# III. Höhenmessung.

## §. 18. Theorie.

Der Herr Geheime Rath *Bessel* hat (Gradmessung in Ostpreufsen Seite 193) bereits die nothwendigen Formeln zur Berechnung eines trigonometrischen Nivellements gegeben; es würde daher streng genommen hier nur nöthig sein darauf hinzuweisen. Da es aber manchem Leser angenehm sein dürfte, hier alles beisammen zu finden, so wird es nicht unzweckmäfsig erscheinen, wenn ich die dort gegebenen Ausdrücke hier wiederhole, und in Bezug auf praktische Anwendung möglichst zu erweitern suche.

Bezeichnet man die Höhen zweier Punkte $A$ und $B$ über der Meeresfläche durch $h$ und $h'$ (Fig I.); ihre gegenseitigen Zenithdistancen durch $z$ und $z'$; die Strahlenbrechung in $A$ durch $\Delta z$, die in $B$ durch $\Delta z'$, so ist die Zenithdistance der $A$ mit $B$ verbindenden geraden Linie in $A = z + \Delta z$; die Zenithdistance derselben Linie in $B = z' + \Delta z'$. Nennt man ferner den Winkel, den die beiden durch $A$ und $B$ gehenden Lothlinien an ihrem Durchschnittspunkt*) mit einander machen $C$, und den Krümmungsradius $r$, so hat man in dem ebenen Dreieck $ABC$ die drei Winkel

$$\begin{aligned} ABC &= 180^0 - z' - \Delta z' \\ BAC &= 180 \phantom{^0} - z - \Delta z \\ BCA &= C \end{aligned}$$

$$\text{ihre Summe } 180^0 = 360^0 + C - (z' + \Delta z' + z + \Delta z)$$

$$\text{oder } z' + \Delta z' + z + \Delta z = 180^0 + C \; \ldots\ldots\ldots \; 1.$$

*) Obgleich ein Durchschnitt zweier Lothlinien auf dem Erdellipsoid in aller Strenge nur bedingungsweise stattfindet, so wird doch mit Rücksicht darauf, dafs die Breitendifferenz zweier von einander sichtbaren Punkte nicht grofs sein kann, der Fehler unberücksichtiget bleiben können. Dies wird anschaulich, wenn man sich die beiden Punkte auf einer Kugelfläche denkt, deren Radius dem mittleren Krümmungsradius der, beide Punkte verbindenden Linie gleich ist.

Setzt man $\Delta z' + \Delta z = kC$, so nennt *Gaufs* den Werth von $k$ den Coefficienten der Strahlenbrechung (die französischen Gelehrten verstehen in der Regel unter diesem Coefficienten $\frac{1}{2}k$), welcher in den Winkel am Centrum multiplicirt, die Summe der Brechungswinkel an den Endpunkten der Linie $AB$ angiebt. Führt man $kC$ in die Gleichung 1. ein, so folgt

$$z' + z - 180 = (1 - k)C$$

Wenn nun $C$ einen kleinen Winkel und $s$ dessen Bogen bedeutet, so ist $C = \frac{s\omega}{r}$, wobei $\omega = 206264{,}''8$ ist, und man erhält

$$(z' + z - 180)\frac{r}{s\omega} = 1 - k \;.\;.\;.\;.\;.\; 2.$$

Diese Gleichung giebt den Coefficienten der Strahlenbrechung aus der Entfernung und den gegenseitig gleichzeitig beobachteten Zenithdistancen, und mithin auch die Summe der beiden Brechungswinkel.

Wenn $\varrho$ und $\varrho'$ die Krümmungshalbmesser im Meridian und senkrecht darauf bezeichnen, so ist

$$\frac{\omega}{\varrho} = \frac{\omega\sqrt{(1 - ee\,\mathrm{Sin}\,\varphi^2)^3}}{a(1 - ee)}$$

$$\frac{\omega}{\varrho'} = \frac{\omega\sqrt{(1 - ee\,\mathrm{Sin}\,\varphi^2)}}{a}$$

wo $\varphi$ die Polhöhe des Punktes für welchen die Krümmungshalbmesser gesucht werden, $a$ die grofse Axe und $e$ die Excentricität der Erde bedeuten. Ferner ist für ein Azimuth $\alpha$

$$\frac{\omega}{r} = \frac{\omega}{\varrho}\,\mathrm{Cos}\,\alpha^2 + \frac{\omega}{\varrho'}\,\mathrm{Sin}\,\alpha^2$$

Den mittleren Krümmungsradius einer Linie erhält man, wenn man die Polhöhe und das Azimuth ihrer Mitte anwendet.

Die beiden Seiten des Dreiecks $r + h$ und $r + h'$ nebst dem eingeschlossenen Winkel $C$ geben ferner

$$2r + h' + h : h' - h = \mathrm{Cotg}\,\tfrac{1}{2}C : \mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}(z' + \Delta z' - z - \Delta z)$$

denn es ist

$$\tfrac{1}{2}(BAC - ABC) = \tfrac{1}{2}(z' + \Delta z' - z - \Delta z)$$

daher

$$h' - h = \left(1 + \frac{h' + h}{2r}\right) 2r\,\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}C\,\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}(z' + \Delta z' - z - \Delta z) \;.\;.\;.\;.\; 3.$$

Setzt man in diese Gleichung successive die Werthe von $z' + \Delta z'$, und $-z - \Delta z$, wie sie sich aus Gleichung 1. ergeben, so erhält man, weil sowohl tang$(90 + \alpha)$ als auch tang$(\alpha - 90) = -$cotg $\alpha$ ist:

$$h' - h = \left(1 + \frac{h' + h}{2r}\right) 2r \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}C \operatorname{cotg}(z + \Delta z - \tfrac{1}{2}C) \;\ldots\; 4.$$

$$h - h' = \left(1 + \frac{h' + h}{2r}\right) 2r \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}C \operatorname{cotg}(z' + \Delta z' - \tfrac{1}{2}C) \;\ldots\; 5.$$

Aus diesen beiden Gleichungen kann die Brechung des Strahls an jedem Endpunkt, oder jeder der beiden Werthe $\Delta z$ und $\Delta z'$ für sich bestimmt werden, sobald die Höhen beider Punkte, ihre Entfernung und die gleichzeitig gegenseitig gemessenen Zenithdistancen bekannt sind. Punkte in der Nähe der Meeresküste, deren Höhen vom Strande aus unabhängig von einander abnivellirt werden können, eignen sich zur Lösung dieser Aufgabe. Aus Gleichung 3. kann in diesem Fall auch die Differenz der Brechungen oder $\Delta z' - \Delta z$ gefunden werden, deren Summe schon durch die Gleichung 1. oder 2. gegeben ist.

Alle bisherigen Bestimmungen haben sich lediglich auf den Coefficienten $k$ beschränkt: so lange daher nichts Näheres über die Werthe von $\Delta z'$ nnd $\Delta z$ bekannt ist, wird man beide einander gleich annehmen müssen; das heifst: man setzt alsdann voraus, dafs die Curve des Lichtstrahls an beiden Enden, mit der Sehne gleiche Winkel mache, welches streng genommen nur dann stattfinden kann, wenn die Dichtigkeiten der Luft an beiden Endpunkten gleich sind. Diese Voraussetzung wird der Wahrheit desto näher kommen je geringer die Höhenunterschiede sind. Man erhält also hiernach:

$$\Delta z' = \Delta z = \frac{k}{2} C$$

Setzt man diesen Werth in die obigen Gleichungen 3. und 4. und überlegt, dafs, wenn $h$ und $h'$ nicht sehr beträchtliche Höhen sind, der erste Faktor mit 1, und $2r$ tang $\frac{1}{2}C$ mit der Entfernung $s$ verwechselt werden können, so gehen diese Gleichungen über in

$$h' - h = s \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(z' - z) \;\ldots\; 6.$$

$$h' - h = s \operatorname{cotg}\left(z - \frac{1-k}{2} C\right)$$

oder wenn man den Winkel $C$ durch den Bogen, oder die Entfernung $s$, ausdrückt

$$h' - h = s \operatorname{cotg}\left(z - \frac{s\,\omega}{2r}(1 - k)\right) \;\ldots\; 7.$$

Wird nun $z = 90 - e$ gesetzt, wo $e$ die Elevation oder Depression bedeutet, dann wird

$$h' - h = s \operatorname{tang}\left(e + \frac{s\omega}{2r}(1-k)\right)$$

und wenn man die Tangente mit dem Bogen vertauscht

$$h' - h = \frac{se}{\omega} + \frac{s^2(1-k)}{2r} \; \ldots \; 8.$$

Die Gleichung 6. giebt den Höhenunterschied aus gleichzeitigen gegenseitigen Zenithdistancen unabhängig von der Strahlenbrechung. Wendet man diese Gleichung auf bloſs gegenseitige, aber nicht gleichzeitige Zenithdistancen an, so wird vorausgesetzt, daſs die Strahlenbrechung zu den verschiedenen Beobachtungszeiten gleich gewesen sei.

Die Gleichungen 7. und 8. geben den Höhenunterschied aus einseitigen Zenithdistancen, unter Voraussetzung eines bekannten Werthes der Strahlenbrechung. Die Gleichung 8. zeigt auſserdem, daſs die Elevation in einem einfachen, die Strahlenbrechung aber in einem quadratischen Verhältniſs zur Entfernung steht; woraus hervorgeht, daſs jede Änderung der Strahlenbrechung, in der doppelten Entfernung, eine vierfache Höhenänderung zur Folge hat. Hierdurch wird die Erscheinung erklärt, daſs bei wachsender Strahlenbrechung ferne, vorher unsichtbare Höhen oder Gegenstände, hinter näheren zum Vorschein kommen; und daſs umgekehrt, bei abnehmender Strahlenbrechung, ferne, vorher sichtbare Punkte, hinter näheren verschwinden. Ein 10 Meilen entfernter Gegenstand ändert in der Regel, durch die Variation der Strahlenbrechung, seine scheinbare Höhe an einem Tage um mehr als 100 Fuſs.

Ist in einem Punkte $A$ die Zenithdistance des Meereshorizontes beobachtet worden, dann wird die Linie $AB$ eine Tangente und daher $h' = 0$, $z' = 90^0$. Mit diesen Werthen erhält man

aus Gleichung 2. $1 - k = \frac{r}{s\omega}(z - 90) \; \ldots \ldots \ldots \; 9.$

aus Gleichung 7. $-h = s \operatorname{cotg}\left(z - \frac{s\omega}{2r}(1-k)\right) \; \ldots \; 10.$

Wird nun der Werth von $z$ aus Gleichung 9. in die Gleichung 10. gesetzt dann ist

$$-h = s \operatorname{cotg}\left(\frac{s\omega}{2r}(1-k) + 90\right) = -s \operatorname{tang}\frac{s\omega}{2r}(1-k)$$

oder

oder wenn man die Tangente mit dem Bogen vertauscht

$$h = s^2\left(\frac{1-k}{2r}\right) \;\ldots\ldots 11.$$

Setzt man den Werth von $1-k$ aus Gleichung 9. in die Gleichung 10. dann wird

$$-h = s \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}(z+90) = s \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(90-z)$$

oder da $z > 90^0$ und tang $\frac{1}{2}$ $(90-z)$ negativ ist, ohne Rücksicht auf die Zeichen

$$h = s \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(z-90)$$

und für $s$ den Werth aus Gleichung 11. gesetzt, giebt

$$h = \frac{2r}{1-k}\operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}(z+90)^2 = \frac{2r}{1-k}\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(z-90^0)^2 = \frac{r}{2(1-k)}\left(\frac{z-90^0}{\omega}\right)^2 \;\ldots\ldots 12.$$

Für $z = 90 - e$ wird

$$h = \frac{2r}{1-k}\operatorname{cotg}(90-\tfrac{1}{2}e)^2 = \frac{2r}{1-k}\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}e^2 = \frac{r}{2(1-k)}\left(\frac{e}{\omega}\right)^2 \;\ldots\ldots 13.$$

Vergleicht man die Werthe von $h$ aus Gleichung 11. 12. und 13. so ergiebt sich

$$s = \frac{2r}{1-k}\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(z-90) = \frac{r}{1-k}\left(\frac{z-90}{\omega}\right) = \frac{-re}{(1-k)\,\omega} \;\ldots\ldots 14.$$

Die Gleichung 11. giebt das Maximum der Entfernung, auf welche man von einer Höhe $h$ den Meereshorizont sehen kann. Man würde diese Gleichung auch erhalten haben, wenn man die Gleichung 8. in Bezug auf $s$ differentiirt, den Differential-Quotienten gleich Null gesetzt, und den dadurch erhaltenen Werth von $e$ in der erwähnten Gleichung 8. substituirt hätte.

Die Gleichungen 12. und 13. dienen entweder zur Bestimmung der absoluten Höhe, wenn die Strahlenbrechung als bekannt angenommen wird; oder zur Bestimmung der Strahlenbrechung, wenn die Höhe anderweitig schon bekannt ist.

Die Gleichung 14. giebt wie Gleichung 11. das Maximum der Entfernung, in Bezug auf den Meereshorizont, aus der Zenithdistance und Strahlenbrechung.

---

Werden bei einem Nivellement die gegenseitigen und gleichzeitigen Zenithdistancen zwischen zwei auf einander folgenden Stationen mehrfach beobachtet, so können die wahrscheinlichen Fehler der Höhenunterschiede sowohl, wie der absoluten Höhen, auf folgende Weise bestimmt werden:

Nennt man $M$ den mittleren Werth von $\frac{1}{2}(z' - z)$ in Gleichung 6., so ist der Fehler jedes einzelnen dieser Werthe

$$v = \tfrac{1}{2}(z' - z) - M$$

Bedeutet nun $\varepsilon$ den mittleren, und $w$ den wahrscheinlichen Fehler, so hat man aus der Theorie der Methode der kleinsten Quadrate

$$1. \ldots\ldots \varepsilon\varepsilon = \frac{1}{n}(vv)$$

wo $n$ die Anzahl der Beobachtungen und $(vv)$ die Summe der Quadrate der Fehler $v$ ist.

$$2. \ldots\ldots w = \varepsilon \cdot 0{,}6745$$

Aus diesem Werth von $w$ in Secunden erhält man leicht $w_{,}$ den wahrscheinlichen Fehler des Höhenunterschiedes zweier Stationen, in dem Maſs der Entfernung $s$; denn es ist, wenn $\frac{z' - z}{2} = Z$ gesetzt wird, nach Gleichung 6.

$$d\,h = \frac{s \cdot dZ}{\operatorname{Cos} Z^2}$$

Da aber $Z$ stets ein sehr kleiner Winkel ist, so kann $\operatorname{Cos} Z = 1$ angenommen werden. Wird $dZ = w$, dann wird $d\,h = w_{,}$, und man erhält den wahrscheinlichen Fehler des Höhenunterschiedes zweier Stationen

$$w_{,} = \frac{s\,w}{\omega}$$

Sind nun $w_{,}$, $w_{,,}$ ..... die wahrscheinlichen Fehler der Höhenunterschiede der einzelnen Stationen, so ist der wahrscheinliche Fehler der absoluten Höhe jeder Station

$$W = \sqrt{(w_{,}w_{,} + w_{,,}w_{,,} + \cdots)}$$

---

## *Aufgaben.*

1. Aus Gleichung 11. erhält man, wie schon oben erwähnt wurde, die Entfernung, wie weit man von einer gegebenen Höhe bei einer bekannten Strahlenbrechung ins Meer hinaussehen kann. Eben so leicht läſst sich auch die Aufgabe lösen: wie weit zwei gegebene Höhen $h$ und $h'$ von einander gesehen werden können, wenn kein anderes Hinderniſs als das Meer dazwischen liegt.

Es seien $s$ und $s'$ die Maxima der Entfernungen welche mit den Höben $h$ und $h'$ korrespondiren; dann ist die gesuchte Entfernung $S = s + s'$ und man erhält aus Gleichung 11.

$$\text{A.} \ldots\ldots S = \sqrt{\frac{2r}{1-k}} \left\{ \sqrt{h} + \sqrt{h'} \right\}$$

und wenn man die Werthe von $s$ aus Gleichung 14. nimmt.

$$\text{B.} \ldots\ldots S = \frac{2r}{1-k} \left\{ \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(z - 90^\circ) + \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(z' - 90^\circ) \right\} = \frac{r}{(1-k)\omega} \left\{ z + z' - 180^\circ \right\}$$

$$= \frac{-r}{(1-k)\omega} \left\{ e + e' \right\}$$

Der letztere Werth wird positiv, weil sowohl $e$ als $e'$ Depressionen sein müssen.

Wenn in der Gegend des niedrigsten Punktes der Sehlinie zwischen zwei Höhen $H$ und $H'$, eine andere $h_{,}$ liegt, und man will die gegenseitige Sichtbarkeit der beiden ersten ermitteln, so darf man nur in der Gleichung A. $h = H - h_{,}$ und $h' = H' - h_{,}$ setzen, und die dadurch erhaltene Entfernung mit der wahren vergleichen.

Liegt $h_{,}$ an einer andern Stelle, z. B. von $H$ in einer Entfernung $s$, so erhält man aus Gleichung 8. die Zenithdistance $e$ der Gesichtslinie von $H$ nach $h'$; nämlich $e = \frac{\omega}{s}(h_{,} - H) - \frac{s\omega}{2r}(1-k)$

Ist nun $S$ die Entfernung zwischen $H$ und $H'$ so findet man für diese, und die eben ermittelte Zenithdistance, eine Höhe $H''$, welche über $h_{,}$ hinweg, in der Entfernung $S$ eben anfangen würde sichtbar zu werden; nämlich:

$$H'' - H = \frac{S}{s}(h_{,} - H) + (S^2 - Ss)\left(\frac{1-k}{2r}\right)$$

Ist nun $H'' < H'$ dann ist die gesuchte Sichtbarkeit vorhanden, ist aber $H'' > H'$ dann ist dieselbe unmöglich.

---

*Anmerkung.* Für das Maximum der Sichtbarkeit, wenn kein anderes Hindernifs als die Krümmung der Erde vorhanden ist, findet zwischen Entfernung und Höhe eine höchst einfache Relation statt, welche ich hier mittheile, weil sie für den praktischen Gebrauch äufserst bequem ist. Aus Gleichung 11. hat man $s^2 = \frac{2r}{1-k} h$. Für einen mittleren Krümmungshalbmesser und die *Gaufs*'sche Strahlenbrechung, d. h. $k = 0{,}1306$, geht dieser Ausdruck über in:

$$s^2 = 2743{,}5\, h \text{ in Toisen.}$$

Verwandelt man $s$ in Preufsische Meilen à 2000 Preufsische Ruthen, während $h$ in Toisen bleibt, so wird $s^2 = 0{,}5039\, h$. Setzt man diesen Coefficienten

2. Wenn von einem Punkt $A$ die Zenithdistance $z$ nach dem Meereshorizont, und die Zenithdistance $z'$ nach einem Punkt $B$ an der Küste (d. h. wo Wasser und Land sich berühren) gemessen sind, so läſst sich, wenn die Strahlenbrechung als bekannt angenommen wird, $h$ die Höhe des Punktes $A$, und $s'$ die Entfernung von $B$, bestimmen.

Für die Beobachtung des Meereshorizontes hat man aus Gleichung 12.

$$-h = -\frac{r}{2(1-k)}\left(\frac{e}{\omega}\right)^2$$

woraus $h$ gefunden werden kann.

Für den Punkt $B$ ist $h' = 0$, man erhält daher aus Gleichung 8.

$$-h = \frac{s'e'}{\omega} + s'^2\left(\frac{1-k}{2r}\right)$$

wo $e = 90 - z$ und $e' = 90 - z'$.

Setzt man nun beide Werthe von $h$ einander gleich, so folgt

$$s' = \frac{re'}{\omega(1-k)}\left\{-1+\sqrt{1-\frac{e^2}{e'^2}}\right\}$$

Ist die Höhe $h$ anderweitig schon bekannt, dann kann die Entfer-

---

$= 0{,}5$ oder was dasselbe ist, nimmt man die Strahlenbrechung $= 0{,}1237$ an, so erhält man ganz einfach:

$$2s^2 = h$$

wo die Höhe $h$ in Toisen, und die Entfernung $s$ in Preuſsischen Meilen ausgedrückt ist. Eben so hat man auch $2s'^2 = h'$ folglich

$$S = s + s' = \sqrt{\frac{h}{2}} + \sqrt{\frac{h'}{2}}$$

wo $S$ die gröſste Entfernung in Meilen ist, auf welche zwei Berge von einander gesehen werden können, deren Höhen $h$ und $h'$ in Toisen bekannt sind; z. B. von zwei Bergen, deren Höhen respektive 50 und 200 Toisen betragen, gestattet der erste eine Aussicht auf 5, der andere eine Aussicht auf 10 Meilen, beide sind also unter einander auf 15 Meilen sichtbar, wenn kein anderes Hinderniſs als das Meer dazwischen ist. Man kann auch anstatt der Preuſsischen, geographische Meilen setzen, ohne einen für praktische Zwecke erheblichen Fehler zu begehen.

Die hier vorausgesetzte Brechung fällt nach §. 32. des Vormittags zwischen 8 und 9 Uhr, und des Nachmittags zwischen 3 und 4 Uhr. Näher am Mittage wird in der Regel die Sichtbarkeit nicht statt finden, und näher am Morgen oder näher am Abend werden die Höhen über den Horizont hervortreten.

nung $s'$ unabhängig von der Strahlenbrechung gefunden werden; denn aus Gleichung 12. ergiebt sich alsdann

$$1 - k = \frac{r}{2h}\left(\frac{e}{\omega}\right)^2$$

und wenn dieser Werth von $1 - k$ in dem Ausdruck für $s'$ substituirt wird, dann erhält man

$$s' = \frac{2he'\omega}{e^2}\left\{-1 + \sqrt{1 - \frac{e^2}{e'^2}}\right\}$$

Es ist leicht einzusehen, dafs auf diese Weise so viel Entfernungen bestimmt werden können, als Zenithdistancen nach Küstenpunkten gemessen wurden. Sind gleichzeitig auch die horizontalen Richtungen dieser Punkte beobachtet worden, so erhält man die Aufnahme einer ganzen Küstenstrecke. Zu bemerken ist hierbei, dafs alle Zenithdistancen nach solchen Küstenpunkten gröfser sein müssen als die Zenithdistance des Meereshorizontes, weil man sonst nicht mehr sicher ist, ob man wirklich den Fufs der Küste gesehen hat. Es geht dies schon aus der Gleichung selbst hervor, denn sobald $e'$ kleiner wird als $e$, so wird der Ausdruck imaginair. Wird $e' = e$, so ist $s' = \frac{2h\omega}{e}$ und dies ist der entfernteste sichtbare Punkt der Küste. Man findet denselben leicht, wenn man nach vollendeter Beobachtung der Zenithdistance des Meereshorizontes, horizontal mit dem Fernrohr, bei unveränderter Höhenrichtung bis zur Küste herumgeht; vorausgesetzt, dafs nicht nähere vorspringende Landspitzen die Sichtbarkeit verhindern. Dasselbe Verfahren kann man zu der Aufnahme eines jeden mit Bergen umgebenen Landsees benutzen, nur mufs alsdann die Höhe des Standpunktes über dem Niveau des Sees bestimmt, und anstatt $h$ in der Rechnung eingeführt werden.

3. Wenn von einem Standpunkt $A$ die Zenithdistancen nach zwei andern Punkten $B$ und $C$, deren Entfernungen und Höhen bekannt sind, gemessen wurden, so läfst sich die Höhe des Punktes $A$ unabhängig von der Strahlenbrechung bestimmen, wenn diese in verschiedenen Richtungen als gleich angesehen wird.

Es seien $h'$ und $h''$ die Höhen von $B$ und $C$; $s$ und $s'$ die Entfernungen dieser Punkte von $A$, und $z$ und $z'$ ihre Zenithdistancen. Es soll daraus $h$ die Höhe von $A$ gefunden werden.

Man setze $e = 90 - z$; $e' = 90 - z'$ so erhält man aus Gleichung 8.

$$h' - h = \frac{s\,e}{\omega} + s^2 \left(\frac{1-k}{2r}\right)$$

$$h'' - h = \frac{s'\,e'}{\omega} + s'^2 \left(\frac{1-k}{2r}\right)$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt nun

$$1 - k = \frac{2r}{s^2 - s'^2} \left\{ h' - h'' - \frac{s\,e}{\omega} + \frac{s'\,e'}{\omega} \right\} \quad \text{und}$$

$$h = \frac{s'^2}{s^2 - s'^2} \left\{ \frac{s\,e}{\omega} - h' - \frac{s^2}{s'^2}\left(\frac{s'\,e'}{\omega} - h''\right) \right\}$$

Die letztere Gleichung wird gefunden, wenn man die beiden ersten addirt und darin den Werth von $1 - k$ substituirt.

4. Der vorigen ganz ähnlich ist die Aufgabe: Wenn von zwei bekannten Höhen $B$ und $C$, die Zenithdistancen nach einem dritten der Lage nach bekannten Punkte $A$ gemessen wurden, die Höhe von $A$ unabhängig von der Strahlenbrechung zu bestimmen.

Es sei die Höhe von $B = h'$; die von $C = h''$
die Entfernung $BA = s'$; $CA = s''$
die Zenithdistance von $A$ in $B = z'$; in $C = z''$
$90 - z' = e'$; $90 - z'' = e''$

Es soll daraus $k$ die Strahlenbrechung, und $h$ die Höhe von $A$ bestimmt werden.

In $B$ erhält man die Gleichung $\quad h - h' = \dfrac{s'\,e'}{\omega} + s'^2\left(\dfrac{1-k}{2r}\right)$

In $C$ . . . . . . . . . . . . . . $\quad h - h'' = \dfrac{s''\,e''}{\omega} + s''^2\left(\dfrac{1-k}{2r}\right)$

und hieraus folgt:

$$1 - k = \frac{2r}{s'^2 - s''^2} \left\{ h'' - h' - \frac{s'\,e'}{\omega} + \frac{s''\,e''}{\omega} \right\}$$

$$h = \frac{s'^2}{s'^2 - s''^2} \left\{ h'' + \frac{s''\,e''}{\omega} - \left(h' + \frac{s'\,e'}{\omega}\right) \frac{s''^2}{s'^2} \right\}$$

Hierbei wird indessen vorausgesetzt dafs die Refraktionen in $B$ und $C$ gleich gewesen sind, welches selbst bei gleichzeitigen Beobachtungen nicht immer der Fall sein dürfte.

5. Sind dagegen an den Stationen $B$ und $C$ Zenithdistancen nach mehreren der Lage nach bekannten Punkten $A, A'$ .... gemessen worden, dann können, aufser den Höhen, für je zwei dieser Punkte, die Refraktionen in $B$ und $C$ besonders bestimmt werden, und es fällt die Voraussetzung von 4. fort.

Es sei gegeben

| | In $B$ | In $C$ |
|---|---|---|
| die Höhe | ............ $h'$ ; | ............. $h''$ |
| die Entfernung | $BA$ ..... $s$ ; | $CA$ ..... $s''$ |
| | $BA'$ ..... $s'$ ; | $CA'$ ..... $s'''$ |
| gemessen | | |
| die Elevation von $A$ , | $90 - z = e$ ; | $90 - z'' = e''$ |
| — — — $A'$ , | $90 - z' = e'$ ; | $90 - z''' = e'''$ |

Es sollen bestimmt werden $h_{,}$ und $h_{,,}$ die Höhen von $A$ und $A'$, und $k$ und $k'$ die Refraktionen in $B$ und $C$.

Aus diesen Data erhält man vier Gleichungen:

In $B$:

$$h_{,} - h' = \frac{se}{\omega} + s^2\left(\frac{1-k}{2r}\right)$$

$$h_{,,} - h' = \frac{s'e'}{\omega} + s'^2\left(\frac{1-k}{2r}\right)$$

In $C$.

$$h_{,} - h'' = \frac{s''e''}{\omega} + s''^2\left(\frac{1-k'}{2r}\right)$$

$$h_{,,} - h'' = \frac{s'''e'''}{\omega} + s'''^2\left(\frac{1-k'}{2r}\right)$$

und hieraus folgt:

$$h_{,} = \frac{1}{1 - \frac{s^2 s'''^2}{s'^2 s''^2}} \left\{ h' + \frac{se}{\omega} - \left(h'' + \frac{s''e''}{\omega}\right)\frac{s^2 s'''^2}{s'^2 s''^2} + \left\{ h'' + \frac{s'''e'''}{\omega} - h' - \frac{s'e'}{\omega} \right\} \frac{s^2}{s'^2} \right\} \ldots 1.$$

$$h_{,,} = \frac{1}{1 - \frac{s^2 s'''^2}{s'^2 s''^2}} \left\{ h'' + \frac{s'''e'''}{\omega} - \left(h' + \frac{s'e'}{\omega}\right)\frac{s^2 s'''^2}{s'^2 s''^2} + \left\{ h' + \frac{se}{\omega} - h'' - \frac{s''e''}{\omega} \right\} \frac{s'''^2}{s''^2} \right\} \ldots 2.$$

$$1 - k = \frac{2r}{s^2 - s'^2} \left\{ h_{,} - h_{,,} - \frac{se}{\omega} + \frac{s'e'}{\omega} \right\} \ldots\ldots\ldots\ldots 3.$$

$$1 - k' = \frac{2r}{s''^2 - s'''^2} \left\{ h_{,} - h_{,,} - \frac{s''e''}{\omega} + \frac{s'''e'''}{\omega} \right\} \ldots\ldots\ldots 4.$$

Es ist hierbei nicht nothwendig, dafs die Beobachtungen in *B* und *C* gleichzeitig sind; sie können vielmehr zu ganz beliebigen Zeiten angestellt werden. Vorausgesetzt wird nur, dafs die Strahlenbrechung während der Beobachtungen an einem Punkt sich gleich geblieben ist. Werden die Beobachtungen aber so angeordnet, dafs sie alle auf ein mittleres Zeitmoment fallen, dann erhält man die Höhen auch dann noch richtig, wenn die Veränderungen der Refraktion den Zeiten proportional sind. *) Diese Reduction auf ein mittleres Zeitmoment findet statt, wenn man alle Objekte in gleichen Zeitintervallen zuerst, in der einen Lage des Kreises von links nach rechts, und dann in der andern Lage des Kreises von rechts nach links herum beobachtet; z. B. wenn zu einer Beobachtung 5 Minuten Zeit erforderlich sind, dann erhält man:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Für die Objekte . . . . . . . . . . | *A*, | *A'*, | *A''*, | *A'''* . . . |
| die Beobachtungszeiten mit Kreis links | $4^u 0'$ | $5'$ | $10'$ | $15'$ |
| . . . . . . . . . . . . . . mit Kreis rechts | 35 | 30 | 25 | $20'$ |

also für das mittlere Zeitmoment jeder Beobachtung $4^u$ $17'$ $30''$.

Wenn ähnliche Beobachtungen von einem zweiten Punkt nach denselben Objekten gemacht worden sind, so kann daraus der Coefficient der Strahlenbrechung so oft bestimmt werden, als die Objekte Verbindungen zu zweien zulassen. Werden diese Coefficienten von gleichen Werthen gefunden, dann geht die Strahlenbrechung der Zeit proportional, sind diese Werthe aber ungleich, dann befolgt die Strahlenbrechung ein anderes Gesetz.

6. Wenn von irgend einem Standpunkte nach einem Objekt, dessen Entfernung bekannt ist, verschiedene auf einander folgende Zenithdistancen genommen werden, so läfst sich zwar die, jeder folgenden Beobachtung zugehörige Veränderung des Coefficienten *k*, aber nicht der absolute Werth desselben bestimmen.

Es

*) Siehe Gradmessung in Ostpreufsen Seite 176.

Es seien $_0z$, $_1z$, $_2z$ ... die beobachteten Zenithdistancen,
oder $_0e$, $_1e$, $_2e$ ... die daraus hervorgehenden Elevationen,
$k$, $k + {_0\Delta k}$, $k + {_1\Delta k}$ ... die entsprechenden Coefficienten der Strahlenbrechung;

ferner sei $h$ die Höhe des Standpunktes, $s$ die Entfernung und $h'$ die Höhe des Objektes, so erhält man aus Gleichung 8.

$$h' - h = \frac{s\,_0e}{\omega} + \frac{s^2}{2r}(1-k)$$

$$h' - h = \frac{s\,_1e}{\omega} + \frac{s^2}{2r}(1-k) - \frac{s^2}{2r}\,{_0\Delta k}$$

$$h' - h = \frac{s\,_2e}{\omega} + \frac{s^2}{2r}(1-k) - \frac{s^2}{2r}\,{_1\Delta k}$$

und hieraus folgen die Veränderungen des Coefficienten der Strahlenbrechung

$${_0\Delta k} = \frac{2r}{s\,\omega}({_1e} - {_0e}) = \frac{2r}{s\,\omega}({_0z} - {_1z})$$

$${_1\Delta k} = \frac{2r}{s\,\omega}({_2e} - {_0e}) = \frac{2r}{s\,\omega}({_0z} - {_2z})$$

---

## *B e i s p i e l e.*

Es ist $\log r = 6{,}51528$ in Toisen; $\log \omega = 5{,}31443$, und $k$ der Coefficient der Strahlenbrechung wird $= 0{,}1306$ angenommen.

1. In einer Entfernung von 30000 Toisen liegen zwei Berge, von denen der erste 100, der zweite 200 Toisen hoch ist; zwischen beiden, 10000 Toisen von dem ersten entfernt, liegt eine dritte Höhe $104^T{,}54$ hoch: es soll ermittelt werden, ob die beiden ersten Berge unter einander sichtbar sind oder nicht.

$$H'' - H = \frac{S}{s}(h_, - H) + S^2\left(\frac{1-k}{2r}\right) - Ss\left(\frac{1-k}{2r}\right)$$

$$H = 100^T;\quad h_, = 104{,}54;\quad S = 30000^T;\quad s = 10000^T.$$

| | | |
|---|---|---|
| $\log(h_, - H) = 0{,}65706$ | $\log S^2 = 8{,}95424$ | $\log Ss = 8{,}47712_n$ |
| $\log \frac{S}{s} = 0{,}47712$ | $\log \frac{1-k}{2r} = 3{,}12291$ | $\log \frac{1-k}{2r} = 3{,}12291$ |
| $1{,}13418$ | $2{,}07715$ | $1{,}60003_n$ |

| | | |
|---|---|---|
| 1stes Glied | $+$ | 13,62 |
| 2tes - | $+$ | 119,44 |
| 3tes - | $-$ | 39,81 |
| | $+$ | 93,25 |
| $H =$ | $+$ | 100 |
| $H'' =$ | $+$ | 193,25 |

Da $H''$ kleiner als 200 Toisen gefunden wurde, so sind beide Berge von einander sichtbar, und von $H$ gesehen, ragt der zweite Berg noch um $6{,}^T75$ über $h_,$ hervor.

2. Auf einer Höhe an der Küste hat man die Zenithdistance des Meereshorizontes $= 90^0\ 25'\ 2'',8$ und die Zenithdistance eines Punktes am Strande $= 93^0\ 49'\ 52''$ gefunden: es soll die Entfernung des letzteren bestimmt werden.

$$s' = \frac{r\,e'}{\omega\,(1-k)} \left\{ -1 + \sqrt{1 - \frac{e^2}{e'^2}} \right\}$$

$$e = -1502'',8\,;\quad e' = -13792''$$

$$\log e^2 = 6{,}35380$$

$$\text{Cpl.}\log e'^2 = 1{,}72076$$

$$\log \frac{e^2}{e'^2} = 8{,}07456 \ldots\ldots 0{,}011873 \qquad +1$$

$$+0{,}988127 \ldots \log = 9{,}994813$$

$$\log \sqrt{1 - \frac{e^2}{e'^2}} = 9{,}997407 \ldots 0{,}994046 \qquad -1$$

$$-0{,}005954 \ldots \log = 7{,}77481_n$$

$$\log e' = 4{,}13963_n$$

$$\log \frac{r}{\omega\,(1-k)} = 1{,}26163$$

$$\log s' = 3{,}17607$$

$$s' = 1500 \text{ Tois.}$$

3. In einem Punkte $A$ sind die Zenithdistancen nach zwei andern Punkten $B$ und $C$ gemessen, und respective $= 90^0\ 13'\ 42'',9$ und $90^0\ 30'\ 44'',9$ gefunden worden. Die Höhe von $B$ ist $= 90^T$, die von $C = 70^T$. Die

Entfernung von $A$ nach $B$ beträgt $2760^T$, die von $A$ nach $C$ $3540^T$. Es soll die Höhe von $A$ unabhängig von der Strahlenbrechung gefunden werden.

$$h = \frac{s'^2}{s^2 - s'^2}\left\{\frac{s\,e}{\omega} - h' - \frac{s^2}{s'^2}\left(\frac{s'\,e'}{\omega} - h''\right)\right\}$$

$s = 2760$; $s' = 3540$; $e = -822''\!,9$; $e' = -1844{,}9$; $h' = 90$; $h'' = 70$

$$\begin{array}{lll}
\log(s+s') = 3{,}79934 & \log s = 3{,}44091 & \log s' = 3{,}54900 \\
\log(s-s') = 2{,}89209_n & \log e = 2{,}91535_n & \log e' = 3{,}26598_n \\
\log(s^2 - s'^2) = 6{,}69143_n & \text{Cpl.}\log\omega = 4{,}68557 & \text{Cpl.}\log\omega = 4{,}68557 \\
 & \phantom{\log e = {}} 1{,}04183_n & \phantom{\log e' = {}} 1{,}50055_n \ldots -31{,}663
\end{array}$$

$$-h'' = -70$$

$$\frac{s\,e}{\omega} = -11{,}011 \qquad\qquad \frac{s'\,e'}{\omega} - h'' = -101{,}663$$

$$-h' = -90$$

$$-\frac{s^2}{s'^2}\left(\frac{s'\,e'}{\omega} - h''\right) = +61{,}799 \qquad\qquad \log\left(\frac{s'\,e'}{\omega} - h''\right) = 2{,}00716_n$$

$$-39{,}212 \ldots\ldots 1{,}59342_n \qquad\qquad \log\frac{s^2}{s'^2} = 9{,}78382$$

$$\log s'^2 = 7{,}09800 \qquad\qquad 1{,}79098_n$$

$$\text{Cpl.}\log(s^2 - s'^2) = 3{,}30857_n$$

$$-61{,}799$$

$$\log h = 1{,}99999$$

Die Höhe von $A$ . . . . $h = 99{,}998$ Toisen.

Sind die Entfernungen $s$ und $s'$ in Logarithmen gegeben, dann schreibt man den ersten Faktor der Gleichung $\frac{s'^2}{s^2 - s'^2}$ besser $= \frac{1}{\frac{s^2}{s'^2} - 1}$.

4. Auf zwei Stationen $B$ und $C$, deren Höhen respective 150 und 300 Toisen betragen, sind gleichzeitige Zenithdistancen nach einem der Lage nach bekannten Punkte $A$ genommen worden, und es fand sich: die Zenithdistance von $A$ in $B$ $= 89^\circ\ 49'\ 30''$; die Zenithdistance von $A$ in $C$ $= 91^\circ\ 54'\ 36''\!,5$. Die Entfernung $BA$ ist $= 3500$ Toisen; die Entfernung $CA = 4200$ Toisen. Es soll daraus die Höhe von $A$, und die Strahlenbrechung unter der Voraussetzung, dafs sie auf beiden Punkten gleich war, bestimmt werden.

Wir haben also:

| auf Station $B$ | auf Station $C$ |
| --- | --- |
| $h' = 150^T$ | $h'' = 300^T$ |
| $s' = 3500^T$ | $s'' = 4200^T$ |
| $e' = 0^0\ 10'\ 30''$ | $e'' = -1^0\ 54'\ 36'',5$ |

$$1 - k = \frac{2r}{s'^2 - s''^2}\left\{h'' - h' - \frac{s'e'}{\omega} + \frac{s''e''}{\omega}\right\}$$

$$\log(s' + s'') = 3{,}88649 \qquad \log s' = 3{,}54407 \qquad \log s'' = 3{,}62325$$

$$\log(s' - s'') = 2{,}84510_n \qquad \log e' = 2{,}79934 \qquad \log e'' = 3{,}83737_n$$

$$\log(s'^2 - s''^2) = 6{,}73159_n \qquad \log\frac{1}{\omega} = 4{,}68557 \qquad \log\frac{1}{\omega} = 4{,}68557$$

$$1{,}02898 \qquad 2{,}14619_n$$

$$\frac{s'e'}{\omega} = +10{,}69 \qquad \frac{s''e''}{\omega} = -140{,}02$$

$$h'' - h' = +150$$

$$-\frac{s'e'}{\omega} + \frac{s''e''}{\omega} = -150{,}71$$

$$-\ 0{,}71 \ldots\ldots \log = 9{,}85126_n$$

$$\log 2r = 6{,}81631$$

$$\log\frac{1}{s'^2 - s''^2} = 3{,}26841_n$$

$$+1$$

$$\log(1 - k) = 9{,}93598 \ldots\ldots 0{,}8629$$

Der Coefficient der Strahlenbrechuug ...... $k = 0{,}1371$

$$h = \frac{s'^2}{s'^2 - s''^2}\left\{h'' + \frac{s''e''}{\omega} - \left(h' + \frac{s'e'}{\omega}\right)\frac{s''^2}{s'^2}\right\}$$

$$h'' + \frac{s''e''}{\omega} = +159{,}98 \qquad h' + \frac{s'e'}{\omega} = +160{,}69 \ldots \log = 2{,}20599$$

$$-231{,}40 \qquad \log\frac{s''^2}{s'^2} = 0{,}15836$$

$$2{,}36435$$

$$\{\quad\} = -\ 71{,}42 \ldots \log = 1{,}85382_n \qquad +231{,}40$$

$$\log s'^2 = 7{,}08814$$

$$\log\frac{1}{s'^2 - s''^2} = 3{,}26841_n$$

$$\log h = 2{,}21037$$

Die Höhe von $A$ .... $h = 162{,}32^T$

5. Als Beispiel zur Berechnung der Aufgabe 5. wollen wir folgende Data annehmen:

| | In $B$. | In $C$. |
|---|---|---|
| gegeben: | $h' \ldots = 180^{\mathrm{T}}$ | $h'' = 300^{\mathrm{T}}$ |
| | $BA = s = 3500^{\mathrm{T}}$ | $CA = s'' = 4200^{\mathrm{T}}$ |
| | $BA' = s' = 5000^{\mathrm{T}}$ | $CA' = s''' = 5600^{\mathrm{T}}$ |
| beobachtet: Elev. von | $A = e = 0^{\circ}\ 10'\ 30''$ | $e'' = -1^{\circ}\ 29'\ 59'',8$ |
| - von | $A' = e' = 0^{\circ}\ 35'\ 45''$ | $e''' = -0^{\circ}\ 42'\ 10'',7$ |

gesucht wird: $k$ die Strahlenbrechung in $B$; $k'$ die Strahlenbrechung in $C$; $h_{\prime}$ die Höhe von $A$; $h_{\prime\prime}$ die Höhe von $A'$.

1. Berechnung von $h_{\prime}$ nach Formel . . . 1. unter 5.

$$\begin{array}{llll}
\log s = 3{,}54407 & \log s' = 3{,}69897 & \log s'' = 3{,}623249 & \log s''' = 3{,}74819 \\
\log e = 2{,}79934 & \log e' = 3{,}33143 & \log e'' = 3{,}732378_n & \log e''' = 3{,}40324_n \\
\log \frac{1}{\omega} = 4{,}68557 & \log \frac{1}{\omega} = 4{,}68557 & \log \frac{1}{\omega} = 4{,}685575 & \log \frac{1}{\omega} = 4{,}68557 \\
\hline
\log \frac{se}{\omega} = 1{,}02898 & \log \frac{s'e'}{\omega} = 1{,}71597 & \log \frac{s''e''}{\omega} = 2{,}041202_n & \log \frac{s'''e'''}{\omega} = 1{,}83700_n \\
+10^{\mathrm{T}}{,}690 & +51{,}996 & -109{,}952 & -68{,}707
\end{array}$$

$$h'' + \frac{s''e''}{\omega} = +190{,}048 \,..\, \log = 2{,}278863 \qquad h'' + \frac{s'''e'''}{\omega} = +231{,}293$$

$$\log \frac{s^2 s'''^2}{s'^2 s''^2} = 9{,}940074 \qquad -\left(h' + \frac{s'e'}{\omega}\right) = -231{,}996$$

$$\begin{array}{ll}
2{,}218937 & -\ 0{,}703 \,..\, \log = 9{,}84696_n \\
+165{,}553 & \log \frac{s^2}{s'^2} = 9{,}69020 \\
 & \overline{9{,}53716_n} \\
 & -0{,}344
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
\text{1ster Theil } h' + \frac{se}{\omega} = +190{,}690 \\
\text{2ter Theil} \ldots\ldots = -165{,}553 \\
\text{3ter Theil} \ldots\ldots = -\ \ 0{,}344 \\
\hline
+\ 24{,}799 \,..\, \log = 1{,}394434 \\
\log \left(\dfrac{1}{1 - \dfrac{s^2 s'''^2}{s'^2 s''^2}}\right) = 0{,}889787 \\
\hline
\end{array}$$

$\log h_{\prime} = 2{,}284221$ .. Die Höhe von $A$ od. $h_{\prime} = 192^{\mathrm{T}}{,}407$

## 2. Berechnung von $h_{\prime\prime}$

$$h' + \frac{s'e'}{\omega} = 231{,}996 \ldots \log = 2{,}365481$$

$$\log \frac{s^2 s'''^2}{s'^2 s''^2} = 9{,}940074$$

$$2{,}305555$$

$$+ 202{,}095$$

$$h' + \frac{se}{\omega} = 190{,}690$$

$$-\left(h'' + \frac{s''e''}{\omega}\right) = -190{,}048$$

$$+ 0{,}642 \ldots \log = 9{,}80754$$

$$\log \frac{s'''^2}{s''^2} = 0{,}24988$$

$$0{,}05742$$

$$+ 1{,}141$$

1ster Theil $h'' + \frac{s'''e'''}{\omega} = + 231{,}293$

2ter Theil . . . . . . $- 202{,}095$

3ter Theil . . . . . . $+ 1{,}141$

$$+ 30{,}339 \ldots \log = 1{,}482001$$

$$\log \left(\frac{1}{1 - \frac{s^2 s'''^2}{s'^2 s''^2}}\right) = 0{,}889787$$

$\log h_{\prime\prime} = 2{,}371788$ .. Die Höhe von $A'$ od. $h_{\prime\prime} = 235{,}390$

## 3. Berechnung von $k$ und $k'$

$$h_{\prime} - h_{\prime\prime} = - 42{,}983 \ldots\ldots - 42{,}983$$

$$\frac{s'e'}{\omega} - \frac{se}{\omega} = + 41{,}306$$

$$- 1{,}677 \ldots \log = 0{,}22453_n$$

$$\log 2r = 6{,}81631$$

$$\log \left(\frac{1}{s^2 - s'^2}\right) = 2{,}89449_n$$

$$\log (1 - k) = 9{,}93533$$

$$1 - k = 0{,}8617$$

Refraction in *B* oder $k = 0{,}1383$ ;

$$\frac{s'''e'''}{\omega} - \frac{s''e''}{\omega} = + 41{,}245$$

$$- 1{,}738 \ldots \log = 0{,}24005_n$$

$$6{,}81631$$

$$\log \left(\frac{1}{s''^2 - s'''^2}\right) = 2{,}86264_n$$

$$\log 1 - k' = 9{,}91900$$

$$1 - k' = 0{,}8299$$

Refraction in *C* oder $k' = 0{,}1701$