Ausgleichung des Dreiecksnetzes.

§. 9. Rechnungsvorschrift.

Der Herr Geheime Rath *Bessel* hat für die wahrscheinlichste Berechnung der geodätischen Operationen (Gradmessung in Ostpreufsen, Seite 132.) folgende Rechnungsvorschriften ertheilt:

Werden die, den beobachteten Winkeln hinzuzufügenden Verbesserungen durch:

$$v,\ v',\ v'' \ldots\ldots \text{ bis } v^{(\pi-1)}$$ bezeichnet

und nennt man die diesen Winkeln zukommenden Gewichte:

$$p,\ p',\ p'' \ldots\ldots \text{ bis } p^{(\pi-1)}$$

so mufs immer die Function:

$$\Omega = \tfrac{1}{2}\left\{ vvp + v'v'p' + v''v''p'' + \ldots\ldots \right\} \ldots. (1)$$

ein Minimum werden.

Sind nun die Bedingungen welche durch die Beobachtungen erfüllt werden müssen, durch folgende Gleichungen ausgedrückt

$$\left.\begin{array}{l} 0 = \mathfrak{A} + av + a'v' + a''v'' + \ldots\ldots \\ 0 = \mathfrak{B} + bv + b'v' + b''v'' + \ldots\ldots \\ 0 = \mathfrak{C} + cv + c'v' + c''v'' + \ldots\ldots \\ \text{u. s. w.} \end{array}\right\} \ldots. (2)$$

wo $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$.... Zahlen sind, welche aus den Beobachtungen hervorgehen und $= 0$ sein würden, wenn diese absolut genau wären: so kömmt es zunächst darauf an, diejenigen Bedingungen aufzusuchen, welche bei der stattfindenden Abhängigkeit der verschiedenen Veränderlichen, Ω zu einem Minimum machen. Sie bestehen darin, dafs das Differential von Ω, nachdem man so viele der darin vorkommenden dv, dv', dv''.... als sich durch die Gleichungen (2) eliminiren lassen, eliminirt hat, auch die übrigen nicht mehr enthalte; oder dafs die Factoren, in welche sie multiplicirt sind, für sich verschwinden. Dieses kann auf eine elegante und hier besonders zweckmäfsige Art geleistet werden. Man hat nämlich:

$d\Omega = pvdv + p'v'dv' + p''v''dv'' + \ldots.$ und durch die Gleichungen (2) zwischen dv, dv', dv''.... die Relationen

$$0 = a\,dv + a'\,dv' + a''\,dv'' + \ldots.$$
$$0 = b\,dv + b'\,dv' + b''\,dv'' + \ldots.$$
$$0 = c\,dv + c'\,dv' + c''\,dv'' + \ldots.$$
$$\vdots$$

multiplicirt man diese letzteren mit Faktoren $x, y, z \ldots.$ und fügt die Produkte zu $d\Omega$ hinzu, so ist die Summe

$$\begin{aligned} = &\{ vp + ax + by + cz + \ldots. \} dv \\ + &\{ v'p' + a'x + b'y + c'z + \ldots. \} dv' \\ + &\{ v''p'' + a''x + b''y + c''z + \ldots. \} dv'' \\ + &\text{ etc.:} \end{aligned}$$

wegen des Minimums $= 0$ und wegen der obigen Bedingung unabhängig von allen dv, dv', $dv'' \ldots.$ Man erhält also:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= pv + ax + by + cz + \ldots. \\ 0 &= p'v' + a'x + b'y + c'z + \ldots. \\ 0 &= p''v'' + a''x + b''y + c''z + \ldots. \\ &\text{u. s. w.} \end{aligned}\right\} \ldots. (3)$$

Werden die hieraus hervorgehenden Ausdrücke von v, v', $v'' \ldots.$ in die Gleichungen (2) gesetzt, so ergeben sich Gleichungen für die Faktoren $x, y, z \ldots.$ welche dem Minimum und den zu erfüllenden Bedingungen (2) zugleich entsprechen. Man erhält auf diese Art:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{A} &= (aa)x + (ab)y + (ac)z + \ldots. \\ \mathfrak{B} &= (ab)x + (bb)y + (bc)z + \ldots. \\ \mathfrak{C} &= (ac)x + (bc)y + (cc)z + \ldots. \\ &\vdots \end{aligned}\right\} \ldots. (4)$$

Hat man also aus den Gleichungen (4) die Werthe $x, y, z \ldots.$ gefunden, so erhält man aus den Gleichungen (3) die gesuchten, den Beobachtungen hinzuzufügenden Verbesserungen $v, v', v'' \ldots.$
