

IV. Geographische Lage der in das Dreiecksnetz aufgenommenen festen Punkte in Caucasiens, abgeleitet aus der Verbindung der geodätischen und astronomischen Beobachtungen.

Zu der geographischen Bestimmung der von uns aufgenommenen Städte, Dörfer, Stanitzen und einiger Spitzen des Caucasus finden wir das Material theils in den von der Operationslinie aus gemessenen Richtungswinkeln nach denselben (pag. 19 — 46), theils in den hieraus folgenden Entfernungen von den nächsten Signalen, welche pag. 220 — 221 und pag. 374 berechnet sind; endlich in den astronomischen Bestimmungen der Breite, Länge und des Azimuts, welche theils in einigen der erwähnten Städte und Dörfer, theils an Punkten der Operationslinie selbst ausgeführt wurden, und pag. 179 — 192, 379 — 384 gegeben sind. Um aus diesem Materiale für die Geographie Caucasiens den grösstmöglichen Nutzen zu ziehen, bedurfte es noch mannigfaltiger und weitläufiger Rechnungen, deren grössten und mühsamsten Theil Herr Fuss ausführte, und deren Resultate wir jetzt näher auseinandersetzen wollen.

Zuvörderst, übersieht man; ist es nothwendig die einzelnen Signale der Operationslinie in eine fortlaufende geodätische Verbindung mit einander zu setzen, um die an einzelnen derselben bestimmten Azimute, Längen und Breiten mit einander vergleichen zu können. Das Resultat dieser Rechnung ist von Herrn Fuss in folgender Tafel zusammengestellt, wo in der zweiten Columne die Logarithmen der Entfernungen der resp. Signale von einzelnen ausgewählten derselben, aufs Meeresniveau reducirt, in englischen Zollen gegeben sind; in der dritten die sphärischen Winkel, welche die Linien der ersten Columne mit den in der Tafel bezeichneten ursprünglichen Richtungen bilden, wo das Zeichen + nördliche, das Zeichen — südliche Winkel bezeichnet. Die Tafel giebt demnach auch die Polarcoordinaten der Punkte, sobald die Azimute der ursprünglichen Richtungen bekannt sind. Ausserdem ist beim Uebergange von einem System zum andern jedesmal der sphärische Verbindungswinkel derselben gegeben, nebst dem ihm zukommenden sphärischen Excesse, um ihn als ebenen zu betrachten.

Linien.	Log. d. Entfernung in engl. Zollen.	Sphär. Winkel der Linien mit: "	Linien.	Log. der Entfernung in engl. Zollen.	Sphär. Winkel der Linien mit: "
$P^1 P^2$	5,187286	« der Linie $P^1 P^2$	Verbindungswinkel		
$P^1 P^3$	5,394832	— 4° 2' 58",6	$P^{10} P^{11} P^{12} = 191° 24' 51",3$		
$P^1 P^4$	5,779004	— 40 6 28,8	$P^{11} P^{12}$	5,139123	« der Linie $P^{11} P^{12}$
$P^1 P^5$	5,948863	— 38 45 49,5	$P^{11} P^{13}$	5,546925	— 16° 29' 48",1
$P^1 P^6$	6,046159	— 34 25 57,6	$P^{11} P^{14}$	5,796718	— 10 8 45,0
$P^1 P^7$	6,142893	— 33 2 6,6	$P^{11} P^{15}$	5,957188	— 11 55 17,3
$P^1 P^8$	6,251644	— 31 31 1,6	$P^{11} P^{16}$	6,032390	— 12 23 20,5
$P^1 P^9$	6,328427	— 28 50 33,1	$P^{11} P^{17}$	6,116299	— 13 7 45,3
$P^1 P^{10}$	6,397707	— 23 36 5,4	$P^{11} P^{18}$	6,230851	— 11 46 27,4
$P^1 P^{11}$	6,422420	— 23 18 30,7	$P^{11} P^{19}$	6,282711	— 15 25 57,6

Linien.	Log. der Entfernung in engl. Zollen.	Sphär. Winkel der Linien mit: "
$P^{11} P^{20}$	6,307665	- 16° 8' 23",7
$P^{11} P^{21}$	6,371838	- 16 31 25,5
$P^{11} P^{22}$	6,413472	- 18 45 44,3
$P^{11} P^{23}$	6,439942	- 20 14 34,6
$P^{11} P^{24}$	6,486396	- 22 29 16,4
Verbindungswinkel		
$P^1 P^{11} P^{24} = 208^\circ 54' 43",9 - 2",1$		
$P^{24} P^{25}$	5,546898	« der Linie $P^{24} P^{25}$
$P^{24} P^{26}$	5,776092	+ 5° 56' 31",5
$P^{24} P^{27}$	5,907098	+ 9 49 44,9
$P^{24} P^{28}$	6,019337	+ 2 28 40,1
$P^{24} P^{29}$	6,147965	+ 3 28 2,0
$P^{24} P^{30}$	6,226272	+ 3 14 7,3
$P^{24} P^{31}$	6,290280	+ 0 26 55,8
$P^{24} B^{31}$	6,298167	- 2 26 11,3
Verbindungswinkel		
$P^{11} P^{24} B^{31} = 181^\circ 53' 41",8 - 0",0$		
$P^{24} P^{32}$	6,319910	- 3° 11' 48",4
$P^{24} P^{33}$	6,366561	- 5 42 59,5
$P^{24} P^{34}$	6,414024	- 6 17 3,5
$P^{24} P^{35}$	6,446589	- 9 2 56,2
$P^{24} P^{36}$	6,498927	- 13 37 22,6
$P^{24} P^{37}$	6,547642	- 14 8 5,8
$P^{24} P^{38}$	6,591767	- 13 27 43,3
$P^{24} P^{39}$	6,636651	- 14 23 16,4
$P^{24} P^{40}$	6,659446	- 14 54 55,4
$P^{24} P^{41}$	6,691382	- 15 4 23,6
$P^{24} P^{42}$	6,718415	- 13 57 44,3
$P^{24} P^{43}$	6,733522	- 13 4 28,9
$P^{24} P^{44}$	6,748686	- 11 35 35,1
$P^{24} P^{45}$	6,772561	- 10 36 7,7
$P^{24} P^{46}$	6,794180	- 9 53 47,2
$P^{24} P^{47}$	6,813838	- 10 18 55,5
$P^{24} P^{48}$	6,827268	- 10 44 52,1
Verbindungswinkel		
$P^{24} B^{31} P^{48} = 191^\circ 46' 11",5 - 1",0$		
$P^{48} P^{49}$	5,634034	« der Linie $P^{48} P^{49}$
$P^{48} P^{50}$	5,753078	+ 3° 22' 17",1

Linien.	Log. der Entfernung in engl. Zollen.	Sphär. Winkel der Linien mit: "
$P^{48} P^{51}$	5,872599	+ 0° 49' 36",0
$P^{48} P^{52}$	5,984435	- 8 3 19,9
$P^{48} P^{53}$	6,106031	- 15 9 42,2
$P^{48} P^{54}$	6,124339	- 14 50 7,2
$P^{48} P^{55}$	6,223650	- 14 30 54,2
$P^{55} P^{56}$	5,529470	« der Linie $P^{55} P^{56}$
$P^{55} P^{57}$	5,754945	+ 0° 54' 41",0
$P^{55} P^{58}$	5,936718	- 6 44 52,4
$P^{55} P^{59}$	6,081079	- 5 34 22,0
$P^{55} P^{60}$	6,164985	- 11 29 44,4
$P^{48} P^{60}$	6,489322	- 24 6 30,7
Verbindungswinkel		
$P^{48} P^{55} P^{60} = 200^\circ 35' 25",6$ (red.)		
$P^{60} P^{61}$	5,496822	« der Linie $P^{60} P^{61}$
$P^{60} P^{62}$	5,736344	+ 0° 8' 20",7
$P^{60} P^{63}$	5,888614	+ 0 16 42,3
$P^{60} P^{64}$	6,051177	+ 3 47 6,0
$P^{60} P^{65}$	6,196366	+ 6 12 33,2
$P^{65} P^{66}$	5,371369	« der Linie $P^{65} P^{66}$
$P^{65} P^{67}$	5,513933	- 1° 46' 31",1
$P^{65} P^{68}$	5,787838	- 6 28 43,9
$P^{65} P^{69}$	5,930501	- 12 30 16,6
$P^{65} P^{70}$	6,081593	- 14 33 1,6
Verbindungswinkel		
$P^{60} P^{65} P^{70} = 198^\circ 9' 8",6$ (red.)		
$P^{60} P^{70}$	6,438414	- 1° 39' 52",9
Verbindungswinkel		
$P^{48} P^{60} P^{70} = 225^\circ 3' 49",3$ (red.)		
$P^{48} P^{70}$	6,731286	- 45° 14' 56",6
Verbindungswinkel		
$B^{31} P^{48} B^{70} = 156^\circ 22' 57",8 - 5",7$		
$B^{70} P^{71}$	5,395676	« der Linie $B^{70} P^{71}$
$B^{70} P^{72}$	5,639615	+ 0° 22' 49",0
$B^{70} P^{73}$	5,917965	+ 6 27 51,8
$B^{70} P^{74}$	6,117400	- 2 37 14,8
$B^{70} P^{75}$	6,226063	- 5 47 5,2
$B^{70} P^{76}$	6,274866	- 7 2 47,6
$B^{70} P^{77}$	6,351408	- 5 34 44,2

Linien.	Log. der Entfernung in engl. Zollen.	Sphär. Winkel der Linien mit: "	Linien.	Log. der Entfernung in engl. Zollen.	Sphär. Winkel der Linien mit: "
$B^{70} P^{78}$	6,399191	— 3° 57' 25",1	$P^{102} P^{105}$	5,934667	— 1° 11' 9",8
$B^{70} P^{79}$	6,438520	— 2 19 58,8	$P^{102} P^{106}$	6,020242	— 2 23 7,5
$B^{70} P^{80}$	6,473335	+ 1 37 7,2	$P^{102} P^{107}$	6,107671	— 5 3 24,1
$B^{70} P^{81}$	6,515330	+ 8 45 4,4	$P^{102} P^{108}$	6,170867	— 3 53 41,8
$B^{70} P^{82}$	6,541736	+ 10 16 6,8	$P^{102} P^{109}$	6,223122	— 5 43 36,2
$B^{70} B^{83}$	6,557414	+ 10 37 44,0	$P^{102} P^{110}$	6,294765	— 7 47 14,7
Verbindungswinkel			Verbindungswinkel		
$P^{48} B^{70} B^{83} = 177^{\circ} 12' 24",8 - 0",5$			$P^{95} P^{102} P^{110} = 201^{\circ} 25' 2",6$ (red.)		
$B^{83} P^{84}$	5,118150	« der Linie $B^{83} P^{84}$	$P^{95} P^{110}$	6,535750	+ 43° 7' 38",3
$B^{83} P^{85}$	5,581036	+ 0° 37' 49",5	$P^{110} P^{111}$	5,416711	« der Linie $P^{110} P^{111}$
$B^{83} P^{86}$	5,785792	+ 3 55 59,3	$P^{110} P^{112}$	5,808708	+ 0° 12' 45",8
$B^{83} P^{87}$	5,968380	+ 12 15 22,7	$P^{110} P^{113}$	6,001833	+ 7 52 44,5
$B^{83} P^{88}$	6,087556	+ 15 36 27,8	Verbindungswinkel		
$B^{83} P^{89}$	6,162627	+ 22 12 49,9	$P^{95} P^{110} P^{113} = 197^{\circ} 40' 15",3$ (red.)		
$B^{83} P^{90}$	6,228855	+ 17 29 54,8	$P^{95} P^{113}$	6,643553	+ 39° 9' 19",6
$B^{83} P^{91}$	6,261246	+ 15 51 46,8	$P^{113} P_b^{114}$	5,379550	« d. Linie $P^{113} P_b^{114}$
$B^{83} P^{92}$	6,307460	+ 14 24 37,2	$P^{113} P^{115}$	5,786412	+ 37° 32' 7",2
$B^{83} P^{93}$	6,365391	+ 16 58 13,6	$P^{113} P^{116}$	5,929527	+ 23 41 20,8
$B^{83} P^{94}$	6,421959	+ 16 49 3,6	$P^{113} P^{117}$	6,074826	+ 30 35 28,6
Verbindungswinkel			$P^{113} P^{118}$	6,174668	+ 34 48 48,1
$B^{70} B^{83} P^{95} = 146^{\circ} 40' 12",0 - 3",2$			$P^{113} P^{119}$	6,235572	+ 33 0 22,7
$P^{95} P^{96}$	5,429013	« der Linie $P^{95} P^{96}$	$P^{113} P^{120}$	6,295101	+ 25 48 55,5
$P^{95} P^{97}$	5,661086	+ 18° 15' 41",9	$P^{113} P^{121}$	6,346901	+ 18 25 35,4
$P^{95} P^{98}$	5,814409	+ 36 1 5,6	$P^{113} P^{122}$	6,388042	+ 10 45 18,7
$P^{95} P^{99}$	5,891739	+ 43 18 58,6	$P^{113} P^{123}$	6,382600	+ 4 8 46,5
$P^{95} P^{100}$	6,026402	+ 49 24 38,7	$P^{113} P^{124}$	6,364937	— 3 56 52,5
$P^{95} P^{101}$	6,119733	+ 55 6 29,2	Verbindungswinkel		
$P^{95} P^{102}$	6,182434	+ 55 13 45,2	$P^{95} P^{113} P^{124} = 103^{\circ} 51' 14",7 - 4",7$		
$P^{102} P^{103}$	5,642053	« der Linie $P^{102} P^{103}$	Verbindungswinkel		
$P^{102} P^{104}$	5,758722	— 1° 3' 44",2	$B^{83} P^{95} P^{124} = 141^{\circ} 9' 21",5 - 5",5$		

Fassen wir jetzt diejenigen Signale näher ins Auge, an denen das Azimut und die Polhöhe direct von uns bestimmt wurden, so finden sich deren sieben, nämlich P^1 , P^{11} , B^{31} , P^{48} , B^{70} , B^{83} , P^{124} ; wobei zu bemerken ist, dass P^1 und P^{124} als Anfangs- und Endpunkt der Operationslinie gewählt sind, obgleich eigentlich die Beobachtungen in P^2 und P^{123} geschahen und auf P^1 und P^{124} reducirt worden sind. Die Beobachtungen von uns dreien in Stawropol, Beschpagir und an P^{54} angestellt, werden auf P^{48} reducirt, und das Mittel daraus genommen. Wir haben demnach:

1) Signal P^1 . Polhöhe $P^2 = 47^\circ 4' 0''{,}7$; Azimut $P^2 P^1 = 264^\circ 34' 10''{,}2$ (p. 380); hieraus und aus log. $P^1 P^2 = 5,187286$ (p. 195) folgt:

$$P^1 \text{ Polhöhe} = 47^\circ 3' 49''{,}0; \text{ Azimut } P^1 P^2 = 84^\circ 31' 54''{,}0 \text{ N. O.}$$

2) Signal P^{11} . Polhöhe $= 46^\circ 52' 34''{,}7$; Azimut $P^{11} P^{10} = 283^\circ 27' 5''{,}5$ (p. 381).

3) Basisendpunct B^{31} . Polhöhe $= 46^\circ 0' 44''{,}4$; Azimut $B^{31} P^{32} = 155^\circ 17' 4''$ (p. 188 *)

4) Signal P^{48} . Hier sind drei Bestimmungen benutzt, nämlich a) Polhöhe und Azimut von Sawitsch in Stawropol, b) Polhöhe und Azimut von Sabler am Signal P^{54} , c) Polhöhe von Fuss in Beschpagir.

a) Die Beobachtung reducirt auf die Kuppel der Cathedrale in Stawropol ist (p. 188) Polhöhe $= 45^\circ 3' 9''{,}4$, Azimut nach $B^{48} = 82^\circ 47' 53''{,}^{**}$. Aus dem Winkel $B^{48} P^{48}$ Stawr. $= 8^\circ 20' 41''{,}5$ (p. 29) und den Seiten: log. $B^{48} P^{48} = 5,036132$ (p. 204), log. P^{48} Stawr. $= 4,354071$ (p. 221) folgt: Winkel B^{48} Stawr. $P^{48} = 169^\circ 28' 45''{,}2$; daraus: Azimut Stawr. $P^{48} = 273^\circ 19' 8''$; Polhöhe $P^{48} = 45^\circ 3' 10''{,}5$; Azimut P^{48} Stawr. $= 93^\circ 18' 50''$; und mit Zuziehung des Winkels Stawr. $P^{48} P^{49} = 9^\circ 55' 13''{,}8$ (p. 29) endlich Azimut $P^{48} P^{49} = 83^\circ 23' 36''$.

b) Die Beobachtung an P^{54} ist (p. 381): Polhöhe $= 45^\circ 0' 26''{,}9$, Azimut $P^{54} P^{55} = 96^\circ 57' 54''{,}2$. Nach der vorhergehenden Tafel ist log. $P^{48} P^{54} = 6,124339$; log. $P^{48} P^{55} = 6,223650$; Winkel $P^{55} P^{48} P^{54} = 0^\circ 19' 13''{,}0$. Daraus folgt Winkel $P^{48} P^{54} P^{55} = 178^\circ 26' 0''{,}4$ und Azimut $P^{54} P^{48} = 278^\circ 31' 53''{,}8$; ferner Polhöhe $P^{48} = 45^\circ 3' 6''{,}2$; Azimut $P^{48} P^{54} = 98^\circ 13' 51''{,}6$, und mit Zuziehung des Winkels $P^{49} P^{48} P^{54} = 14^\circ 50' 7''{,}2$ (vorige Tafel) endlich Azimut $P^{48} P^{49} = 83^\circ 23' 44''{,}4$.

c) Die Beobachtung in Beschpagir ist (p. 384): Polhöhe der Kirche $= 45^\circ 0' 54''{,}5$. Mit dem vorigen Azimut $P^{54} P^{55} = 96^\circ 57' 54''{,}2$, log. $P^{53} P^{54} = 4,744031$ (p. 205), Winkel $P^{53} P^{54} P^{55} = 185^\circ 58' 1''{,}5$ (p. 30) erhält man: Azimut $P^{54} P^{53} = 270^\circ 59' 52''{,}7$, Azimut $P^{53} P^{54} = 90^\circ 59' 7''{,}2$; fügt man hiezu den Winkel Beschp. $P^{53} P^{54} = 127^\circ 11' 26''{,}4$ (p. 30), so folgt Azimut P^{53} Beschp. $= 323^\circ 47' 40''{,}8$. Hieraus und aus der beobachteten Polhöhe von Beschp. nebst log. P^{53} Beschp. $= 4,543864$ (p. 221) ergibt sich Polhöhe $P^{53} = 45^\circ 0' 31''{,}9$; reducirt man diese mit den unter b) gegebenen Datis auf P^{54} , und davon endlich auf P^{48} , so erhält man Polhöhe $P^{48} = 45^\circ 3' 11''{,}0$. — Das Mittel aus den 3 Polhöhen unter a), b), c) und den beiden Azimuten unter a), b) ist:

$$P^{48} \text{ Polhöhe} = 45^\circ 3' 9''{,}2; \text{ Azimut } P^{48} P^{49} = 83^\circ 23' 40''.$$

5) Basisendp. B^{70} . Polhöhe $= 44^\circ 15' 39''{,}1$; Azimut $B^{70} P^{71} = 137^\circ 31' 10''$ (p. 189).

6) Basisendp. B^{83} . Polhöhe $= 43^\circ 45' 47''{,}1$; Azimut $B^{83} P^{84} = 110^\circ 8' 16''$ (p. 189).

7) Signal P^{124} . Polhöhe $P^{123} = 44^\circ 24' 54''{,}0$; Azimut $P^{123} P^{124} = 107^\circ 11' 13''{,}3$ (p. 381); hieraus und aus log. $P^{123} P^{124} = 5,540767$ (p. 219) folgt:

$$P^{124} \text{ Polhöhe} = 44^\circ 23' 29''{,}3; \text{ Azimut } P^{124} P^{123} = 287^\circ 15' 40''.$$

Um diese 7 Punkte nun mit einander zu verbinden hat H. Fuss aus der vorhergehenden Tafel noch folgende Relationen berechnet:

*) In dem Mittel der Polhöhen von B^{31} hat sich p. 188 ein Rechnungsfehler eingeschlichen, wo es statt $52''{,}5 \dots 44''{,}4$ heissen muss.

**) Pag. 188 ist dafür fälschlich das Complement zu 360° angegeben.

Sphärische Winkel.	log. der Entfernung in Zollen.
$P^2 P^1 P^{11} = 23^\circ 18' 31''$	} $P^1 P^{11} = 6,422420$
$P^{10} P^{11} P^1 = 4 59 16$	
$P^{10} P^{11} B^{31} = 214 38 54$	} $P^{11} B^{31} = 6,703373$
$P^{32} B^{31} P^{11} = 163 36 28$	
$P^{32} B^{31} P^{48} = 356 31 40$	} $B^{31} P^{48} = 6,677709$
$P^{49} P^{48} B^{31} = 248 57 10$	
$P^{49} P^{48} B^{70} = 45 20 8$	} $P^{48} B^{70} = 6,737353$
$P^{71} B^{70} P^{48} = 172 9 51$	
$P^{71} B^{70} B^{83} = 349 22 16$	} $B^{70} B^{83} = 6,557414$
$P^{84} B^{83} B^{70} = 197 22 35$	
$P^{84} B^{83} P^{124} = 318 39 56$	} $B^{83} P^{124} = 6,901160$
$P^{123} P^{124} B^{83} = 323 12 55$	

Die sphärischen Winkel mit den obigen Azimuten verbunden geben unmittelbar folgende reciproke Azimute zwischen den 7 Punkten:

Azimut $P^1 P^{11} = 107^\circ 50' 25''$;	$P^{11} P^1 = 288^\circ 26' 22''$
“ $P^{11} B^{31} = 138 6 0$;	$B^{31} P^{11} = 318 53 32$
“ $B^{31} P^{48} = 151 48 44$;	$P^{48} B^{31} = 332 20 50$
“ $P^{48} B^{70} = 128 43 48$;	$B^{70} P^{48} = 309 41 1$
“ $B^{70} B^{83} = 126 53 26$;	$B^{83} B^{70} = 307 30 51$
“ $B^{83} P^{124} = 68 48 12$;	$P^{124} B^{83} = 250 28 35$

Zur Controle der ganzen Rechnung hat H. Fuss noch die Entfernung $P^1 P^{124}$ aus obigen Datis zweimal, d. h. vor- und rückwärts berechnet, wo der log. derselben sich im ersten Fall $= 7,401923$, im zweiten $= 7,401925$ ergab, also nur um 2 Einheiten der letzten Stelle verschieden. Alle Entfernungen sind aufs Meeresniveau reducirt.

Jetzt lassen sich die Azimute sowohl als die Polhöhen der genannten 7 Punkte gegenseitig vergleichen und durch einander prüfen. Ehe wir indessen hieran gehen, scheint es zweckmässig zu untersuchen, welche Uebereinstimmung wir hier zu erwarten berechtigt sind. — Am genauesten sind jedenfalls die Entfernungen bestimmt. Haben dieselben im einzelnen auch freilich nicht die Genauigkeit, wie bei den neueren Gradmessungen, weil die kleinen Grundlinien, wegen der uns nothwendigen raschen Förderung der Arbeit, nach einer einfachen Methode gemessen wurden (vergl. pag. 14); und ausserdem noch die denselben gegenüberliegenden ziemlich spitzen Winkel aus demselben Grunde nur durch einen einzigen Satz bestimmt werden konnten: so besitzen dagegen die grösseren Distanzen wie $P^1 P^{11}$ etc. den Vortheil, dass die Fehler derselben nur im Verhältniss der Quadratwurzel der Zahl der einzelnen Entfernungen $P^1 P^2$ u. s. w. wachsen, da diese mit wenig Ausnahmen sich in fortlaufenden geraden Linien an einander schliessen, wodurch die etwanigen Fehler der Verbindungswinkel von nahe zu 180° fast ohne Einfluss auf die Entfernungen sind. Ich glaube aus dem Grunde die Behauptung wagen zu können, dass die Genauigkeit der Entfernung $P^1 P^{124}$ der Genauigkeit gleich grosser Distanzen bei den besten Gradmessungen nicht erheblich nachstehn dürfte. Setzen wir nämlich nach pag. 14, 15 den wahrscheinlichen Fehler einer Basismessung $= 0,5$ Zoll, den wahrscheinlichen Fehler der gegenüberliegenden spitzen Winkel

von 7° gleich $1''$, so folgt der wahrscheinliche Fehler einer mittleren Distanz $P^n P^{n+1}$, die im Durchschnitte etwa 20mal grösser als die Basis war, aus der ersten Quelle 10 Zoll; aus der zweiten $6 Z. \times \sqrt{2} = 8,4 Z.$; aus beiden Fehlerquellen zusammen $\sqrt{10^2 + 8,4^2} = 13$ Zoll, was auf die ganze Distanz $P^1 P^{124}$ von 600 Werst: $13 \cdot \sqrt{124} = 144$ Zoll oder nur 12 Fuss austrägt.

Eine minder gute Uebereinstimmung dürfen wir bei den Azimuten erwarten. — Wenn gleich die wahrscheinlichen Fehler der einzelnen derselben, selbst wenn aus einem einzigen Satz bestimmt, nicht leicht ein paar Secunden übersteigen, so entstehen doch, beim Uebertragen derselben von einem Signal zum andern, grössere Unsicherheiten durch die Fehler der Winkel $P^n P^{n+1} P^{n+2}$. Diese Winkel sind nämlich nicht so sicher als die der Basis gegenüberliegenden, hauptsächlich der Centrirung wegen. Ich habe pag. 15 bemerkt, dass die Centrirung der letzteren, die für uns zunächst freilich die wichtigsten waren, bis auf $0,1''$ sicher sei. Dieses wurde dadurch erreicht, dass der Winkelmesser, wie aus Fig. 5 ersichtlich ist, immer senkrecht gegen die Richtung zur Basis vom Centrum des Signals abstand, und daher die Reduction aufs Centrum für die beobachteten Richtungen nach den beiden Basis-Endpunkten ziemlich genau von gleichem Betrage ist, mithin der Centrirungsfehler auf den Unterschied beider fast verschwindet. Ganz anders verhält es sich dagegen bei den Winkeln $P^n P^{n+1} P^{n+2}$, auf welche der Centrirungsfehler am ungünstigsten, um die Summe der beiden einzelnen Reductionen der Richtungen nach P^n und P^{n+2} einwirkt. Aus vielfachen Gründen, hauptsächlich wegen der Kürze der Zeit, konnten aber die Centrirungen nicht so genau gemacht werden als es sonst wünschenswerth gewesen wäre. Die Signalstangen wurden freilich nach dem Loth senkrecht gestellt, aber bei starkem Winde häufig aus der senkrechten Lage wieder etwas verrückt. Ferner war es nicht leicht, den Mittelpunkt der massiven $3\frac{1}{2}$ zölligen Stange zu schätzen, um die Entfernung desselben vom Centrum des Winkelmessers zu bestimmen. Alle diese Einflüsse wirkten um so nachtheiliger je kleiner die Stationen waren. Hieraus ergibt sich, dass die Azimute, wenn sie durch eine grössere Anzahl Stationen durchgehn, zuletzt ziemlich bedeutende Differenzen zeigen müssen; wenn gleich die numerische Bestimmung des wahrscheinlichen Betrags dieser Differenzen a priori sehr schwierig ist.

Die Unterschiede der Polhöhen und Längen zwischen den erwähnten 7 Hauptpunkten P^1, P^{11} etc. hängen von den Azimuten und Entfernungen ab. Da der Lauf unserer Operationslinie der Richtung West-Ost näher kam als der Richtung Nord-Süd *), so folgt hieraus, dass die Polhöhenunterschiede vorzugsweise von den Fehlern der Azimute, die Längenunterschiede dagegen von den Fehlern der Entfernungen afficirt werden, mithin letztere genauer sein werden als erstere. Die Polhöhen sind an allen 7 Punkten direct bestimmt, die Längen dagegen nur in der Nähe des Anfangs- und Endpunktes. Ausserdem bringt die Natur der Sache es mit sich und es ist bekannt, dass eine Polhöhenbestimmung wenigstens 10mal genauer ist als eine absolute Längenbestimmung. Es ergibt sich hieraus, dass die beobachteten Polhöhen in allen Fällen vor den abgeleiteten den Vorzug verdienen; die berechneten Längenunterschiede dagegen weit sicherer sind als die beobachteten Längen selbst, mithin diese mit jenen auf einander reducirt werden können und daraus das Mittel genommen werden muss. Hierauf werden wir später zurückkommen.

Die Berechnung der Breiten- und Längen-Unterschiede, aus den Azimuten und Entfernungen zwischen den erwähnten 7 Hauptpunkten, hat H. Fuss nach der bekannten von Bessel (N^o. 86 der Astr. Nachr.) gegebenen

*) Die mittlere Richtung unserer fortschreitenden Operationslinie weicht etwa $27^\circ,5$ von der Richtung WO ab, nämlich Azimut $P^1 P^{124} = 114^\circ 54'$, Azimut $P^{124} P^1 = 300^\circ 9'$ von Nord durch Ost herumgezählt.

strengen Methode mit Benutzung der daselbst gegebenen Constanten und Hülftafeln ausgeführt. Der Gang der Rechnung ist folgender. Nachdem alle in englischen Zollen ausgedrückten Entfernungen durch Abzug des constanten Logarithmus 1,884994 in Toisen verwandelt waren, da dieses die Einheit ist auf der die Besselsche Hülftafel beruht, wurde aus Polhöhe des Punctes 1, Entfernung 1—2, und Azimut 1,2: Polhöhe 2 und Azimut 2,1 gefunden. Die beiden letzteren, mit den beobachteten verglichen, zeigten die Uebereinstimmung zwischen Beobachtung und Rechnung; der halbe Unterschied derselben wurde demnach mit gehörigen entgegengesetzten Zeichen an beide Polhöhen und Azimute angebracht, und alsdann aus diesen und der Entfernung der Längenunterschied 1—2 berechnet. Auf dieselbe Weise wurde die Rechnung zwischen den übrigen Hauptpunkten geführt; das Resultat derselben ist in folgender Tafel zusammengestellt:

Hauptpunkte		Corr. der Beob.
1—2.	log. in Toisen $P^1 P^{11} = 4,537426$	
	Azimut $P^1 P^{11} = 107^\circ 50' 25''$	— 25,5
	« $P^{11} P^1 = 288 26 22$	+ 25,5
	Polhöhe $P^1 = 47 3 49,0$	+ 1,7
	« $P^{11} = 46 52 34,7$	— 1,7
	Längenuntersch. $P^1 P^{11} = 0 50 21,0$	
2—3.	log. in Toisen $P^{11} B^{31} = 4,818379$	
	Azimut $P^{11} B^{31} = 138^\circ 6' 0''$	— 17,0
	« $B^{31} P^{11} = 318 53 32$	+ 17,0
	Polhöhe $P^{11} = 46 52 34,7$	+ 0,9
	« $B^{31} = 46 0 44,4$	— 0,9
	Längenuntersch. $P^{11} B^{31} = 1 6 24,4$	
3—4.	log. in Toisen $B^{31} P^{48} = 4,792715$	
	Azimut $B^{31} P^{48} = 151^\circ 48' 44''$	+ 31,5
	« $P^{48} B^{31} = 332 20 50$	— 31,5
	Polhöhe $B^{31} = 46 0 44,4$	+ 3,5
	« $P^{48} = 45 3 9,2$	— 3,5
	Längenuntersch. $B^{31} P^{48} = 0 43 30,1$	
4—5.	log. in Toisen $P^{48} B^{70} = 4,852359$	
	Azimut $P^{48} B^{70} = 128^\circ 43' 48''$	— 7,0
	« $B^{70} P^{48} = 309 41 1$	+ 7,0
	Polhöhe $P^{48} = 45 3 9,2$	— 4,3
	« $B^{70} = 44 15 39,1$	+ 4,3
	Längenuntersch. $P^{48} B^{70} = 1 21 20,7$	
5—6.	log. in Toisen $B^{70} B^{83} = 4,672420$	
	Azimut $B^{70} B^{83} = 126^\circ 53' 26''$	— 16,5
	« $B^{83} B^{70} = 307 30 51$	+ 16,5
	Polhöhe $B^{70} = 44 15 39,1$	+ 2,2
	« $B^{83} = 43 45 47,1$	— 2,2
	Längenuntersch. $B^{70} B^{83} = 0 54 39,2$	

Hauptpunkte.		Corr. der Beob.
6—7.	log. in Toisen $B^{83} P^{124} = 5,016166$	
	Azimet $B^{83} P^{124} = 68^{\circ} 48' 12''$	+ 45,0
	« $P^{124} B^{83} = 250 28 35$	— 45,0
	Polhöhe $B^{83} = 43 45 47,1$	— 9,4
	« $P^{124} = 44 23 29,3$	+ 9,4
	Längenuntersch. $B^{83} P^{124} = 2 22 6,7$	

Hieraus folgt, von P^1 an gerechnet, auf welchen Punct ich alles beziehen werde, die Länge von:

$$P^1 = 0^{\circ} 0' 0,0$$

$$P^{11} = 0 50 21,0$$

$$B^{31} = 1 56 45,4$$

$$P^{48} = 2 40 15 5$$

$$B^{70} = 4 1 35,8$$

$$B^{83} = 4 56 15,0$$

$$P^{124} = 7 18 21,7$$

Wie zu erwarten war, sind die Correctionen der Azimute in der obigen Zusammenstellung die bedeutenderen; hauptsächlich zwischen Punct 6—7, freilich einer Entfernung von 40 Stationen, wo auch die grössten Polhöhen-Correctionen vorkommen. Letztere erhalten in dem Falle einiges Gewicht, wenn die Verbindung der Polhöhe eines Hauptpunctes mit der des zunächst vorhergehenden und nachfolgenden, die Correction der ersteren mit gleichem Zeichen und von nahe zu gleicher Grösse ergiebt. So erfordert z. B. die Polhöhe von P^{48} aus der Verbindung mit B^{31} die Correction — 3,5; aus der Verbindung mit B^{70} : — 4,3. Für die Realität dieser Correction spricht auch die Beobachtung in P^{124} die gleichfalls eine um 3" kleinere Polhöhe giebt. Dieses kann indessen auch zufällig sein und die immerhin kleinen Correctionen beweisen wenigstens dass in den Beobachtungen und Rechnungen keine Versehen vorgefallen sind.

Um die Berechnung der Längen- und Breitenunterschiede, den wichtigsten Theil dieser Arbeit, auf welchem alle unsere geographischen Positionen beruhen, einer Prüfung zu unterwerfen, wiederholte ich dieselben nach einem anderen einfachen Verfahren, auf welches unser hochverehrter Director Akademiker Struve mich aufmerksam machte.

Bezeichnet man nämlich durch s die geodätische Entfernung zweier Puncte auf der Erdoberfläche, durch S die Entfernung ihrer Parallelen, durch α und $\alpha' + 180^{\circ}$ die gegenseitigen Azimute, und durch φ , φ' ihre Polhöhen, so ist nach den schönen von Bessel *) gegebenen Formeln:

$$\sin \alpha' = \sin \alpha \frac{\cos u}{\cos u'}$$

$$S = s \frac{\cos \frac{1}{2}(\alpha + \alpha')}{\cos \frac{1}{2}(\alpha - \alpha')} \left\{ 1 + \frac{1}{12} \left(\frac{s\varphi'}{A} \right)^2 \frac{\sin \alpha' \sin \alpha}{\cos \frac{1}{2}(\alpha - \alpha')^2} + \dots \right\};$$

wo $\tan u = \tan \varphi \sqrt{1 - ee}$; $\tan u' = \tan \varphi' \sqrt{1 - ee}$; $\varphi' \varphi = 1 + ee \cos(u + u')$, und e und A bekanntlich die Excentricität und grosse Axe der Erdmeridiane bedeuten.

*) Gradmessung in Ostpreussen, Astr. Nachr. N. 86, 533, 433.

Durch die erste Formel lassen sich die Azimute unter einander vergleichen, und die an dieselben zum Behuf der Uebereinstimmung anzubringenden Correctionen finden. Durch die zweite erhält man mit den berichtigten Azimuten die Entfernung S der Parallelen. Verwandelt man diese, mittelst der neuesten Besselschen Erddimensionen (A. N. 438 am Ende), in Bogentheile des Meridians, so hat man den Unterschied der Polhöhen, kann also je zwei benachbarte beobachtete Polhöhen untereinander vergleichen, und erhält mithin auch die an die einzelnen Polhöhen anzubringenden Correctionen. Nachdem Azimute und Polhöhen so berichtet sind, bleibt noch die Bestimmung des Längenunterschiedes beider Punkte übrig, zu der man auf folgendem einfachen Wege mit grosser Schärfe gelangt. Reducirt man nämlich das sphäroidische Dreieck, welches sich durch die Seiten s , S und den Zwischenwinkel α bildet, auf das analoge ebene, indem man von dem Zwischenwinkel den ihm angehörigen sphäroidischen Excess abzieht, so lässt sich die Länge der dritten Seite durch die ebene Trigonometrie finden. Den sphäroidischen Excess des Winkels α findet man aber $\varepsilon = \frac{\frac{1}{6} s \cdot S \cdot \sin(\alpha - \varepsilon)}{r' r'' \sin 1''}$, wo r' den Krümmungshalbmesser im Meridian, r'' senkrecht gegen denselben für die mittlere Polhöhe $\frac{1}{3}(\varphi + 2\varphi')$ bedeutet, welche Halbmesser wie alle übrigen Erddimensionen aus N^o 438 der Astr. Nachr. genommen werden können. Die so gefundene dritte Seite B ist eine durch die beiden auf dem Parallelkreise liegenden Winkelpunkte des Dreiecks gelegte geodätische Linie, weicht aber als solche von der linearischen Länge des zwischen ihnen liegenden Bogens des Parallelkreises sehr wenig ab. Wenn daher p den Werth einer Bogensecunde des Parallels, für die Polhöhe φ' , bedeutet, wie er sich Astr. Nachr. N^o 438 in Toisen ausgedrückt findet: so ist $\frac{B}{p} = l$ schon ein sehr genäherter Werth des Längenunterschiedes in Bogensekunden ausgedrückt. Der wahre Längenunterschied λ findet sich dann endlich mit mehr als erforderlicher Genauigkeit durch den Ausdruck:

$$\lambda = l + \frac{1}{24} l^3 \sin^2 \varphi \cdot \sin^2 1''$$

Das zweite Glied dieser Formel beträgt nur 0'',29 für die Verbindung der Hauptpunkte 6 und 7, wo der grösste Längenunterschied von 2^o 22' stattfindet. — Man ersieht leicht, dass man auf ganz analoge Weise das andre Dreieck, das sich durch s , S und den Zwischenwinkel α' bildet, auflösen kann, wo die gefundene dritte Seite für die Polhöhe φ in Bogentheile des Parallels verwandelt denselben Längenunterschied geben muss, und dass man so eine scharfe Controle der Rechnung gewinnt.

Auf diesem Wege habe ich sämmtliche 7 Punkte durchgerechnet, aber durchgängig eine solche Uebereinstimmung mit den Resultaten des H. Fuss gefunden, dass an denselben nichts zu ändern war.

Nachdem wir durch diese 7 astronomischen Punkte gleichsam ein festes Gerippe für unsere Untersuchung gewonnen, können wir nun die dazwischen liegenden ins Dreiecksnetz aufgenommenen Städte, Dörfer etc. in Bezug auf Breite und Länge an dieselben anschliessen. Auch die Berechnung dieses ganzen Theils verdanken wir H. Fuss. Da es indessen zu weitläufig wäre das Detail derselben hier mitzutheilen, so werde ich nur die Resultate in folgender Tafel zusammenstellen, wo $\Delta\varphi$, ΔL die Unterschiede der Polhöhen und Längen (+ nördlich und resp. östlich) bedeuten, und in der letzten Columnne auch schon die Längen von P^1 gerechnet angegeben sind.

N a m e.	Bestim- mungs- punct.	$\Delta \varphi$	ΔL	ΔL von P' +
Kagalnik, Kirche	P^1	+ 0° 0' 36,0	+ 0° 0' 49,5	0° 0' 49,5
Novo-Nicolajewka, Kirche . . .	P^1	- 0 5 14,8	+ 0 18 16,1	0 18 16,1
Novo-Bataisk, Kirche	P^1	- 0 10 1,6	+ 0 28 20,2	0 28 20,2
Kagalnitzkaja Stanitza, Kirche .	P^{11}	+ 0 0 25,9	- 0 0 11,2	0 50 9,8
Novo-Jegorlik, Kirche	P^{11}	- 0 18 55,4	+ 0 30 29,1	1 20 50,1
Sredni-Jegorlik "	P^{11}	- 0 30 21,8	+ 0 39 52,8	1 30 13,8
Pestschanokopsk "	P^{11}	- 0 40 27,0	+ 0 55 51,6	1 46 12,6
Letnitzkoje "	B^{31}	+ 0 0 14,8	- 0 0 7,7	1 56 37,7
Novo-Troitzk "	B^{31}	- 0 38 1,0	+ 0 17 3,0	2 13 48,4
Roshestwenskaja "	B^{31}	- 0 47 58,3	+ 0 34 6,0	2 30 51,4
Stawropol, Cathedrale	P^{48}	- 0 0 0,5	+ 0 0 26,2	2 40 41,7
Beschpagir, Kirche	P^{48}	- 0 2 15,6	+ 0 24 0,5	3 4 16,0
Alexandrow "	P^{48}	- 0 20 23,6	+ 1 1 35,2	3 41 50,7
Alexandria "	B^{70}	- 0 2 12,7	+ 0 0 41,3	4 2 17,1
Georgiewsk "	B^{70}	- 0 6 49,3	+ 0 8 26,9	4 10 2,7
Jekaterinograd, Kirche	B^{83}	+ 0 0 0,1	- 0 1 13,3	4 55 1,7
Pawlodolsk "	B^{83}	- 0 2 32,9	+ 0 13 23,9	5 9 38,9
Mosdok, Russ. Cathedrale . . .	B^{83}	- 0 1 44,8	+ 0 25 4,8	5 21 19,8
" Arm. Kirche	B^{83}	- 0 1 28,1	+ 0 24 46,6	5 21 1,6
Koliugai, Kirche	B^{83}	- 0 4 2,0	+ 0 41 18,5	5 37 33,5
Istscherskaja, Kirche	B^{83}	- 0 2 42,4	+ 0 52 40,5	5 48 55,5
Naur, Kirche	B^{83}	- 0 6 45,9	+ 1 3 46,0	6 0 1,0
Suchoborosdinsk, Station	P^{124}	- 0 31 4,2	- 0 2 46,2	7 15 35,5
Kisljar, Russ. Cathedrale	P^{124}	- 0 32 38,2	+ 0 5 27,7	7 23 49,4
" Armen. Kirche	P^{124}	- 0 32 6,1	+ 0 5 52,7	7 24 14,4
Tschernoi Rynok, Belv.	P^{124}	- 0 0 16,0	- 0 4 2,4	7 14 19,3

Hieran schliessen sich die Spitzen des Caucasus, deren Längen- und Breitenunterschiede ich nach der oben erwähnten Methode aus den pag. 189 gegebenen Azimuten und den p. 374 gegebenen Entfernungen berechnet habe.*)

Beschtai	B^{70}	- 0° 9' 31,6	- 0° 19' 3,0	3° 42' 32,8
Elbrus West-Kuppe	B^{70}	- 0 54 9,2	- 0 54 6,6	3 7 29,2
" Ost-Kuppe	B^{70}	- 0 54 30,9	- 0 53 26,9	3 8 8,9
Anonymus	B^{83}	- 0 42 32,7	- 1 2 15,8	3 53 59,2
Kasbek	B^{83}	- 1 3 42,7	+ 0 16 4,2	5 12 19,2

*) H. Sawitsch findet in seiner Dissertation »über die Höhe des Caspischen Meeres, Dorpat 1839« die Breiten und Längen der Caucasus-Spitzen um einige Sec. anders; doch waren bei seiner damaligen, vorläufigen Rechnung, alle Elemente derselben noch nicht so genau bekannt als jetzt, und die hier gegebenen Positionen sind deshalb für sicherer anzusehn.

Hiermit erhalten wir nun folgende aus unseren Beobachtungen sich ergebende *definitive Breiten und Längen*, wo die mit einem * bezeichneten Breiten unmittelbar beobachtete, die übrigen aus den nächsten Bestimmungspunkten nach Anbringung der dieser Verbindung zukommenden Correction berechnete sind.

Namen der Orte.	Breite.	Oestliche Länge von Ferro.
1. Novo-Tscherkask, Stadt, Kirche des heil. Nicolaus	47°24'34''9 *	57° 45' 5''9
2. Kagalnik, Dorf, Kirche	47 4 26,3 *	56 58 34,5
3. Novo-Nicolajewka, Dorf, Kirche	46 58 37,6 *	57 16 1,1
4. Novo-Bataiskaja, Dorf, Kirche	46 53 49,1	57 26 5,2
5. Kagalnitzkaja, Stanitza, Kirche.	46 52 59,7 *	57 47 54,8
6. Novo-Jegorlitzkaja, Stanitza, Kirche .. .	46 33 40,2	58 18 35,1
7. Sredni-Jegorlitzkoje, Dorf, Kirche.....	46 22 13,8	58 27 58,8
8. Pestschanokopskoje, Dorf, Kirche.....	46 12 8,6	58 43 57,6
9. Letnitzkoje, Dorf, Kirche.....	46 0 52,3 *	58 54 22,7
10. Novo-Troitzkaja, Stanitza, Kirche.....	45 22 46,9	59 11 33,4
11. Roshestwenskaja, Stanitza, Kirche	45 12 49,6	59 28 36,4
12. Stawropol, Stadt, neue Cathedrale (Sobor)	45 3 9,4 *	59 38 26,7
13. Beschpagir, Stanitza, Kirche	45 0 54,5 *	60 2 1,0
14. Alexandrow, Flecken, Kirche	44 42 41,3	60 39 35,7
15. Alexandria, Stanitza, Kirche.....	44 13 26,9 *	61 0 2,1
16. Georgiewsk, Stadt, Kirche	44 8 52,0	61 7 47,7
17. Jekaterinogradskaja, Stanitza, Kirche.....	43 45 47,2 *	61 52 46,7
18. Pawlodolskaja, Stanitza, Kirche.....	43 43 10,0	62 7 23,9
19. Mosdok, Stadt, Russische Cathedrale.....	43 43 58,1	62 19 4,8
20. „ „ Armenische Kirche	43 44 14,8	62 18 46,6
21. Koliugai, Stanitza, Kirche.....	43 41 40,9	62 35 18,5
22. Isterskaja, Stanitza, Kirche	43 43 0,5	62 46 40,5
23. Naur, Stanitza, Kirche.....	43 39 0,6 *	62 57 46,0
24. Suchoborosdinsk, Station.....	43 52 29,8 *	64 13 20,5
25. Kisljar, Stadt, Russische Cathedrale.....	43 51 0,5	64 21 34,4
26. „ „ Armenische Kirche	43 51 32,6	64 21 59,4
27. Tschernoi Rynok, Dorf, Herrenhaus.	44 23 13,3 *	64 12 4,3
28. Beschtan, Berg in der Nähe von Pätigorsk	44 6 7,5	60 40 17,8
29. Elbrus, Berg, westlicher Gipfel	43 21 29,9	60 5 14,2
30. „ „ östlicher Gipfel	43 21 8,2	60 5 53,9
31. Anonymus, Berg	43 3 14,4	60 51 44,2
32. Kasbek, Berg	42 42 4,4	62 10 4,2