliche Verhalten der Stofftheilchen am genauesten ausdrückende Berechnungsmethode geliefert. Unter Beibehaltung der vorhin gebrauchten Bezeichnungen erhält man nach den drei Theorien*) die folgenden Formeln:

Werthe.	Brix.	Barlow.	Lamé.
Hohlcylinder			
$p =$	$\mathfrak{C} \log \text{nat } e^{\frac{p}{\mathfrak{C}}} - 1$	$\frac{\mathfrak{C}}{1 + \frac{r}{\delta}}$	$\mathfrak{C} \frac{(r + \delta)^2 - r^2}{(r + \delta)^2 + r^2}$
$\frac{\delta}{r} =$	$e^{\frac{p}{\mathfrak{C}}} - 1$	$\frac{p}{\mathfrak{C} - p}$	$\sqrt{\frac{\mathfrak{C} + p}{\mathfrak{C} - p}} - 1$
Hohlkugel			
$p =$	$2 \mathfrak{C} \frac{\delta}{r}$	$\frac{2 \mathfrak{C}}{1 + \frac{r}{\delta}}$	$2 \mathfrak{C} \frac{(r + \delta)^3 - r^3}{(r + \delta)^3 + 2r^3}$
$\frac{\delta}{r} =$	$\frac{1}{2} \frac{p}{\mathfrak{C}}$	$\frac{p}{2 \mathfrak{C} - p}$	$\sqrt[3]{\frac{2(\mathfrak{C} + p)}{2 \mathfrak{C} - p}} - 1$

*) Siehe Org. f. Eisenbahnwesen 1859, S. 59 ff. Baurath Dr. H. Scheffler: Die Elastizitätsverhältnisse der Röhren, in welchem lehrreichen Artikel der Gegenstand in eingehender Weise auch für die verwickelten Probleme von Röhren mit Böden und von verstärkten Röhren behandelt ist.

Für die Spannung \mathfrak{S}' in einer Ringschicht, welche um r' statt um r vom Zentrum abliegt, ergibt die Lamé'sche Untersuchung den Werth:

$$\mathfrak{S}' = \frac{\mathfrak{S}}{2} \left[1 + \left(\frac{r}{r'} \right)^2 \right] - \frac{p}{2} \left[1 - \left(\frac{r}{r'} \right)^2 \right].$$

Entspricht r' der Schicht am Umfang des (cylindrischen) Gefässes, so dass $r' = r + \delta$, so folgt hieraus:

$$\mathfrak{S}' = \frac{\mathfrak{S}}{2} \left[\frac{\left(1 + \frac{r}{\delta} \right)^2 + 1}{\left(1 + \frac{\delta}{r} \right)^2} \right] - \frac{p}{2} \frac{\left(1 + \frac{\delta}{r} \right)^2 - 1}{\left(1 + \frac{\delta}{r} \right)^2} \quad \dots \quad (26)$$

oder abgekürzt, wenn $\left(1 + \frac{\delta}{r} \right)$ mit μ bezeichnet wird:

$$\mathfrak{S}' = \frac{\mathfrak{S}}{2} \frac{\mu^2 + 1}{\mu^2} - \frac{p}{2} \frac{\mu^2 - 1}{\mu^2}.$$

Beispiel. Für $\delta = r$, d. i. $\mu = 2$ kommt $\mathfrak{S}' = \frac{5}{8} \mathfrak{S} - \frac{3}{8} p$. In diesem Falle ist ausserdem nach der Anfangsformel $p = \frac{3}{5} \mathfrak{S}$, somit $\mathfrak{S}' = \frac{5}{8} \mathfrak{S} - \frac{9}{40} \mathfrak{S} = \frac{2}{5} \mathfrak{S}$. Das Material ist hiernach bei dickwandigen Gefässen mit innerem Druck aussen weit weniger als innen, also nicht besonders günstig verwendet.

Alle drei Theorien ergeben, dass an der inneren Wand die Materialspannung am stärksten wird; es gilt demnach \mathfrak{S} für die innerste Ringschicht; die Lamé'sche Formel, und auch schon die Barlow'sche, zeigt dabei das bemerkenswerthe Resultat, dass das Steigern der Wanddicke über gewisse Grenzen hinaus die Tragkraft nicht mehr erhöht. Die Grenze für die Tragkraft zur Spannung \mathfrak{S} wird erreicht, wenn $p = \mathfrak{S}$ wird; die theoretische Tragkraft überhaupt wird also erschöpft, wenn $p =$ dem Tragmodul des Materials wird. Der innere Druck fängt dann an, die innersten Fasern bleibend zu dehnen, und muss sie bei Steigerungen über den Bruchmodul hinaus zersprengen. Die theoretische Tragkraftgrenze liegt hiernach bei $p = T$, also für

	Gusseisen	Schmiedeeisen	Gussstahl
bei p	$= 7,5$	15	25
in Atmosphären	750	1500	2500

Ungleichförmigkeiten des Materials können herbeiführen, dass ziemlich tief unter diesen Grenzen schon die Gefahr nicht nur des Dehnens, sondern des Bruches eintritt. Da in Geschützen von grossem Kaliber Spannungen über 2500 Atmosphären vorkommen, so ist es erklärlich, dass Geschütze aus gewöhnlicher Bronze den

Schusswirkungen nicht dauernd widerstehen können, ja wenn auch homogene Gussstahlgeschütze grossen Kalibers sich oft nicht haltbar zeigten.

Das Ausschieszen oder Ausbrennen der Kammer in den gewöhnlichen Bronzegeschützen erklärt sich hier schon als aus der übermässigen Beanspruchung der innersten Ringschicht hervorgehend, wenn auch chemische Wirkungen mitspielen mögen.

Um die Geschütze genügend fest zu erhalten, hat man mit Erfolg den Weg betreten, ihre Ringschichten unhomogen, die äusseren anders gespannt als die inneren, herzustellen, und dazu das Umreifen, das Abschrecken von innen und andere Methoden versucht*). Die Umreifung hat sich als die zweckmässigste Methode herausgestellt. Ihre wesentliche Wirkung besteht in einer Zusammenpressung der innersten Ringschichten. Diese werden nun durch die Pressung der Pulvergase vorerst zurück in den Normalzustand und dann erst in den gedehnten Zustand versetzt, dürfen demnach einer weit stärkeren Dehnung ausgesetzt werden, als wenn sie ihren natürlichen Molekularanziehungen allein überlassen wären.

Die Berechnung der Festigkeitszustände unreifer Geschütze ist nicht wenig weitläufig. Einigen Anhalt kann das Folgende geben. Zieht man nicht bloss die innere, sondern auch die äussere, die Gefässwände belastende Pressung p' in Betracht, so erhält man die folgende, ebenfalls von Lamé ermittelte Beziehung:

$$\left(1 + \frac{\delta}{r}\right)^2 = \frac{\mathfrak{S} + p}{\mathfrak{S} - p + 2p'} \cdot \dots \dots \dots (27)$$

Hieraus ergibt sich, wenn, wie vorhin abkürzend, $1 + \frac{\delta}{r} = \mu$ gesetzt wird:

$$p = \mathfrak{S} \frac{\mu^2 - 1}{\mu^2 + 1} + 2p' \frac{\mu^2}{\mu^2 + 1} \cdot \dots \dots \dots (28)$$

wonach \mathfrak{S} um so kleiner gegen p , also in unserem Falle günstiger ausfällt, je grösser p' wird. Beim beringten Gefäss ist nun p' nicht unveränderlich und konstant, sondern hängt ab von dem durch die innere Pressung p hervorgerufenen Druck der Cylinderwand auf den Reifen. Unter Benutzung der in Fig. 6 (a. f. S.) eingetragenen Bezeichnungen nehmen wir vorerst an, dass im Normal-

*) Siehe Dingler's Journal 1865, Bd. 177. Ueber die künstlichen Metallkonstruktionen der Geschützrohre, von Hauptmann D. . . . y (Darapsky) in Kassel, von welchem Verfasser andere treffliche Mittheilungen über ähnliche Gegenstände den angeführten folgen; siehe ferner die Aufsätze im Pract. Mech. Journ. 1867: On some points of practice in iron founding.

zustand der Ring das Rohr mit der Spannung Null berühre, also dass bei $p = 0$ auch $\mathfrak{S}'_1 = \mathfrak{S}'_2 = 0$. Tritt alsdann der Druck p ein und ist ausserdem $p'' = 0$ oder vernachlässigbar, so dehnen sich die Schichten bei r' um gleichviel aus, haben also die gleiche Zugspannung $\mathfrak{S}'_1 = \mathfrak{S}'_2$. Dann aber bewirkt zugleich die Spannung \mathfrak{S}'_2 der inneren Schicht des Reifens den nach innen gerichteten Druck p' , und es besteht zwischen diesem und den Materialspannungen des Reifens die durch die erste Lamé'sche Formel*) angegebene Beziehung, nämlich,

wenn $1 + \frac{\delta'}{r'} = \mu'$ gesetzt wird:

$$p' = \mathfrak{S}'_2 \frac{\mu'^2 - 1}{\mu'^2 + 1} \dots \dots \dots (29)$$

Dies in (28) eingeführt, gibt wegen $\mathfrak{S}' = \mathfrak{S}'_2 = \mathfrak{S}'_1$:

$$p = \mathfrak{S} \frac{\mu^2 - 1}{\mu^2 + 1} + 2 \mathfrak{S}' \frac{\mu'^2 - 1}{\mu'^2 + 1} \frac{\mu^2}{\mu^2 + 1}.$$

\mathfrak{S}' ist aber gemäss (26) durch p und \mathfrak{S} ausdrückbar. Man erhält nach einiger Umformung:

$$p = \mathfrak{S} \frac{\mu^2 \mu'^2 - 1}{\mu^2 \mu'^2 + 1} = \mathfrak{S} \frac{\left(1 + \frac{r}{\delta}\right)^2 \left(1 + \frac{r'}{\delta'}\right)^2 - 1}{\left(1 + \frac{r}{\delta}\right)^2 \left(1 + \frac{r'}{\delta'}\right)^2 + 1} \dots (30)$$

Hier ist nach wie vor zwar die Spannung \mathfrak{S} der innersten Ringschicht immer $> p$, allein ihr Verhältniss zu p nähert sich doch weit mehr der Einheit, als früher, wie folgende Zahlenreihe zeigt.

Wenn:		so ist:		und wird:			
$\frac{\delta}{r}$	$\frac{\delta'}{r'}$	μ	μ'	$\frac{p}{\mathfrak{S}}$	$\frac{\mathfrak{S}}{p}$	$\frac{\mathfrak{S}'}{p}$	$\frac{\mathfrak{S}'}{\mathfrak{S}}$
1	0	2	1	0,600	1,667	0,667	0,400
1	0,5	2	1,5	0,800	1,250	0,406	0,325
2	1	3	2	0,905	1,057	0,143	0,135

*) Diese wird aus (28) erhalten, wenn daselbst $p' = \text{Null}$ gemacht wird.

Man sieht hieraus, dass die blosse druckfreie Belegung eines Geschützes mit einem Reif, welcher aus demselben Material besteht, wie das Rohr, dieses letztere schon wesentlich verstärken kann. Wird aber der Reif auf das Rohr aufgezwanzt, so übt derselbe von Anfang an einen radial nach innen gerichteten Druck p' auf die Rohrwand aus, welcher auf die durch p bedingte Grösse von \mathfrak{S} einen bedeutenden und günstigen Einfluss ausüben kann.

Wir erhalten nämlich, indem wir den Werth für p' aus (29) in Formel (28) einführen:

$$p = \mathfrak{S} \frac{\mu^2 - 1}{\mu^2 + 1} + 2 \mathfrak{S}' \frac{\mu'^2 - 1}{\mu'^2 + 1} \frac{\mu^2}{\mu^2 + 1} \dots \quad (31)$$

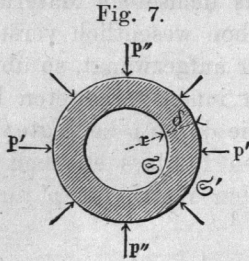
Hierin ist \mathfrak{S}' einestheils eine Funktion von p , andernteils aber auch eine solche der Herstellungsweise des Rohres. Wir werden weiter unten noch genauer sehen, wie ausserordentlich stark der letztere Einfluss ist und müssen uns deshalb hier mit Annahmen begnügen. Machen wir diejenige, dass der Reif gerade so fest aufgezogen sei, dass beim Maximalwerthe von p die Spannung $\mathfrak{S}' =$ der Spannung \mathfrak{S} in der Rohrseele werde (was ohne Zweifel die günstigste Annahme sein wird), so erhalten wir aus (31):

$$\frac{p}{\mathfrak{S}} = \frac{\mu^2 - 1}{\mu^2 + 1} + 2 \frac{\mu'^2 - 1}{\mu'^2 + 1} \frac{\mu^2}{\mu^2 + 1} \dots \quad (32)$$

Beispiel. Es sei $\delta = r$, $\delta' = \delta = \frac{1}{2}r'$, so ist $\mu = 2$, $\mu' = \frac{3}{2}$, und es kommt $\frac{p}{\mathfrak{S}} = \frac{3}{5} + \frac{10}{13} \cdot \frac{4}{5} = \frac{79}{65}$. Hier bleibt also \mathfrak{S} hinter dem

Werthe von p zurück oder mit anderen Worten p darf über den Tragmodul des Materials hinaus gesteigert werden, ohne dass die Spannung in letzterem denselben erreicht. Auch sehen wir hier, dass durch eine Umgürtung der Reifen mit weiteren Reifen, wie sie für die schwersten Geschütze benutzt wird, das Verhältniss zwischen p und \mathfrak{S} noch günstiger gestaltet werden kann. Immerhin zeigt indessen unsere Rechnung, dass, wenn das Geschützmaterial gewöhnlicher Gussstahl wäre, also den Tragmodul 25 hätte, die Pulvergasspannung nicht über etwa $30^k = 3000$ Atmosphären hinaus gesteigert werden dürfte, ohne dem Rohr Gefahr zu drohen. Dem widersprechen aber die Messungen bei neueren Geschützproben. So soll die jüngste englische Riesenkanone Spannungen von 25,8 Tonnen pro Quadratzoll ausgehalten haben. Die Ingenieure sollen nun zwar solche Spannungen für zu hoch und für gefährlich halten, dagegen 25 Tonnen, d. i. rund 40^k auf den \square_{mm} für zulässig erachten. Dies würde nothwendig voraussetzen, dass der Tragmodul des verwendeten Materials den des gewöhnlichen Gussstahls, d. i. 25^k , übertrifft; vielleicht hat man aber auch eine Härtung der Rohrseele annehmen, die sich, wenn gut ausführbar, jedenfalls empfiehlt.

Die blosse Zusammenpressung eines cylindrischen Rohres von



aussen, Fig. 7, ruft eine Beanspruchung der Rohrwand hervor, über welche Formel (27) Aufschluss zu geben vermag. Setzt man in derselben $p = 0$ oder nimmt p als vernachlässigbar an, so erhält man: $(\mathfrak{S} + 2p') \mu^2 = \mathfrak{S}$, woraus:

$$p' = \frac{\mathfrak{S}}{2} \frac{1 - \mu^2}{\mu^2}$$

$$\text{oder } \mathfrak{S} = -p' \frac{2\mu^2}{\mu^2 - 1} = -p' \frac{2 \left(1 + \frac{\delta}{r}\right)^2}{\left(1 + \frac{\delta}{r}\right)^2 - 1} \dots (33)$$

Das Minuszeichen zeigt an, dass die Spannung in der Rohrseelenwand nunmehr aus einer Zugspannung in eine Druckspannung übergegangen ist. Für die Spannung \mathfrak{S}' an der Mantelfläche kommt nach (26) wegen $p = \text{Null}$: $\mathfrak{S}' = \frac{\mathfrak{S}}{2} \frac{\mu^2 + 1}{\mu^2}$; dies gibt:

$$\mathfrak{S}' = -p' \frac{\mu^2 + 1}{\mu^2 - 1} = -p' \frac{\left(1 + \frac{\delta}{r}\right)^2 + 1}{\left(1 + \frac{\delta}{r}\right)^2 - 1} \dots (34)$$

Dieser Werth ist kleiner als der vorige; denn, dividiren wir so erhalten wir das Verhältniss:

$$\frac{\mathfrak{S}'}{\mathfrak{S}} = \frac{1}{2} \frac{\mu^2 + 1}{\mu^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(1 + \frac{\delta}{r}\right)^2 + 1}{\left(1 + \frac{\delta}{r}\right)^2} \dots (35)$$

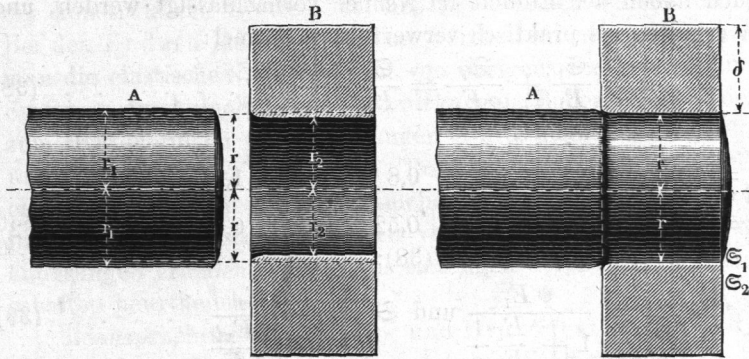
welches erst = 1 wird, wenn μ auf 1 herabgegangen, d. i. $\delta = 0$ geworden ist. Auch bei blosser äusserer Pressung ist somit die Spannung in der innersten Schicht der Rohrwand stärker als jede andere.

Beispiel. $\delta = r$, also $\mu = 2$. Dann ist die Spannung in der innersten Wandschicht $\mathfrak{S} = -\frac{8}{3} p'$ und $\mathfrak{S}' = -\frac{5}{3} p'$, somit $\mathfrak{S}' = \frac{5}{8} \mathfrak{S}$. Die entstehende Druckspannung an der Seelenwand ist somit grösser als die unter gleichen Verhältnissen bei der Pressung von innen entstehende Zugspannung in derselben Wandschicht; denn für diese fanden wir oben (bei Formel (30)) nur $\mathfrak{S} = \frac{5}{3} p$.

Im Maschinenbau wird das Aufziehen oder Aufzwängen von Reifen, von ringförmigen Radnaben, von Walzen u. s. w. vielfach ausgeführt, wodurch Verbindungen geschaffen werden, welche man Zwängungsverbindungen nennen kann. Das Verfahren hängt mit dem vorerwähnten eng zusammen. Die Theorie für den einfachsten Fall sei hier vorgeführt.

Ist, Fig. 8, *B* ein Ring oder eine Nabe von cylindrischer Bohrung, welche auf die cylindrische Achse *A* aufgezwingt werden soll, sei es in warmem, sei es in kaltem Zustande, so habe vor der Operation die Achse den Halbmesser r_1 , die Ringhohlung den Halbmesser r_2 , nach geschehener Aufzwängung sei der den beiden Stücken gemeinsame Halbmesser = r . In *A* herrscht nach der

Fig. 8.



Aufzwängung eine gleichförmig vertheilte Druckspannung ϵ_1 , in *B* an der innersten Schicht eine solche auf Zug ϵ_2 . Für diese Spannungen gilt bei den Elastizitätsmodeln E_1 und E_2 gemäss Formel (2):

$$\frac{\epsilon_1}{E_1} = \frac{r_1 - r = \lambda}{r_1}, \quad \frac{\epsilon_2}{E_2} = \frac{r - r_2}{r_2}.$$

Addirend erhält man: $r_1 \frac{\epsilon_1}{E_1} + r_2 \frac{\epsilon_2}{E_2} = r_1 - r_2$. Für den Konstrukteur ist wünschenswerth zu wissen, welches Verhältniss den Werthen r_1 und r_2 zu geben ist, um zu guten Resultaten zu gelangen. Bezeichnet man mit ψ den Quotienten $\frac{r_1 - r_2}{r_2}$, so erhält man aus dem Vorigen:

$$\psi = \frac{r_1}{r_2} \frac{\epsilon_1}{E_1} + \frac{\epsilon_2}{E_2} = \frac{\frac{\epsilon_1}{E_1} + \frac{\epsilon_2}{E_2}}{1 - \frac{\epsilon_1}{E_1}} \dots \dots \dots (36)$$

\mathfrak{E}_1 und \mathfrak{E}_2 sind aber von einander abhängig und zwar haben sie nach der Lamé'schen Formel folgende Beziehung:

$$\mathfrak{E}_1 = \mathfrak{E}_2 \frac{\mu^2 - 1}{\mu^2 + 1} = \mathfrak{E}_2 \frac{\left(1 + \frac{\delta}{r}\right)^2 - 1}{\left(1 + \frac{\delta}{r}\right)^2 + 1},$$

wofür der Kürze halber gesetzt werde $\mathfrak{E}_1 = \mathfrak{E}_2 \varrho$. Dies ergibt:

$$\psi = \frac{\frac{\mathfrak{E}_1}{E_1} + \frac{\mathfrak{E}_1}{\varrho E_2}}{1 - \frac{\mathfrak{E}_1}{E_1}} = \frac{\frac{\mathfrak{E}_2}{E_2} + \frac{\mathfrak{E}_2 \varrho}{E_1}}{1 - \frac{\mathfrak{E}_2 \varrho}{E_1}} \dots \dots \dots (37)$$

Wenn A und B aus Metallen hergestellt sind, so kann der Bruch neben der Einheit im Nenner vernachlässigt werden, und wir erhalten als praktisch verwertbare Formel:

$$\psi = \frac{\mathfrak{E}_1}{E_1} + \frac{\mathfrak{E}_1}{\varrho E_2} = \frac{\mathfrak{E}_2}{E_2} + \frac{\mathfrak{E}_2 \varrho}{E_1} \dots \dots \dots (38)$$

Hierin ist, wenn:

$\frac{\delta}{r} =$	0,5	0,6	0,7	0,8	1,0	1,5	2,0	3,0
$\varrho =$	0,385	0,438	0,468	0,528	0,600	0,724	0,800	0,882

Auch hat man noch aus (38):

$$\mathfrak{E}_1 = \frac{\psi E_1}{1 + \frac{E_1}{E_2} \frac{1}{\varrho}} \text{ und } \mathfrak{E}_2 = \frac{\psi E_2}{1 + \frac{E_2 \varrho}{E_1}} \dots \dots \dots (39)$$

Der Werth ψ fällt meistens so klein aus, dass die Herstellung des richtigen Verhältnisses zwischen r_1 und r_2 auf der Drehbank grosse Sorgfalt erheischt.

Beispiel. Schmiedeeiserne Achse, gusseiserne Nabe, $E_1 = 20000$, $E_2 = 10000$; es sei $\delta = 2r$, also $\varrho = 0,8$, und werde gefordert, dass die durch die Zwängung entstehende Materialspannung \mathfrak{E}_2 in der inneren Nabenhöhle nicht 5^k übersteige. Dann ist zu machen nach (38): $\psi =$

$\frac{5}{10000} + \frac{5 \cdot 0,8}{20000} = \frac{7}{10000} = \frac{1}{1429} \sim \frac{1}{1400}$. Mache man $\psi = 1:600$, so würde gemäss (39) in der Nabe eine Spannung von der Grösse

$\mathfrak{E}_2 = \frac{\frac{1}{600} \cdot 10000}{1 + \frac{10000 \cdot 0,8}{20000}} = \frac{100}{6 \cdot 1,4}$, d. i. nahe $11,5^k$ entstehen; die Nabe würde

also zerspringen. Die Kleinheit von ψ lässt schon die Tiefe der Drehstriche als beachtenswerth erscheinen.

§. 20.

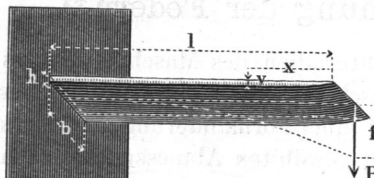
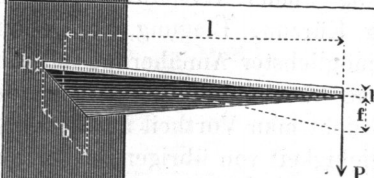
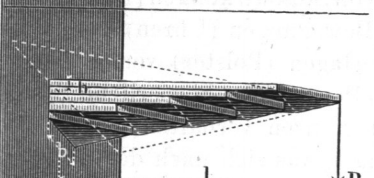
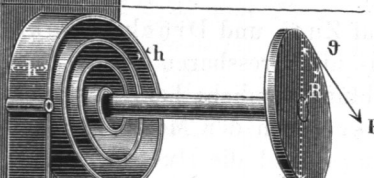
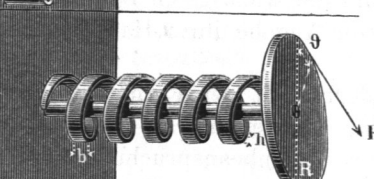
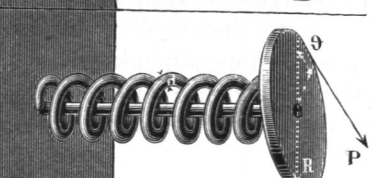
Berechnung der Federn*).

Die Konstruktionsmaterialien des Maschinenbauers sind alle mehr oder weniger elastisch nachgiebig, so dass sie äusseren Kräften nur unter Eingehung einer Formänderung zu widerstehen vermögen, welche bei richtig gewählten Abmessungen nach Aufhören der äusseren Kraftwirkung wieder verschwindet. Diese Formänderung — Ausdehnung, Kürzung, Biegung, Verdrehung — sucht man gewöhnlich behufs möglichster Annäherung an die Starrheit der konstruktiven Systeme so viel als thunlich einzuschränken. Bei den Federn jedoch zieht man Vortheil aus derselben, indem man die elastische Nachgiebigkeit von übrigens widerstandsfähigen Systemen zur Aufnahme von Stosswirkungen (Buffer, Wagenfedern), zum Hervorbringen von Bewegungen (Uhren), zum Bilden weicher und doch haltbarer Unterlagen (Polster) verwerthet. Zu Federn eignen sich deshalb vor allem solche körperliche Systeme, welche innerhalb der Elastizitätsgrenzen verhältnissmässig grosse Formänderungen erleiden können, was sich nach deren Festigkeitseigenschaften beurtheilen lässt.

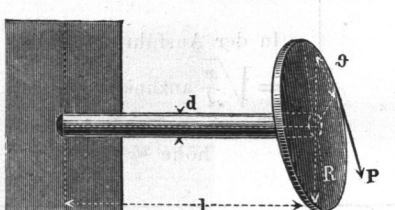
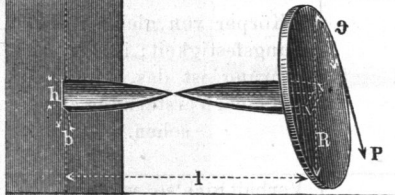

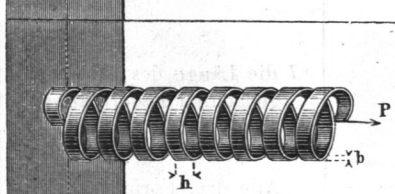
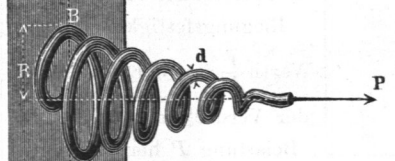
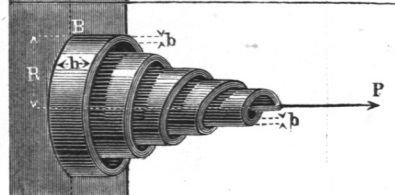
Beanspruchungen auf Zug- und Druckfestigkeit sind nur bei ganz besonders dehn- und pressbaren Stoffen, wie z. B. beim Kautschuck, zur Federbildung dienlich; bei den steiferen Materialien, den Hölzern und namentlich den Metallen, eignen sich vorwiegend nur die Biegungs- und die Drehungsfestigkeit. In der folgenden Tabelle sind die wichtigsten Biegungs- und Torsionsfedern unter kurzer Angabe ihrer Haupteigenschaften zusammengestellt.

Neben grosser Aenderbarkeit der Form tritt als zweite wesentliche Eigenschaft der Federn der geringe Materialverbrauch, mit welchem ihre Raumbeanspruchung zusammenhängt, in den Vordergrund. Der Materialverbrauch wurde deshalb in der Zusammenstellung berücksichtigt, indem derselbe, gleiche Belastung und Verschiebung des Kraftangriffpunktes bei sämtlichen Federn vorausgesetzt, in der vorletzten Spalte angegeben ist. Das Volumen der Dreieckfeder ist dabei als Einheit angenommen.

*) Siehe Ausführliches in des Verfassers „Konstruktion und Berechnung der wichtigsten Federarten“. Winterthur, Wurster et Comp., 1857.

Nro.	Form.	Benennung.	Tragkraft.
I.		Rechteckfeder. Cubisch parabolisch zuge- schärft.	$P = \frac{\epsilon b h^2}{6 l}$
II.		Einfache Dreieckfeder.	$P = \frac{\epsilon b h^2}{6 l}$
III.		Zusammen- gesetzte oder geschichtete Dreieckfeder.	$P = \frac{\epsilon i b h^2}{6 l}$ <i>i</i> die Blätterzahl.
IV.		Spiralfeder, flachdrätig.	$P = \frac{\epsilon b h^2}{6 R}$
V.		Drehschrauben- feder, flachdrätig.	$P = \frac{\epsilon b h^2}{6 R}$
VI.		Drehschrauben- feder, runddrätig.	$P = \frac{\epsilon \pi d^3}{32 R}$

Federung.	Biagsamkeit.	Körper- inhalt.	Bemerkungen.
$f = 6 \frac{Pl^3}{Ebh^3}$	$\frac{f}{l} = \frac{\epsilon}{E} \frac{l}{h}$	$\frac{3}{2}$	In der Ausführung statt $\frac{y}{h} = \sqrt{\frac{x}{l}}$ anzunähern durch ein Trapezprofil mit der Endhöhe $\frac{2}{3} h$.
$f = 6 \frac{Pl^3}{Ebh^3}$	$\frac{f}{l} = \frac{\epsilon}{E} \frac{l}{h}$	1	Körper von gleicher Biege- festigkeit; in der Aus- führung ist das freie Ende mit einer Verstärkung zu ver- sehen.
$f = 6 \frac{Pl^3}{Eibh^3}$	$\frac{f}{l} = \frac{\epsilon}{E} \frac{l}{h}$	1	Verhält sich so, wie eine ein- fache Dreieckfeder von der Basisbreite <i>ib</i> (s. die Punkt- rührung), und kann durch Zer- schneidung und Schichtung einer solchen entstanden ge- dacht werden.
$f = R\vartheta = 12 \frac{PlR^2}{Ebh^3}$	$\frac{f}{R} = 2 \frac{\epsilon}{E} \frac{l}{h}$	1	<i>l</i> die Länge des gestreckt gedachten Federblattes.
$f = R\vartheta = 12 \frac{PlR^2}{Ebh^3}$	$\frac{f}{R} = 2 \frac{\epsilon}{E} \frac{l}{h}$	1	Alle drei Formen sind Körperformen von gleicher Biegefestigkeit. Der Werth $\frac{f}{R}$ ist der Winkel ϑ der Verdrehung, welche die Belastung <i>P</i> hervorbringt.
$f = R\vartheta = \frac{64 PlR^2}{\pi E d^4}$	$\frac{f}{R} = 2 \frac{\epsilon}{E} \frac{l}{d}$	$\frac{4}{3}$	

Nro.	Form.	Benennung.	Tragkraft.
VII.		Einfache Torsionsfeder, runddrähtig.	$P = \frac{\pi}{16} \frac{d^3}{R}$
VIII.		Einfache Torsionsfeder, flachdrähtig.	$P = \frac{\pi}{3R} \frac{b^2 h^2}{\sqrt{b^2 + h^2}}$ Annähernd ($h > b$) $P = \frac{\pi}{R} \frac{b^2 h^2}{3(0,4b + 0,96h)}$
IX.		(Zylindrische) Schraubenfeder, runddrähtig.	$P = \frac{\pi}{16} \frac{d^3}{R}$
X.		(Zylindrische) Schraubenfeder, flachdrähtig.	$P = \frac{\pi}{3R} \frac{b^2 h^2}{\sqrt{b^2 + h^2}}$ Annähernd ($h > b$) $P = \frac{\pi}{R} \frac{b^2 h^2}{3(0,4b + 0,96h)}$
XI.		Kegelschraubenfeder oder Kegelfeder, runddrähtig.	$P = \frac{\pi}{16} \frac{d^3}{R}$
XII.		Kegelfeder, flachdrähtig.	$P = \frac{\pi}{3R} \frac{b^2 h^2}{\sqrt{b^2 + h^2}}$ Annähernd ($h > b$) $P = \frac{\pi}{R} \frac{b^2 h^2}{3(0,4b + 0,96h)}$

Federung.	Biagsamkeit.	Körperinhalt.	Bemerkungen.
$f = R\vartheta = \frac{32}{\pi} \frac{P R^2 l}{G d^4}$	$\frac{f}{R} = 2 \frac{\pi}{G} \frac{l}{d}$	$\frac{5}{12}$	In den Fällen VII. bis X. ist die Feder ein Körper von gleicher Torsionsfestigkeit.
$f = R\vartheta = 3 \frac{P R^2 l}{G} \frac{b^2 + h^2}{b^3 h^3}$	$\frac{f}{R} = \frac{\pi}{G} \frac{l \sqrt{b^2 + h^2}}{bh}$	$\frac{5}{8}$	Federn nach VII. und VIII. eignen sich auch zur Bildung von zusammengesetzten oder Bündelfedern.
$f = \frac{32}{\pi} \frac{P R^2 l}{G d^4}$	$\frac{f}{R} = 2 \frac{\pi}{G} \frac{l}{d}$	$\frac{5}{12}$	In den Fällen IX. bis XII. ist l immer die Länge des gestreckt gedachten Drahtes.
$f = 3 \frac{P R^2 l}{G} \frac{b^2 + h^2}{b^3 h^3}$	$\frac{f}{R} = \frac{\pi}{G} \frac{l \sqrt{b^2 + h^2}}{bh}$	$\frac{5}{8}$	Es ist gleichgültig, ob die grössere Querschnittseite parallel, normal, oder schief zur Achse steht.
Annähernd: $= \frac{16}{\pi} \frac{P R^2 l}{G d^4}$	$\frac{f}{R} = \frac{\pi}{G} \frac{l}{d}$	$\frac{5}{6}$	Hier wie in XII. ist die Feder bis zur Kegelspitze ausgeführt angenommen; in beiden Fällen gefährlicher Querschnitt bei B.
Annähernd: $f = \frac{3}{2} \frac{P R^2 l}{G} \frac{b^2 + h^2}{b^3 h^3}$	$\frac{f}{R} = \frac{1}{2} \frac{\pi}{G} \frac{l \sqrt{b^2 + h^2}}{bh}$	$\frac{5}{4}$	Lässt sich durch allmähliche Verkleinerung der Querschnittshöhe h von B aus nach oben zu einem Körper von gleicher Festigkeit machen.

In den Formeln der vorstehenden Tabelle bezeichnet immer:
E den Elastizitätsmodul,
G den Drehungsmodul des Materials der Feder, welcher
 (s. §. 13) = $\frac{2}{5} E$ ist.

Die Festigkeitskoeffizienten für die Materialien der Federn sind in §. 2 angegeben. Zu bemerken ist aber, dass bei allen Torsionsfedern für gleiche Sicherheit mit den Biegungsfedern das $\frac{4}{5}$ fache der dort angewandten Materialspannung \mathfrak{S} einzusetzen ist (vergl. §. 5). Die Formeln behalten ihre Geltung, wenn die Richtung der Kraft *P* der in den Figuren angedeuteten entgegengesetzt wird. In allen angeführten Fällen ist das Volumen *V* der Feder zu erhalten aus dem Ausdrücke:

$$V = C.(P.f) \frac{E}{\mathfrak{S}^2} \dots \dots \dots (26)$$

wobei *C* eine von der Federform abhängige Konstante bezeichnet, und (*Pf*) das Produkt aus Belastung und Federung oder die sogenannte Federungsarbeit ist. Dies hat die interessante Bedeutung, dass Federn von gleicher Grundform und gleichem Material bei gleicher Sicherheit für dieselbe Federungsarbeit *Pf* immer gleich schwer ausfallen, wie man auch die Länge *l* oder überhaupt die frei zu wählenden Abmessungen macht. Der Quotient $\frac{E}{\mathfrak{S}^2}$ zeigt, dass ein kleiner Elastizitätsmodul, namentlich aber ein hoher Tragmodul günstig für das Material der Federn ist. Man erhält nach Tabelle §. 2 für:

Gussstahl, gehärtet und angelassen	$\frac{E}{T^2} = \frac{30000}{65^2} =$	7,10
Gewöhnlichen Stahl (ungehärtet)	$= \frac{20000}{25^2} =$	32,00
Messing	$= \frac{6500}{4,8^2} =$	28,21
Holz	$= \frac{1100}{2^2} =$	275,00

Der gehärtete und angelassene Gussstahl ist hiernach auch theoretisch weitaus das beste Federmaterial.

Bemerkenswerth ist noch für die sämtlichen aufgeführten Federn, dass bei ihnen die Federung oder Verschiebung des Kraftangriffpunktes proportional der Belastung ist.

Dieser Umstand hat zur Folge, dass die Schwingungen, welche die belastete Feder macht, in die Klasse der „einfachen“

oder „pendelartigen“ Schwingungen fallen, und eine leicht zu berechnende Dauer haben. Bei Vernachlässigung des Federgewichtes schwingt nämlich jede der obigen Federn bei der Belastung P wie ein einfaches (mathematisches) Pendel von der Länge f^*), so dass die Zeit t einer einfachen Schwingung (eines Hinganges oder eines Herganges) ist:

$$t = \pi \sqrt{\frac{f}{g}} \dots \dots \dots (27)$$

wobei g die Beschleunigung der Schwere = $9,81^m = 31,25$ preuss. Fuss, für unsere gewöhnliche Rechnung in Millimetern 9810^{mm} ist.

Beispiele zur Theorie der Federn. 1. Zu berechnen eine einfache Dreieckfeder nach Nro. II. für eine Last $P = 50^k$ und eine Federung $f = 20^{mm}$. Wir wählen als Material Gussstahl mit $E = 30000$ und setzen $\mathcal{S} = 40^k$; nehmen hierauf die Länge l der Feder zu 400^{mm} an, und haben nun nach Spalte 6: $\frac{20}{400} = \frac{40}{30000} \cdot \frac{400}{h}$, woraus $h = \frac{40 \cdot 400 \cdot 400}{20 \cdot 30000} = 10\frac{2}{3}^{mm}$. Nun wird nach Spalte 4: $50 = \frac{40}{6} \frac{b \cdot 32^2}{400 \cdot 3^2}$, oder $b = 26,36^{mm} \sim 26,5^{mm}$. Das Volumen V wird $= \frac{bhl}{2} = \frac{26,5 \cdot 32 \cdot 400}{3 \cdot 2} = 56533$ Kbmm.

2. Beispiel. Machen wir unter Beibehaltung des Materials $l = 300$, so wird $h = \frac{40 \cdot 300 \cdot 300}{20 \cdot 30000} = 6^{mm}$, $b = \frac{6 \cdot 300 \cdot 50}{40 \cdot 36} = 62,5^{mm}$; das Volumen also: $V = \frac{bhl}{2} = \frac{62,5 \cdot 6 \cdot 300}{2} = 56250$ Kbmm, d. i. abgesehen von dem durch die Abrundungen entstandenen Unterschiede, soviel wie vorher, wie es der Bemerkung zu Formel (26) entspricht.

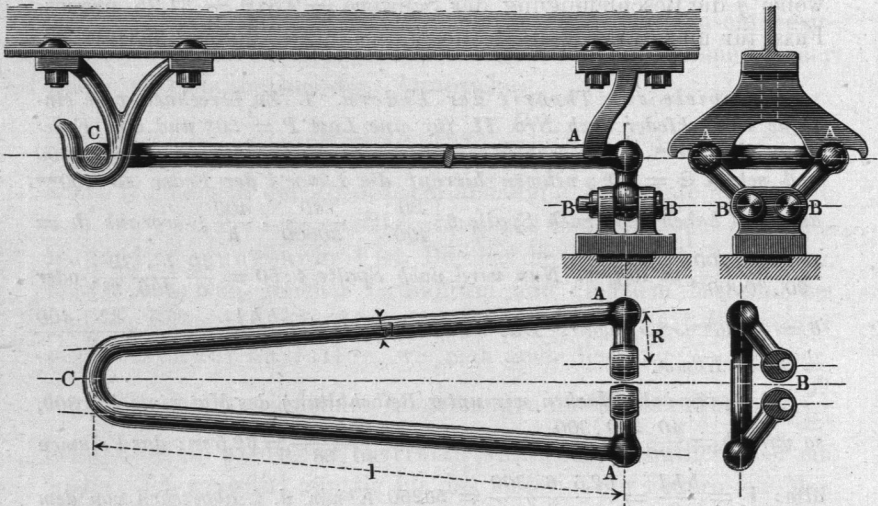
3. Beispiel. Die vorige Feder sei durch eine cylindrische Schraubenfeder nach Nro. IX., die aus demselben Gussstahl gemacht werden soll, zu ersetzen. Da dieselbe eine Torsionsfeder ist, so haben wir für gleiche Sicherheit statt $\mathcal{S} = 40$ dessen $\frac{4}{5}$ fachen Werth 32 einzusetzen; wählen wir nun die Drahtdicke $d = 6^{mm}$, so kommt nach Spalte 4, Nro. IX.: $50 = \frac{32}{16} \pi \frac{6^3}{R}$, woraus $R = \frac{\pi \cdot 216}{25} = 27,14 \sim 27^{mm}$ folgt. Nach Spalte 6 ist nun zu nehmen die Drahtlänge $l = \frac{6 \cdot 20 \cdot 0,4 \cdot 30000}{32 \cdot 2 \cdot 27} = \frac{10000}{12} = 833,3$. Dies liefert eine Gewindefzahl $i = \frac{l}{2\pi R} = \frac{833,3}{2 \cdot \pi \cdot 27} = 4,91 \sim 5$. Wollte man mehr Windungen erhalten, so müsste man d kleiner angenommen haben. Das Volumen V_1 der Feder wird: $V_1 = l \cdot \frac{\pi}{4}$

*) Siehe u. a. Eisenlohr's Physik, 6. Aufl. Stuttgart 1857, S. 57.

$d^2 = 833,3 \frac{\pi}{4} 36 = 23562 \text{ Kcmm}$. Dieses Volumen mit dem oben gefundenen verglichen, liefert $\frac{V_1}{V} = \frac{23562}{56250} = \frac{5}{11,99}$, also sehr nahe $\frac{5}{12}$, wie nach Spalte 7, Nro. IX. kommen musste.

4. Beispiel. In der neuesten Zeit hat man bei uns angefangen, die Torsionsfeder in der in Fig. 9 dargestellten Form als Eisenbahnwagen-

Fig. 9.



feder einzuführen. Die Konstruktion rührt von dem Amerikaner Dudley her*). Die haarnadelförmig gebogene Feder hat zwei zylindrische Schenkel AB , welche mittelst Bolzen in ein, die Achsbüchse belastendes Stück eingehängt sind; bei A werden die Rundstäbe durch einen am Längsträger des Wagens befestigten Sattel, welcher ihnen in der Querrichtung das erforderliche Spiel gestattet, niedergedrückt; der Haken bei C dient zum Tragen der Feder. Berechnen wir die Materialspannung \mathcal{E} , welche unter folgenden Voraussetzungen in den Federschenkeln AC entsteht. Dicke $d = 29\text{mm}$; der Hebelarm R , der gleich der Horizontalprojektion des Hebelarmes AB ist, betrage 100mm ; mittlere Belastung der ganzen Feder = ein Viertel von der Wagen-Tragkraft $200 \text{ Ztr.} +$ ein Viertel des Wagenkastengewichtes $\sim 160 \text{ Ztr.}$, zusammen 90 Ztr. ; demnach Belastung P des einzelnen Armes $AB = 0,5 \cdot 90 \cdot 50^k = 2250^k$.

Hiernach berechnet sich gemäss der obigen Tabelle, VII., Sp. 4: $\mathcal{E} =$

*) Die Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure 1875, S. 155 nennt als Erfinder wohl irrtümlich den Ober-Lokomotivführer Wendt.

$\frac{16 P R}{\pi d^3} = \frac{16}{\pi} \frac{2250 \cdot 100}{29^3} = 46,9 \sim 47^k$. Die angeführte Quelle gibt an, dass nur Sheffield-Stahl sich für Federn der vorliegenden Art bewährt habe. Der Elastizitätsmodul für dieses Material wird ungemein klein (also für die Verwendung zu Federn günstig) angegeben; er soll nur 17000^k betragen, wonach der Drehungsmodul $G = 6800^k$ zu setzen wäre*). Wir können hiernach die Einsenkung f aus Nr. VII., Spalte 6, annähernd ermitteln. Dieselbe würde betragen, da die Länge l mit 850^{mm} eingeführt werden kann: $f = \frac{100 \cdot 2 \cdot 47 \cdot 850}{6800 \cdot 29} \sim 40,5^{\text{mm}}$. Die oben im Maassstab von $\frac{1}{12}$ dargestellte Feder wiegt nur 11^k, d. i. $11 : 2 \cdot 2250 \sim \frac{1}{410}$ ihrer Bruttotragkraft oder $11 : 50 \cdot 50 \sim \frac{1}{227}$ ihrer Taratragkraft. Eine ihr gleichwerthige zweiarmige Blattfeder nach III., Spalte 2, unserer Tabelle soll etwa 45^k wiegen, wobei, wie vorhin, keiner der Beschlagtheile mitgerechnet ist. Diese Blattfeder wiegt demnach über 4 mal soviel als die Torsionsfeder, nämlich $45 : 2 \cdot 2250 \sim \frac{1}{100}$ ihrer Brutto-, oder $45 : 50 \cdot 50 \sim \frac{1}{56}$ ihrer Taratragkraft.

Schon im Jahre 1857 machte ich**) dringend auf die Materialersparnis aufmerksam, welche die Anwendung der Torsionsfedern statt der Blattfedern für den Eisenbahnwagenbau mit sich bringen würde. Die Langsamkeit, mit der sich diese Einsicht in der Praxis Bahn bricht, ist wohl einestheils in der überraschenden Grösse des Unterschiedes, andererseits in der Schwierigkeit, Rundstahlfedern gut zu härten, begründet. Das letztere Hinderniss scheint bei der Dudley-Feder völlig überwunden zu sein. Dies vorausgesetzt, würde sich nach wie vor die ganz schlichte Schraubfeder nach Nro. IX. (auf Verkürzung, statt auf Verlängerung beansprucht) wohl noch besser empfehlen, als die Haarnadelfeder, da sie sehr bequem in die Achslagergabel eingesetzt werden könnte und keinerlei besondere Formgebung ähnlich derjenigen der Knöpfchen bei A und der Gelenke bei B Fig. 9 erfordern würde.

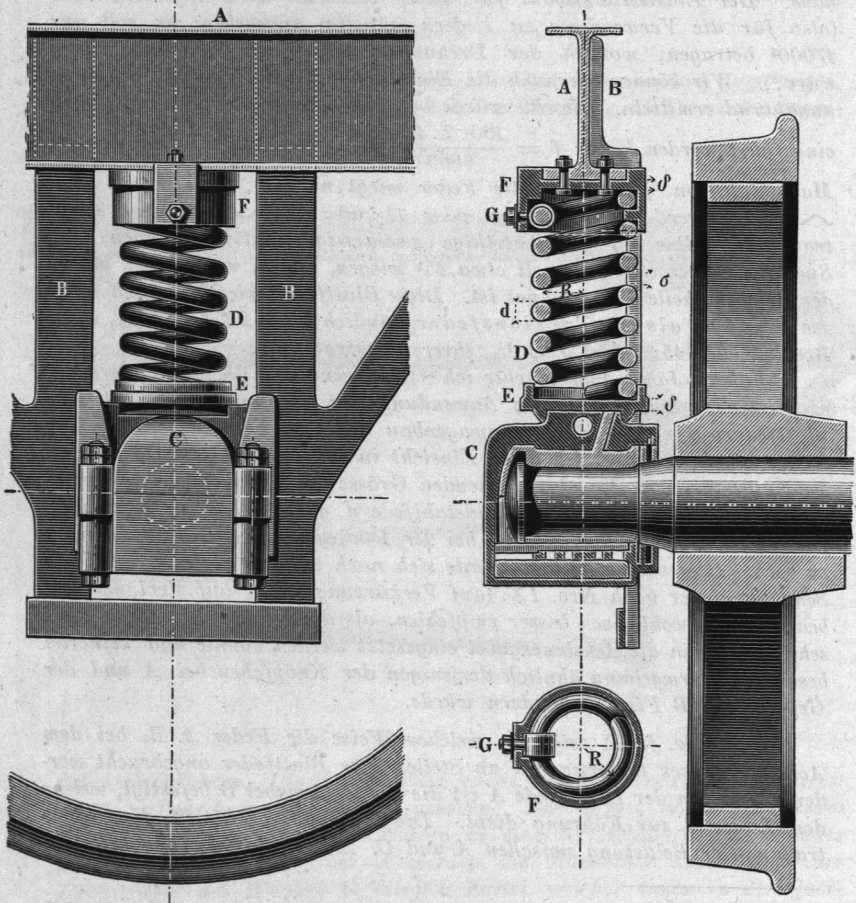
Fig. 10 (a. f. S.) zeigt, in welcher Weise die Feder z. B. bei dem Achslager eines Güterwagens an Stelle einer Blattfeder angebracht werden kann. An der Langwiede A ist die Achslagergabel B befestigt, welche dem Lager C zur Führung dient. Die Feder D vermittelt die Uebertragung der Belastung zwischen A und C. Sie ist einfach in Schraubens-

*) Eine 15^{mm} dicke Dudley-Feder amerikanischen Ursprungs, welche der Modellsammlung der Königl. Gewerbe-Akademie angehört, zeigt einen Elastizitätsmodul von fast genau 20000^k.

**) Konstr. u. Ber. d. Federarten, S. 72. Es sei hier hervorgehoben, dass ich in dieser kleinen Schrift das theoretische Verhältniss zwischen dem Gewichte der Torsionsfedern VII. und IX. und dem der gleichschweren Dreieckfeder Nr. II. und III. zu $\frac{4}{15}$ statt zu $\frac{5}{12}$ wie hier angegeben habe. Die neuere Zahl ist die bessere, indem sie den Unterschied zwischen Schub- und Zugfestigkeit festhält, wonach erstere nur 0,8 mal so grosse Spannungen gestattet, als letztere. Das Gewichtsverhältniss wird deshalb $(\frac{5}{4})^2 \times \frac{4}{15} = \frac{5}{12}$. Die Praxis zeigt immer noch weit günstigere Verhältnisse, da bei den Biegungsfedern die Nebentheile (Federkapsel etc.) noch so bedeutend ins Gewicht fallen.

form gewunden; doch ist ihr unteres Ende auf etwa $\frac{3}{4}$ Windungen drehrund abgebogen, um mit dem so erhaltenen ebenen Abschluss in das Unterlags-

Fig. 10.



stück E eingesetzt werden zu können. Oben geht die Feder um $1\frac{1}{2}$ Windungen in die mit eingegossenem Muttergewinde versehene Kappe F hinein, welche an die Langwiede angeschraubt ist. Beim Einsetzen der Feder wird diese so weit in die Kappe hineingedreht, als es sich wegen des Justirens erforderlich zeigt; darauf klemmt man sie mittelst der Schraube G fest. Verliert die Feder nach längerem Gebrauch an Elastizität, so wird sie gelöst und durch Herausschrauben neu justirt.

Da die Berechnung einer solchen Schraubensfeder nicht ganz einfach ist, sei hier ein Zahlenbeispiel eingefügt. Vierrädriger Güterwagen von 100 Ztr. Eigengewicht, 200 Ztr. Belastung. Auf die einzelne Feder kommt die Last $P=75$ Ztr. oder 3750k; gefordert werde, dass bei dieser

Belastung die Einsenkung $f = 45\text{mm}$ werde. Dabei soll die Materialspannung \mathfrak{S} wie oben $= 47^k$ werden, auch wieder $G = 6800$ vorausgesetzt sein. Da es erwünscht ist, eine runde Zahl für die Drahtdicke d zu erhalten, auch bei verschiedenen Drahtdicken die Gesamtabmessungen verschieden ausfallen, nehmen wir vor der Hand die Drahtdicke an und berechnen für mehrere Werthe derselben den Windungshalbmesser R aus der Formel zu Fall IX., vierte Spalte, S. 64, wonach $R = \mathfrak{S} \frac{\pi d^3}{16 P}$. Wir wählen nacheinander:

$$d = 26, 27, 28, 29\text{mm.}$$

Für dieselben Werthe ermitteln wir sodann die Anzahl n der Windungen, welche die Feder erhalten muss, damit bei $P = 3750^k$ der Werth $f = 45\text{mm}$ ausfalle. Für n aber haben wir annähernd: $2 \pi R n =$ der Drahtlänge l , oder, gemäss der Formel bei IX., S. 65, zweite Spalte: $f = 2 \frac{\mathfrak{S}}{G} \frac{2 \pi R^2 n}{d}$, woraus $n = \frac{f G}{4 \pi \mathfrak{S}} \cdot \frac{d}{R^2}$. Der Abstand der Kappe F von der Sohlplatte E müsste nun mindestens $= n d + f$ sein; indessen müssen wir bei zusammengepresster Feder noch zwischen den Gängen einen gewissen Spielraum σ bestehen lassen, damit die Feder noch frei schwingen kann. Es sei $\sigma = 8\text{mm}$. Darauf können wir die Steigung s der Schraubengänge der unbelasteten Feder ermitteln. Dieselbe beträgt:

$$s = \frac{n d + f + n \sigma}{n}$$

Die Gesamthöhe der unbelasteten Feder, wie sie aus der Werkstätte kommt, ist nun aber noch um $1,5 s + d$ grösser als $n s$, weil oben die Feder um $1\frac{1}{2}$ Windungen in die Kappe F hineinreichen soll, und weil unten und oben je $\frac{1}{2}$ Drahtdicke hinzukommt. Zählen wir hierzu endlich noch die Bodenstärke δ der Kappe F und die der Sohlplatte E , die wir jede mit 13mm ($\frac{1}{2}$ Zoll) einführen können, so erhalten wir die Höhe des ganzen Federwerkes. Dieselbe darf nicht grösser ausfallen, als der zwischen der Langwiede A und dem Lager C verfügbar bleibende grösste Abstand. Dieses Maass beträgt bei der, der obigen Figur zu Grunde gelegten Zeichnung 350mm . Man erhält nun aus den angedeuteten Rechnungen die folgenden Zahlenergebnisse.

$d =$	26	27	28	29
$R =$	43,30	48,40	54,10	60,03
\sim	43,00	48,00	54,00	60,00
$n =$	7,27	6,63	4,97	4,17
$n d =$	189,02	176,01	139,16	120,93
$n \sigma =$	58,16	53,04	39,76	33,36
$f =$	45,00	45,00	45,00	45,00
$n(d + \sigma) + f =$	292,28	277,05	223,92	199,29
$s =$	40,20	41,79	45,05	47,78
\sim	40,00	42,00	45,00	48,00
$1,5 s =$	60,00	63,00	67,50	72,00
$2 \delta =$	26,00	26,00	26,00	26,00
Gesamthöhe $=$	404,28	393,05	344,42	326,29
\sim	404,00	393,00	344,00	326,00

Die beiden ersten der Schlusswerthe sind zu gross, die beiden letzten dagegen brauchbar, da sie kleiner als der verfügbare Werth 350mm sind. Man kann daher nehmen:

$$d = 28\text{mm mit } s = 45\text{mm}$$

$$\text{oder } d = 29\text{mm mit } s = 48\text{mm.}$$

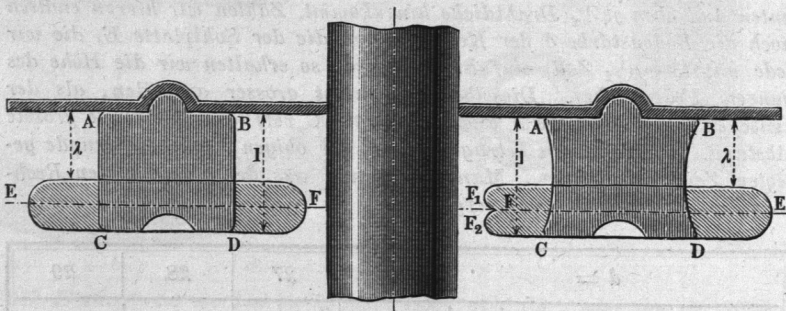
Die Einfachheit der Konstruktion ist augenfällig, die Kostenersparniss, welche sie erzielen würde, sehr bedeutend. Für Personenwagen, welche weit nachgiebigere Federn verlangen — man findet meistens jetzt f zwischen 150 und 170mm — wird man meist genöthigt sein, jedes Federwerk in drei Federn aufzulösen, womit indessen keine Schwierigkeiten verknüpft sein würden.

Der vulkanisirte oder geschwefelte Kautschuck, neuerdings auch Vulkanit genannt, wird als Federmaterial namentlich für die Buffer der Eisenbahnfahrzeuge, Prellklötze der Hämmer u. s. w. vielfach benutzt, und zwar meistens in der Form von übereinander geschichteten Ringen, die durch Eisenplatten getrennt sind. Das Verhalten des Federharzes bei Formänderungen ist experimentell noch nicht vollständig erforscht, indessen können für einen beschränkten Umfang, insbesondere für die genannten ringförmigen Bufferfedern nachstehende Angaben *) zum Anhalt dienen.

Als die gebräuchlichsten Querschnitte der Bufferringe können die in den Figuren 11 und 12 dargestellten betrachtet werden; sie haben an der einen Stirnfläche einen ringförmigen Wulst, an

Fig. 11.

Fig. 12.



der anderen eine entsprechende Kehle, in welche die Zwischenplatte eingreift, um Querverschiebungen in der Bufferbüchse zu verhindern. Ueber das Verhalten solcher und ähnlich geformter Ringe gegen Zusammendrückung in der Richtung der Achse haben Versuche Folgendes ergeben.

*) Für dieselben haben sehr schätzbare Versuche des Ober-Ingenieurs Werder der Fabrik von Klett u. Co. in Nürnberg die Zahlgrundlagen geliefert.

Beim Zusammenpressen bleibt das Volumen des Ringes ungeändert; der Peripheriequerschnitt desselben wird zwar etwas kleiner, dafür aber der Durchmesser entsprechend grösser; der Umfang des Peripheriequerschnittes nimmt dabei zu. Die stärkst gespannten Fasern liegen auf dem äusseren Rande des Wulstes bei E , und sind auf Zugfestigkeit beansprucht, indem nämlich daselbst bei Ueberschreitung der Elastizitätsgrenze Risse entstehen.

Die Elastizitätsgrenze wird ungefähr erreicht bei einer Belastung des ursprünglichen, normal zur Achse gemessenen Querschnittes mit $\frac{1}{2}$ Kil. pro \square^{mm} , so dass also der Tragmodul T mit der Grösse $0,5^k$ einzuführen wäre, wenn man die Rechnung so anstellt, als fände eine gewöhnliche Belastung auf Druckfestigkeit statt. Dieser fingirte Tragmodul ist etwas weniges höher (bis zu $0,55^k$) bei den spezifisch leichtesten, etwas weniges niedriger (bis zu $0,45^k$) bei den spezifisch schwereren Kautschucksorten. Das spezifische Gewicht γ des Stoffes, welches je nach der Schwefelbeimengung sich ändert, ist bei den leichten Sorten = 1, bei den schweren 1,15 bis 1,32.

Bei Erreichung der Elastizitätsgrenze hat der mittelste, nach EF geführte Ringquerschnitt ungefähr das Doppelte der ursprünglichen Grösse angenommen; der Umfang des Peripheriequerschnittes ist dabei ungefähr $\frac{4}{3}$ mal so gross geworden, als der ursprüngliche Umfang $ABCD$.

Die Zusammenpressung findet innerhalb der Elastizitätsgrenze nach einem von der Güte des Kautschucks abhängigen Gesetze statt, welches sich für das metrische Maasssystem annähernd durch die empirische Formel

$$\lambda = \frac{l}{\gamma} \sqrt{\frac{P}{q}} \dots \dots \dots (40)$$

ausdrücken lässt, in welcher bedeutet: λ die durch die zusammenpressende Kraft P entstehende Verkürzung der ursprünglichen Ringdicke l , q den ursprünglichen Querschnitt des Ringes in einer zur Achse normalen Ebene, γ das spezifische Gewicht des Materials.

Beispiel. Ein nach Fig. 11 gestalteter Bufferring habe 142mm äusseren, 74mm inneren Durchmesser, was einer Grundfläche oder einem Querschnitt $q = 11536 \square^{mm}$ entspricht, dabei die Ringdicke $l = 35^{mm}$, und das spezifische Gewicht $\gamma = 1$. Er werde mit 2500^k zusammengepresst. Dann ist seine Belastung pro Flächeneinheit des ursprünglichen Querschnittes:

$$\frac{P}{q} = \frac{2500}{11536} = 0,217^k, \text{ liegt also unterhalb der Elastizitätsgrenze.}$$

Nach (40) würde nun die Zusammenpressung betragen $\lambda = 35 \sqrt{0,217} = 35 \cdot 0,466 = 16,31^{mm}$. Versuche ergaben für denselben Ring $\lambda = 16,75^{mm}$.

Mehrere grössere Versuchsreihen über die Widerstandsfähigkeit des Kautschucks hat der belgische Ingenieur Stévant ausgeführt*). Sowohl die Zug- als die Druckversuche bestätigen die oben angeführte Beobachtung, dass der Kautschuck bei den Beanspruchungen sein Volum kaum ändert, also nahezu unzusammendrückbar ist, ähnlich dem Wasser. Die Zugversuche ergaben einen Elastizitätsmodul von $0,084^k$. Aus den Druckversuchen, welche ebenfalls an Bufferringen angestellt wurden, leitet Stévant eine von der obigen abweichende Formel ab. Dieselbe lautet:

$$\frac{l}{l - \lambda} = \sqrt{aP + 1}$$

a bezeichnet wieder einen Koeffizienten, der nach Stévant für jeden einzelnen Ring einen andern Werth haben kann (Beispiele: $a = 0,96, 1,15, 1,50$). Die Formel gibt die von Stévant vorgelegten Versuchsergebnisse sehr genau wieder.

Bei den Eisenbahnbuffern wendet man 4 bis 7 Ringe von ungefähr solchen Dimensionen, wie sie in dem obigen Beispiel benutzt wurden, an. Die Gesamteinpressung ist dabei, wie leicht einzusehen, gleich derjenigen des einzelnen Ringes multipliziert mit der Ringzahl.

Beim praktischen Gebrauch der Kautschuckbuffer findet man häufig, dass der Stoff sehr rasch an Federkraft verliert, und endlich in eine brüchige harte Masse übergeht. Aus dem Erfolg neuerer sorgfältiger Konstruktionen ist aber zu schliessen, dass dieser Uebelstand vorzugsweise nur dann eintritt, wenn die Ringe beim Spiel gleitender Reibung ausgesetzt sind. Um solche zu verhüten, müssen die Zwischenscheiben nach innen und aussen so weit über den Federring vorgebaut werden, dass derselbe bei seiner Breitquetschung nie weder die Mittelstange, noch auch die äussere Büchse berühren kann. Buffer, welche mit Beobachtung dieser Vorsicht gebaut sind, sollen eine vollkommen befriedigende Dauerhaftigkeit zeigen.

Es empfiehlt sich, die Form der Ringe so zu wählen, dass die Bildung von Falten in der Ringoberfläche verhütet wird, indem die derselben ausgesetzte Ringstelle sich rasch abnutzt. Die Faltenbildung entsteht aber leicht bei Ringen von der Querschnittform Fig. 12, wie auch in dieser Figur bei $F_1 F_2$ angedeutet ist. Die Ringe von rechteckigem Querschnitte, wie Fig. 11, zeigen den Uebelstand nicht, und sind deshalb den ausgekehlten vorzuziehen.

*) Siehe De Cuyper, Revue universelle Bd. XXX, S. 401. Bd. XXVIII, S. 424.