VI. Untersuchungen über die irdische Strahlenbrechung.

§ 44.

Das von mir in § 15, Seite XXV u. f., über die irdische Strahlenbrechung gesagte darf schon für sich als ein erhebliches Resultat angesehen werden, indem es die wichtige Thatsache, dass der Refractionscoefficient μ für die Zeit der ruhigen Bilder ein nahezu unveränderlicher ist, ausser Zweifel stellt. Ich hielt es indess für geeignet, das reichhaltige Material, welches unsere Expedition in Bezug auf die irdische Strahlenbrechung darbietet, einer vollständigern und ganz consequenten Bearbeitung zu unterwerfen. Der nachstehende Abschnitt enthält die Darstellung der Ergebnisse dieser Untersuchung. Um jedem Missverständnisse vorzubeugen, bemerke ich hier sogleich, dass ich in nachfolgendem mit ϱ den jedesmaligen Winkelwerth der Refraction, mit μ den jedesmaligen sogenannten Refractionscoefficienten bezeichne, wenn $\varrho = \mu C$, und C wie früher die Amplitudo, d. h. den in Bogentheilen ausgedrückten Abstand des Objects vom Instrumente, bedeutet.

§ 45.

Die beiden § 15, Seite XXV, erwähnten, nach Sabler's Untersuchungen bestimmten Coefficienten der *normalen, bei vollkommener Ruhe der Bilder* am Nachmittage gültigen, Refraction sind:

$\mu = 0{,}0876 \mp 0{,}0019$, aus den kurzen Entfernungen, deren Mittelwerth $C = 115''{,}4$,

$\mu = 0{,}0884 \mp 0{,}0013$, aus den längern « « « $C = 230{,}7$.

Diese beiden Werthe von μ sind aber ohne Berücksichtigung des Biegungscoefficienten der drei angewandten Instrumente abgeleitet worden. Aus

$$\varrho = 90^0 + \frac{C}{2} - \frac{(z+z')}{2}$$

folgt:

$$d\varrho = -\tfrac{1}{2}\,(dz+dz'); \text{ und } d\mu = \frac{d\varrho}{C} = -\frac{dz+dz'}{2C}.$$

Statt dz und dz' sind hier die Seite LV bestimmten Biegungscoefficienten (Verbesserungen der beobachteten Zenithdistanzen) zu setzen, nämlich:

$$b = +1''{,}05 \mp 0''{,}30 \text{ für } \Sigma;\; b' = -2''{,}18 \mp 0''{,}62 \text{ für } S;\text{ und } b'' = -6''{,}62 \mp 1''{,}20 \text{ für } F.$$

Bei der ersten Bestimmung aus den kurzen Distanzen ist z die von Σ am Hauptsignale beobachtete Zenithdistanz, folglich $dz = +1''{,}05 \mp 0''{,}30$; und z' das Mittel der von S und F an den Basispuncten beobachteten Zenithdistanzen, also $dz' = -4''{,}40 \mp 0''{,}68$; es wird also:

$$-\tfrac{1}{2}\,(dz+dz') = +1''{,}67 \mp 0''{,}37, \text{ und hiernach } d\mu = \frac{+1''{,}67 \mp 0''{,}37}{115''{,}4} = +0{,}0145 \pm 0{,}0032;$$

$$\mu = 0{,}1021 \mp 0{,}0037.$$

Mit noch grösserer Zuverlässigkeit ist der zweite Coefficient $\mu = 0{,}0884$ bestimmt worden, der auf Sabler's mit dem vollkommeneren Universalinstrumente an jedem Hauptpuncte beobachteten Zenithdistanzen der benachbarten Hauptsignale beruht. Um mich von der Richtigkeit seiner Ableitung zu überzeugen, habe ich das ganze Material der reciproken, um einen Tag von einander abliegenden, an je zwei benachbarten Hauptpuncten angestellten Beobachtungen einer neuen Berechnung unterworfen, mit Berücksichtigung aller Entfernungen und relativen Gewichte. Die reciproken Beobachtungen in jedem P^n und P^{n+1} liefern nämlich zwei Gleichungen, die als Unbekannte μ und den Höhenunterschied u enthalten, und folglich nach Eliminirung von u sofort zur Kenntniss von μ führen. Durch diese neue Rechnung erhielt ich, aus den 115 verschiedenen Bestimmungen, $\mu = 0{,}0872 \mp 0{,}0013$. Dieser Werth stimmt mit dem von Sabler selbst gefundenen auf 0,0012 überein, und hat genau den von ihm angegebenen wahrscheinlichen Fehler. Um hieran die Verbesserung für die Biegung anzubringen, ist $dz = dz' = +1''{,}05$, und wir erhalten $d\varrho = -1''{,}05 \mp 0''{,}30$; folglich $d\mu = -\frac{1''{,}05 \mp 0''{,}30}{230''{,}7} = -0{,}0046 \mp 0{,}0013$; und hiemit

$$\mu = 0{,}0826 \pm 0{,}0018.$$

Beide μ beziehen sich auf eine Barometerhöhe von $B = 29{,}385$ engl. Zollen, Temp. des Quecksilbers $= 0$, und auf eine Lufttemperatur $T = +15^\circ{,}9$ R., welche Grössen die Mittel der gleichzeitig an den verschiedenen Standpuncten beobachteten Angaben des Barometers und des Thermometers sind. Wenn wir beide auf dem späterhin erörterten Wege auf ein mittleres $b = 29{,}00$ und $t = +16^\circ{,}0$ reduciren, so erhalten wir für den mittleren Refractionscoefficienten λ die Werthe:

	$c =$	Mittl. Höhe der Gesichtslinie
$\lambda = 0{,}0814 \mp 0{,}0018$	$230''{,}7$	42 Fuss
$\lambda = 0{,}1006 \mp 0{,}0037$	115,4	16 «

Ich habe hier die mittlere Höhe der Gesichtslinie über dem Erdboden hinzugefügt, die späterhin zu beachten sein wird. Sie ist für jede der Gruppen aus einer sorgfältigen Untersuchung der Höhen der Signale und der Instrumente über dem Boden, der Höhen der Kurgane, worauf die Hauptsignale standen, und der Höhenunterschiede zwischen den Haupt- und Basissignalen abgeleitet worden, und als Mittelwerth auf etwa 2 bis 3 Fuss sicher.

§ 46.

Wenn sich aus den reciproken gleichzeitigen Beobachtungen an den Hautpuncten P und den Basispuncten B, der Kleinheit der Refraction wegen, kein so genauer Werth des normalen Coefficienten μ ableiten lässt, wie aus grösseren Entfernungen, so führen sie dagegen mit Sicherheit zur Erkenntniss einer eigenthümlichen Thatsache. An je 3 benachbarten Puncten, B^{n-1}, P^n und B^n, beobachteten S, Σ und F gleichzeitig, jeden Nachmittag, die gegenseitigen Zenithdistanzen, so dass zwischen den ersten und letzten Zenithdistanzen ein Zeitraum von 1 Stunde bis 1 St. 50''' lag. In diesem Intervalle waren anfangs die Bilder *negativ unruhig*, dann trat die *Ruhe* derselben ein, und am Schluss waren die Bilder jedesmal *positiv unruhig*. Alle 3 Beobachter fanden fast ohne Ausnahme eine mit der Zeit fortgehende Abnahme der Zenithdistanzen, also eine Zunahme der Refraction, vom Anfange bis zum Schluss der Beobachtungen jedes Tages. Die Tagebücher des Jahres 1837 bieten uns, vom 5. April bis 25. October, 107 gleichzeitig von Fuss und Sabler bestimmte Veränderungen der Refraction, und 108 von Sawitsch und Sabler erhaltene; Werthe, die durch die Veränderungen der Zenithdistanzen erkannt wurden, also von den Biegungscoefficienten der Instrumente unabhängig sind. Vereinigen wir die Bestimmungen von Fuss und Sawitsch, und ebenso die beiden mit ihnen correspondirenden Reihen Sabler's zu einem mittleren Resultate, so finden wir:

Aus 215 Bestimmungen für 84 Minuten Zwischenzeit

die von Σ beobachtete mittlere Zunahme der Refraction $d\varrho = 14''\!,41$ mit dem w. F. $\mp 0''\!,51$,

« « *Fu. S* « « « « « $d\varrho' = 20{,}70$ « « « « $\mp 0{,}66$.

Der geringe w. F. beider Werthe beweist, dass ihr Unterschied $d\varrho' - d\varrho = 6''\!,29$ eine mit Sicherheit bestimmte Grösse, und nicht ein zufälliges Ergebniss der Unsicherheit der Bestimmungen ist, und wir haben als Mittel $d\varrho' = 1{,}404\, d\varrho$, d. h. die gleichzeitige Veränderung der Refraction war an den Basispuncten fast um die Hälfte grösser als an den Hauptsignalen. Nahezu lagen der Anfang und das Ende der Messungen jedes Tages gleichweit nach beiden Seiten von der Zeit der Ruhe der Bilder. Nehmen wir für diese, aus § 45, den Refractionscoefficienten $\mu = 0{,}1021$, so erhalten wir, da der Abstand C im Mittel $115''\!,4$ beträgt, für diese Zeit die Refraction $11''\!,78$, und also:

	Für die Hauptpuncte		Für die Basispuncte	
42^m vor der Ruhe der Bilder	$\varrho = 4''\!,58$	$\mu = 0{,}0397$	$\varrho' = 1''\!,43$	$\mu' = 0{,}0124$
Zur Zeit « « « «	$\varrho = 11{,}78$	$\mu = 0{,}1021$	$\varrho' = 11{,}78$	$\mu' = 0{,}1021$
42^m nach « « « «	$\varrho = 18{,}99$	$\mu = 0{,}1646$	$\varrho' = 22{,}13$	$\mu' = 0{,}1918$

Wir kommen durch diese Zahlen zu folgendem Satze:

die Curve, welche der Lichtstrahl bei den nicht normalen Refractionen durchlief, war eine gegen die Chorde unsymmetrische. Der Winkel zwischen der Chorde und der Tangente der Curve war an den Hauptpuncten geringeren, an den Basispuncten grösseren Veränderungen in einem bestimmten Sinne unterworfen.

Sabler hat S. 250 u. f. des Textes auf diesen Satz schon aufmerksam gemacht, und dessen Erklärung mit den Worten gegeben: *Im Durchschnitt hatten die Signale eine etwas höhere Lage als die Basispuncte, daher findet man im Journale die Aenderungen der Zenithdistanzen bei letzteren im Durchschnitt auch grösser als bei ersteren.* In der That ist die Höhe des Auges des Beobachters am Hauptsignale, das sich auf einem ohngefähr 15 Fuss hohen Kurgane befand, etwa 20 Fuss über dem Grunde gewesen, während das des Beobachters am Basispuncte nur um 5 Fuss vom umliegenden Boden abstand. Aus dieser Ursache mussten die durch den Boden in der Strahlenbrechung hervorgebrachten Störungen an den Basispuncten die grösseren sein, und zwar in beiden Fällen, wenn diese Störungen negativ und wenn sie positiv wirkten. Jede solche Störung ist eine von der Oertlichkeit bedingte, und entzieht sich also fast ganz der Analyse und der Rechnung. Wollen wir daher irgend einen Schritt in der Erkenntniss der irdischen Strahlenbrechung vorwärts machen, so müssen wir das ungestörte Phänomen erforschen, d. h. diejenigen Strahlenbrechungen untersuchen, bei denen durch die Ruhe der Bilder die Abwesenheit der Störung angezeigt worden ist, und die als normale Strahlenbrechungen betrachtet werden dürfen. Es scheint mir, dass unsere Kenntniss der irdischen Strahlenbrechung gerade deswegen so wenig gefördert ist, weil man das in der Ruhe der Bilder vorhandene Kriterium der normalen Refraction nicht erkannt hatte, und sich an die Erklärung der gestörten Erscheinungen früher wagte, als man die Gesetze der ungestörten ermittelt hatte.

§ 47.

Den wichtigsten Beitrag zur Kenntniss der irdischen Strahlenbrechung und deren Veränderungen liefern uns nun die von 11 Standpuncten der Operationslinie und von 2 Hülfspuncten aus gemessenen Zenithdistanzen der 5 Bergspitzen: Beschtau, Elbrus Westkuppe, Elbrus Ostkuppe, Kasbek und Anonymus. Es sind von unsern Astronomen die Höhen dieser Spitzen über dem Meere, mit Eliminirung der Refraction, aus denjenigen ausgewählten Beobachtungen abgeleitet worden, welche gleichzeitige Zenithdistanzen zweier in bedeutend ungleicher Entfernung gesehenen Bergspitzen darbieten; wobei die Höhen der Standpuncte, die wirklich bis auf wenige Zolle sicher sind, als fehlerfrei angesehen werden durften. Umgekehrt können wir jetzt die gefundenen Berghöhen zur Bestimmung der Refraction für jede einzelne Beobachtung ohne Ausnahme verwenden, und so zu genäherten Werthen der jedesmaligen Refraction gelangen, die nur noch denjenigen Unsicherheiten unterliegen, die den Fehlern der vorausgesetzten Berghöhen entsprechen. Berechnen wir, aus dem Höhenunterschiede des Berges und des Standpunctes $B-S=u$, diejenige Zenithdistanz z', die stattfinden würde, wenn die Wirkung der Refraction Null wäre, so erhalten wir, durch Vergleichung dieses z' mit dem beobachteten z, sofort den Winkelwerth der Refraction $\varrho=(z'-z)$.

Ist u der Höhenunterschied, C, wie immer, der in Secunden ausgedrückte geodätische Bogen zwischen dem Standpunct und dem Berge, und D' die diesem zugehörigen Chorde, in der Höhe des Standpunctes genommen, so findet sich z' am einfachsten, unter Benutzung der Gaussischen Logarithmen, durch folgende Formeln:

$$u'=u\cos\tfrac{1}{2}C;\ d=u\sin\tfrac{1}{2}C,$$
$$\text{tang } q=u':(D+d);\ z'=90^\circ+\tfrac{1}{2}C-q.$$

Hiermit wird:

$$\varrho=z'-z, \text{ die beobachtete Refraction,}$$
$$\mu=\frac{\varrho}{C}, \text{ der beobachtete Refractionscoefficient.}$$

Wenn wir für die Höhe des Berges H eine Verbesserung dH annehmen, so wird $du=dH$, $dz'=-\frac{du}{D'\sin 1''}$ und $d\mu=\frac{-du}{C.D'.\sin 1''}$.

§ 48.

Die nachfolgende Tafel enthält alle zur Berechnung der z' erforderlichen Hülfsgrössen, diese z' selbst, berechnet aus den von Sabler, Seite LXV, bestimmten Höhen der Bergspitzen über dem Meere, nämlich Beschtau = 55072, Elbrus W = 222167, Elbrus O = 221365, Kasbek = 198538 und Anonymus = 203233 engl. Zoll, und den definitiven Höhen der Instrumente an den Standpuncten.

Standpunct	Beobachteter Berg	Log. D' in engl. Zollen	Log. D'. sin $1''$	Amplitudo C	Log. C	Höhe des Instruments über d. Meere in engl. Zollen	Höhe des Berges über dem Instrument in engl. Zollen $u =$	Berechnete Zenithdistanz $z' =$
P^{70}	Beschtau	6,080845	0,76642	989″,2	2,99529	15346	39726	88° 14′ 55″,3
Q	Beschtau	5,982632	0,66821	788,5	2,89680	17671	37401	87 52 49,5
D	Beschtau	5,704786	0,39036	415,6	2,61868	18047	37025	85 52 44,8
B^{70}	Beschtau	6,085853	0,77143	1000,6	3,00026	13886	41186	88 12 12,0
	Elbrus W	6,688519	1,37409	4012,8	3,60345		208281	88 6 54,4
	Elbrus O	6,687847	1,37342	4007,0	3,60282		207479	88 7 11,9
P^{75}	Beschtau	6,324323	1,00990	1731,4	3,23840	12777	42295 Σ	89 5 32 3
						12760	42312 *FS*	30,7
	Elbrus W	6,669313	1,35489	3834,6	3,58372		209390 Σ	87 57 59,1
							209407 *FS*	58,5
	Elbrus O	6,666933	1,35251	3813,3	3,58130		208588 Σ	87 57 33,4
							208605 *FS*	32,7
	Anonymus	6,621176	1,30675	3439,2	3,53646		190456 Σ	87 52 12,0
							190473 *FS*	11,1
B^{79}	Beschtau	6,514646	1,20022	2684,4	3,42884	9405	45667	89 34 22,8
	Kasbek	6,702196	1,38777	4143,9	3,61741		189133	88 25 34,3
B^{80}	Beschtau	6,546028	1,23160	2885,5	3,46022	8649	46423	89 38 39,8
	Anonymus	6,609770	1,29534	3346,7	3,52462		194584	87 43 47,5
	Kasbek	6,691420	1,37700	4042,8	3,60668		189889	88 20 57,8
B^{81}	Anonymus	6,629657	1,31523	3502,5	3,54438	7720	195513	87 51 40,7
	Kasbek	6,688979	1,37455	4020,0	3,60423		190818	88 19 22,4
P^{82}	Anonymus	6,641859	1,32743	3602,6	3,55661	7567	195666	87 56 45,3
	Kasbek	6,691038	1,37661	4039,5	3,60633		190971	88 20 3,8
	Elbrus W	6,759794	1,44537	4720,3	3,67397		214600	88 31 11,6
	Elbrus O	6,756922	1,44250	4688,7	3,67105		213798	88 30 33,8
B^{82}	Anonymus	6,646447	1,33202	3645,3	3,56173	7114	196119	87 58 22,0
	Kasbek	6,685870	1,37144	3991,7	3,60116		191424	88 17 44,7
B^{83}	Kasbek	6,674160	1,35974	3895,5	3,59056	6860	191678	88 13 4,0
	Elbrus O	6,778918	1,46449	4931,5	3,69298		214505	88 38 31,4
A^{87}	Kasbek	6,657472	1,34305	3740,2	3,57289	5371	193167	88 5 11,6
	Elbrus W	6,847882	1,53346	5779,9	3,76192		216796	89 2 28,0
	Elbrus O	6,845257	1,53083	5746,3	3,75939		215994	89 1 56,4
Stawropol	Elbrus W	6,878202	1,56378	6217,8	3,79364	20389	201778	89 20 3,8
	Elbrus O	6,880370	1,56594	6248,4	3,79577		200976	89 21 8,2

§ 49.

Die an den 13 Standpuncten beobachteten Zenithdistanzen der 5 Bergspitzen finden sich Seite 174 bis 178 des Textes, bedürfen aber noch, wegen der Biegungscoefficienten der 3 Instrumente, der Verbesserungen $+1''{,}1$ für Sabler's Beobachtungen, $-2''{,}2$ für Sawitsch und $-6''{,}6$ für Fuss. Nachdem diese angebracht sind, werden die so erhaltenen z, von den in § 48 gegebenen zugehörigen z' abgezogen, sofort die beobachtete Refraction ϱ geben, und durch $\frac{\varrho}{C}$ den beobachteten Refractionscoefficienten μ. So ist zum Beispiel für p^{70} Beschtau in § 48, $z' = 88^\circ 14' 55''{,}3$, und Seite 175, für $3^h 47^m{,}5$ am 13. Juli, das beobachtete $z = 88^\circ 13' 47''{,}9 - 2''{,}2 = 88^\circ 13' 45''{,}7$; woraus $\varrho = 1' 9''{,}6 = 69''{,}6$, und, durch Division mit $C = 989''{,}2$, $\mu = 0{,}0704$ folgt. Dies sind die Zahlen der ersten Zeile der nachfolgenden Zusammenstellung. Auf gleiche Weise sind die übrigen abgeleitet. B ist die Angabe des Barometers in englischen Zollen, die Temperatur des Quecksilbers auf 0° gebracht, und T die beobachtete Lufttemperatur nach der Réaumurschen Scale.

Werthe der irdischen Strahlenbrechung, abgeleitet aus den beobachteten Zenithdistanzen, den definitiven Höhen der Standpuncte und den von Sabler *bestimmten Höhen der Berge, Seite* LXV.

1. Standpunct p^{70}. 1837 Juli 13.

Beobachter	Wahre Zeit	Bild	B	T	Beschtau ϱ	Beschtau μ
S	$3^h 47^m$	ruhig	$28{,}94$ z	$+17^\circ{,}6$	$69''{,}6$	0,0704
S	4 37	ruhig	28,94	$+16{,}0$	71,9	0,0727

2. Standpunct q. 1837 Juli 13.

Beobachter	Wahre Zeit	Bild	B	T	Beschtau ϱ	Beschtau μ
Σ	$4^h 37^m$	ruhig	$28{,}65$ z	$+15^\circ{,}7$	$60''{,}1$	0,0762

3. Standpunct d. 1837 Juli 13.

Beobachter	Wahre Zeit	Bild	B	T	Beschtau ϱ	Beschtau μ
F	$4^h 37^m$	ruhig	$28{,}62$ z	$+15^\circ{,}7$	$30''{,}3$	0,0729

4. Standpunct b^{70}. 1837 Juli 14.

Beobachter	Wahre Zeit	Bild	B	T	Beschtau ϱ	Beschtau μ	Elbrus O ϱ	Elbrus O μ	Elbrus W ϱ	Elbrus W μ
S	$17^h 40^m$	wenig unruhig	$28{,}72$ z	$+15^\circ{,}0$	$98''{,}1$	0,0980*	$300''{,}5$	0,0750	$298''{,}8$	0,0745
F	17 49		28,72	$+15{,}1$	104,5	0,1044*	312,6	0,0780	305,2	0,0761
Σ	18 3	etwas wallend	28,71	$+15{,}4$	103,6	0,1035*	296,3	0,0739	298,1	0,0743
F	18 32		28,69	$+15{,}9$	95,1	0,0951*	300,6	0,0750	299,4	0,0746
S	21 40	unruhig	28,58	$+19{,}0$	66,6	0,0666*	281,2	0,0706*	280,2	0,0698*

5. Standpunct p^{75}. 1837 August 15.

Beobachter	Wahre Zeit	Bild	B	T	Beschtau ρ	Beschtau μ	Elbrus O ρ	Elbrus O μ	Elbrus W ρ	Elbrus W μ	Anonymus ρ	Anonymus μ
F	17^h38^m	unr. ⊙ Aufg.	$28\overset{z}{,}92$	+13°,5	239″,6	0,1384*			297″,5	0,0776		
F	18 22	etwas unruhig	28,92	+14,0	196,1	0,1132*			295,2	0,0770		
S	18 43	etwas unruhig	28,92	+14,5	174,9	0,1010*	282″,6	0,0741	286,7	0,0748		
Σ	18 54	etw. unr. für *B* ruh. für *E* u. *A*	28,92	+14,8	164,7	0,0951*	274,7	0,0720	275,6	0,0719	247″,0	0,0718
Σ	20 25	unruhig	28,92	+18,0	108,8	0,0628*	251,3	0,0659*	253,6	0,0661*	225,7	0,0656*
S	20 30	unruhig	28,92	+18,2	111,3	0,0643*	247,3	0,0648*	256,0	0,0668*	226,4	0,0658*
F	21 17	unruhig	28,91	+23,0	86,9	0,0502*			241,6	0,0630*	226,7	0,0659*

6. Standpunct b^{79}. 1837 August 21.

Beobachter	Wahre Zeit	Bild	B	T	Beschtau ρ	Beschtau μ	Kasbek ρ	Kasbek μ
S	6^h30^m	ruhig	$29\overset{z}{,}13$	+17°,8	203,4	0,0758	288″,2	0,0695

7. Standpunct b^{80}. 1837 August 21.

Beobachter	Wahre Zeit	Bild	B	T	Beschtau ρ	Beschtau μ	Anonymus ρ	Anonymus μ	Kasbek ρ	Kasbek μ
F	18^h43^m		$29\overset{z}{,}20$	+12°,0	231″,6	0,0803*	272″,1	0,0813*	340″,6	0,0843*
F	19 30	ziemlich ruhig	29,19	+14,5	213,5	0,0740	262,1	0,0783	319,5	0,0790
S	19 30	ziemlich ruhig	29,19	+14,5	219,3	0,0760	254,3	0,0760	307,5	0,0760
S	20 7	etwas unruhig	29,19	+16,5	205,2	0,0711			298,0	0,0737

8. Standpunct b^{81}. 1837 August 23.

Beobachter	Wahre Zeit	Bild	B	T	Anonymus ρ	Anonymus μ	Kasbek ρ	Kasbek μ
S	4^h38^m	ruhig	$29\overset{z}{,}11$	+23°,5			273″,0	0,0679
S	5 28	ruhig	29,11	+22,2			275,9	0,0686
S	6 10	zieml. ruh.	29,11	+20,8	241″,1	0,0688	286,0	0,0711

9. Standpunct p^{82}. 1837 August 23.

Beobachter	Wahre Zeit	Bild	B	T	Elbrus O ρ	Elbrus O μ	Elbrus W ρ	Elbrus W μ	Anonymus ρ	Anonymus μ	Kasbek ρ	Kasbek μ
Σ	4^h12^m	fast ruhig	$29\overset{z}{,}14$	+23°,2					236″,4	0,0656	264″,9	0,0655
Σ	6 11	ruhig	29,15	+19,3	317″,2	0,0676	319″,2	0,0676	248,6	0,0690	278,5	0,0689

10. Standpunct b^{82}. 1837 August 23.

Beobachter	Wahre Zeit	Bild	B	T	Anonymus ρ	Anonymus μ	Kasbek ρ	Kasbek μ
F	4^h27^m	ruhig	$29\overset{z}{,}20$	+22°,0	247″,1	0,0678	262″,8	0,0658
F	5 27	ruhig	29,20	+19,6	260,2	0,0714	272,2	0,0682

11. Standpunct b^{83}. 1837 August 24.

Beob-achter	Wahre Zeit	Bild	B	T	Elbrus O ρ	Elbrus O μ	Kasbek ρ	Kasbek μ
S	20^h0^m	ruhig	29,25	+19,0	377″,2	0,0765*	290″,4	0,0746

12. Standpunct a^{87}. 1837 August 29.

Beob-achter	Wahre Zeit	Bild	B	T	Elbrus O ρ	Elbrus O μ	Elbrus W ρ	Elbrus W μ	Kasbek ρ	Kasbek μ
F	5^h29^m	ruhig	29,38	+20,0			399″,6	0,0691	258″,6	0,0691
F	6 2	ruhig	29,38	+18,7			418,9	0,0725	269,9	0,0722
S	6 9	ziemlich ruhig	29,39	+19,0	400″,7	0,0697	416,0	0,0720	265,1	0,0709

13. Standpunct Stawropol.

Datum	Beob-achter	Wahre Zeit	B	T	Elbrus O ρ	Elbrus O μ	Elbrus W ρ	Elbrus W μ
1836 Dec. 24	*S*	20^h15^m	28,30	+ 4,6	514″,2	0,0823	499,3	0,0803
« « 25	*S*	0 1	28,27	+ 5,5	462,7	0,0740	452,0	0,0727
« « «	*S*	4 0	28,27	+ 4,6	491,0	0,0786	472,2	0,0759
1837 Jan. 7	*S*	21 0	28,65	— 7,0	666,4	0,1066	667,9	0,1074
« « «	*S*	21 30	28,65	— 7,0	656,0	0,1050	650,5	0,1046
« « 8	*S*	0 30	28,62	— 3,3	612,0	0,0980	597,9	0,0962
« « «	*S*	3 50	28,55	— 2,7	584,2	0,0935	585,2	0,0941
« « «	*S*	23 40	28,55	— 1,7	568,0	0,0909	551,9	0,0888
« « 9	*S*	20 25	28,46	— 0,3	536,7	0,0859	521,9	0,0840
« « «	*S*	21 20	28,46	+ 0,3	537,0	0,0859	522,4	0,0840
« « 10	*S*	20 28	28,37	+ 0,3	536,0	0,0858	519,9	0,0836
« « 11	*S*	4 10	28,32	+ 0,2	521,0	0,0834	519,9	0,0836
« « 12	*F*	0 32	28,22	— 0,2	577,2	0,0924	578,6	0,0931
« « 14	*S*	1 14	28,37	— 1,0	543,0	0,0869	533,9	0,0859
« « 30	*S*	0 45	28,55	—11,0	655,0	0,1048	657,4	0,1057
« « 31	*F*	1 10	28,42	— 6,0	664,2	0,1063	655,7	0,1054
« Febr. 21	*S*	20 48	28,40	— 4,5	617,0	0,0987	596,2	0,0959
« « 22	*S*	20 25	28,31	— 3,0	657,0	0,1051	646,9	0,1040
« « 26	*S*	23 45	28,40	— 2,0	553,0	0,0885	538,9	0,0867
« « 27	*S*	5 16	28,47	— 2,5	598,0	0,0957	592,9	0,0954
« « «	*S*	19 55	28,55	—10,0	707,0	0,1131	674,9	0,1085
		Mittel	28,436	— 2,224		0,09340		0,09218 k*

§ 50.

Anmerkungen zur Zusammenstellung der beobachteten Refractionen in § 49.

Anmerkung zu 1. 2. *und* 3. Die Beobachtungen des Beschtau am 13. Juli sind die einzigen, welche bei bewölktem Himmel angestellt sind. Für alle übrigen Puncte 4 bis 13 fand wolkenfreier Himmel und Sonnenschein statt, als unerlässliche Bedingung der Sichtbarkeit der hohen Berggipfel, die bedeutend über die Wolkenhöhe hinausragten.

Anmerkung zu 4. *und* 5. Diese Morgenbeobachtungen sind von besonderem Interesse in Bezug auf die Veränderung der Strahlenbrechung bei den in so verschiedenen Entfernungen befindlichen Bergen. Am 14. Juli geht die Sonne unter 44°15′ Breite ungefähr um $16^h 24^m$ wahrer Zeit auf. Die ersten Beobachtungen in b^{70} um $17^h 40^m$ sind also $1^h 16^m$ nach Sonnenaufgang gemacht. Das Bild der 3 Objecte ist noch nicht ruhig, ändert aber während einer Stunde seinen Zustand wenig, auch schwankt die Strahlenbrechung nur geringe. Nehmen wir aus den 4 Beobachtungen von $17^h 40^m$ bis $18^h 32^m$ das Mittel, so ergibt sich:

	Beschtau	Elbrus O	Elbrus W	
um $18^h\ 1^m$, $\varrho =$	100″,3	302″,5	300″,4	Bild etwas unruhig.
und später um $21^h 40^m$, $\varrho =$	66,6	281,2	289,2	« unruhig.
Veränderung $d\varrho =$	—33,7	—21,3	—20,2	

Die Abnahme der Refraction, in 3 Stunden 39^m, ist also hier für den nähern Beschtau sogar etwas grösser als für die in 4facher Entfernung liegenden Spitzen des Elbrus. Beide Berge hatten fast genau dieselbe Zenithdistanz, 88°12′ und 88°6′; es folgt also, dass die ganze Veränderung der Refraction in der Luftschichte zwischen dem Beobachtungspuncte und der Höhe des Beschtau vorgegangen ist; und sie war für diesen Berg deswegen eine grössere, weil der Lichtstrahl nach ihm näher über ein ansteigendes flaches Land ging. Die eigentliche Ruhe der Bilder ist erst zwischen $18^h 32^m$ und $21^h 40^m$ eingetreten. Leider fehlen für dies wichtigste Moment die Beobachtungen. Noch auffallender sind die Beobachtungen in p^{75} am 15. August. Sie beginnen um $17^h 38^m$ mit Sonnenaufgang, und gehen bis $21^h 17^m$. Für diese äussersten Zeiten finden wir:

	Beschtau	Elbrus W	
um $17^h 38^m$, $\varrho =$	239″,6	297″,5	Bild unruhig
um $21^h 17^m$, $\varrho =$	86,9	241,6	« «
Veränderung $d\varrho =$	—152,7	—55,9	

Ohnerachtet der doppelten Entfernung des Elbrus, ist für diesen Berg $d\varrho$ nur ein Drittheil des für den Beschtau gefundenen $d\varrho$. Hier waren offenbar Localeinwirkungen. Der Beschtau erhob sich nur 0°55′ über die Horizontalfläche, und der Elbrus 2°2′, ausserdem aber streifte der Lichtstrahl zum Beschtau dicht über ein langes aufsteigendes Plateau, während die Gesichtslinie zu den andern Bergen theils über ein Thal ging, theils sich auch des grösseren Höhenwinkels wegen rascher vom Boden entfernte. Die für $18^h 54^m$ von Sabler gegebene Characteristik *ruhig* bezieht sich auch nur auf den

Elbrus und Anonymus, indem für dieselbe Zeit dem nähern Beschtau noch die Bezeichnung *etwas unruhig* gegeben wird. Die eigentliche Ruhe für Beschtau ist offenbar erst nach $18^h 54^m$ eingetreten, war aber um $20^h 25^m$ für alle 4 Bergspitzen schon vorbei.

Anmerkung zu 11. Die Beobachtung von Elbrus O ist von der Untersuchung ausgeschlossen worden, weil in Bezug auf Elbrus W ausdrücklich gesagt ist, dass die Bergspitze in Wolken gehüllt war, ein Umstand, der auch Elbrus O verdächtigt.

Anmerkung zu 13. Von den 21 während 2 Monaten in Stawropol von Sawitsch und Fuss beobachteten Zenithdistanzen beider Kuppen des Elbrus, sind die 3 ersten im December zu einer Zeit angestellt, als die Gegend um Stawropol und das zum Gebirge hin liegende Thal noch ohne Schneedecke war. Die übrigen 18 Messungen, vom 7. Januar bis zum 27. Februar, sind vollkommene Winterbeobachtungen, da die ganze Gegend von Stawropol bis zum Gebirge damals mit Schnee bedeckt war. Das Thermometer war jetzt fast immer unter Null, und erhob sich nur einige Male bei Tage bis auf wenige Zehntheile über den Gefrierpunct. Bei den Stawropolschen Beobachtungen haben die Beobachter keine Characteristik des Bildes gegeben, eine Angabe, deren Bedeutsamkeit erst bei der Wiederaufnahme der Arbeiten im Felde, im April 1837, vollständig erkannt wurde. Wir sind aber berechtigt anzunehmen, dass bei allen diesen Beobachtungen das Bild des Berges nicht weit von der Ruhe abwar, weil die Sichtbarkeit des Berges bei jedem starken Wallen des Bildes aufgehört haben würde, da er in der grossen Entfernung von $C = 1^\circ 44' = 180$ Werst, nur wie ein schwaches über dem Horizonte hervorragendes Wölkchen erschien. Auch können wir deswegen das Mittel der Stawropolschen Messungen als der Ruhe der Bilder nahezu entsprechend ansehen, weil die Mittel der Zeiten der Beobachtungen, Vormittags und Nachmittags besonders genommen, sehr nahe auf die Zeit der Ruhe der Bilder fallen, die in der Regel um 0,7 des halben Tagebogens vom Mittage absteht. Freilich müssen wir bei den einzelnen Messungen auf grössere Abweichungen gefasst sein, als bei den Beobachtungen, wo die Ruhe der Bilder als vorhanden angezeigt ist. Dass aus einer Entfernung von 180 Werst keine sichere absolute Höhenbestimmung des Berges möglich ist, sieht man leicht ein. Dagegen aber mussten die Beobachtungen zu einem sicherern Werthe des winterlichen Refractionscoefficienten führen und zugleich zu einer guten Bestimmung des Höhenunterschiedes beider Kuppen. Ich finde im Mittel aus den 21 gleichzeitigen Messungen den Höhenunterschied beider Spitzen E. W. — E. O. = 523 Zoll mit dem w. F. $= \mp 47$ Zoll, abgeleitet aus dem w. F. von 216 Zoll für ein einzelnes E. W. — E. O., der einer Unsicherheit von $5''\!,9$ in den einzelnen Unterschieden der Zenithdistanzen, oder von $5''\!,9 : \sqrt{2} = 4''\!,1$ in der Zenithdistanz einer einzelnen Kuppe entspricht. Der Unterschied E. W. — E. O. ist aber aus den nähergelegenen Puncten der Operationslinie zu 802 Zoll mit noch erheblich grösserer Sicherheit ermittelt worden, Seite LXV, so dass sich hier eine Abweichung von 279 Zoll = 23,3 Fuss ausspricht. Es ist indess nicht schwer, die Ursache dieser Abweichung nachzuweisen. Unsere Beobachter sahen den Elbrus zuerst aus Stawropol in ungeheurer Entfernung. Späterhin auf der Operationslinie, als sie ihm bedeutend näher gerückt waren, erkannten sie sofort, bei der ersten Messung in b^{70}, auf dem äussersten westlichen Rande der Westkuppe ein hervorragendes Felshorn, eine Zacke, und massen von nun an immer die Höhe der äussersten Spitze dieser Zacke, als des erhabensten Punctes der Westkuppe. Da sie in Stawropol von dem Vorhandensein dieses Horns keine Ahndung hatten so beziehen sich die Höhenmessungen daselbst auf die allgemeine obere Begränzung des Berges, nicht auf die Spitze des Horns. Sabler erinnert sich sehr bestimmt, dass er in b^{70} die Spitze des Horns, nach dem Abstand der parallelen Horizontalfäden seines Instruments, um reichlich 10 Secunden über der übrigen Oberfläche der Kuppe erhaben schätzte. Aus dieser Winkelgrösse findet sich die senkrechte Höhe des Horns, $10 . D' \sin 1'' = 237$ Zoll. Der nachbleibende Unterschied von 42 Zoll zwischen 279 und 237 Zoll liegt schon innerhalb des w. F. der ersten Zahl. Wir sehen nun auch, dass E. W. in fast allen einzelnen Fällen einen kleineren Refractionscoefficienten μ giebt als E. O., so dass der Unterschied im Mittel $0{,}09340 - 0{,}09218 = 0{,}00122$ ist, der ganz genau dem Höhenfehler von 279 Zoll für E. W. entspricht. Es ist hieraus ersichtlich, dass von den Stawropolschen Beobachtungen nur die der Ostkuppe, in Verbindung mit den Beobachtungen an den andern Standpuncten, zu einer Untersuchung über die Refraction benutzt werden dürfen.

§ 51.

Die Aufgabe, welche ich mir jetzt stellte, war folgende mehrfache:

1) aus den vorliegenden Beobachtungen zu untersuchen, ob die Refraction bei ruhigen Bildern sich wirklich als eine lineare Function der Amplitudo ansehen lasse, unabhängig von der Höhe des Objects über dem Standpuncte;
2) zu bestimmen, in welcher Art der Werth des normalen Refractionscoefficienten von B und T, den Angaben des Barometers und des Thermometers am Beobachtungsorte, abhängig ist, und sich also durch eine Formel ausdrücken lässt, die B und T als variable Grössen enthält;
3) zu ermitteln, welche Zuverlässigkeit der nach der gefundenen Formel berechneten Refraction für den jedesmaligen Fall der Anwendung zuzuschreiben sei; und hieraus
4) abzuleiten, welche Genauigkeit den allendlich erhaltenen Höhen der Bergspitzen des Caucasus zuzuschreiben sei.

Das Material zur Beantwortung dieser Fragen ist in den Ergebnissen aus dem eigentlichen Nivellement zwischen beiden Meeren, verbunden mit den von 13 Puncten aus beobachteten Messungen der 5 Bergspitzen enthalten. § 49 liefert uns 71 beobachtete μ, bei denen die Ruhe der Bilder wenigstens nahezu stattfand, und zwar:

1*ste Gruppe*, 27 im Sommer erhaltene nachmittägige Werthe von μ, bei welchen das Bild 20 Mal das Praedicat *ruhig*, 2 Mal *fast ruhig*, und 5 Mal *ziemlich ruhig* hatte, und die Lufttemperatur zwischen $+23^\circ{,}5$ und $+15^\circ{,}7$ R. war;

2*te Gruppe*, 23 im Sommer erhaltene vormittägige Werthe von μ, bei welchen indess das Bild nur 5 Mal als *ruhig* bezeichnet war, die übrigen 18 Male als *ziemlich ruhig* oder *etwas unruhig*, und die Lufttemperatur zwischen $+23^\circ{,}2$ und $+14^\circ{,}0$ war;

3te Gruppe, 21 im Winter von Stawropol aus erhaltene Werthe von μ, welche zwar alle ohne Praedicat des Bildes sind, aber, nach Anmerkung zu 13 Seite LXXVII, im Mittel nahezu der normalen Refraction angehören. In dieser Gruppe waren die Thermometerangaben zwischen $+5^\circ,5$ und $-11^\circ,0$, so dass unser ganzes Material Messungen enthält, bei denen die äussersten Temperaturen um $34^\circ,5$ von einander abstehen.

Ausgeschlossen von der Untersuchung sind die 20 vormittägigen Sommerwerthe von μ, bei welchen durch das Praedicat *unruhig*, und nach den Anmerkungen zu 4 und 5 und 11, Seite LXXVI u. f., erkannt war, dass sie gestörten Refractionen angehörten. Es sind die in § 49 mit * bezeichneten.

Aus dem hier über die Praedicate gesagten folgt, dass, so wie das Material der Rechnung unterworfen werden sollte, den drei angezeigten Gruppen verschiedene Genauigkeiten und Gewichte für die einzelnen Werthe zukommen mussten, die grössten der ersten Gruppe, geringere der 2ten, und die geringsten der letzten.

§ 52.

Die Grösse der Refraction wird, abgesehen von der Amplitudo, zunächst durch die Abnahme der Dichtigkeit der Luftschichten nach dem Mariotteschen Gesetze bedingt, dann aber auch durch die mit der Höhe eintretende Veränderung der Temperatur der Luft, welche eine vom Mariotteschen Gesetze unabhängige, in der Regel entgegengesetzte Veränderung der Dichtigkeiten der Luftschichten zur Folge hat. Wir können uns denken, dass aus beiden Ursachen ein solches Gesetz der Abnahme der Dichtigkeit mit der Höhe hervorgeht, dass, wie bei der astronomischen Strahlenbrechung in nicht zu grossen Zenithdistanzen, die Refraction der Dichtigkeit der Luft am Ort des Beobachters proportionirt ist, oder dass, wenn λ den normalen Refractionscoefficienten für einen mittleren Barometer- und Thermometerstand b und t bedeutet, für ein anderes B und T nun

$$\mu = \lambda \cdot \frac{B}{b} \cdot \left(\frac{1 + 0{,}0045\, t}{1 + 0{,}0045\, T}\right) \qquad \text{(I)}$$

wird, wobei angenommen ist, dass das Volumen der Luft zwischen 0° und 80° R. sich von 1 auf 1,360 ändert. Um näherungsweise zu untersuchen, in wie weit diese Formel den 71 beobachteten normalen Refractionscoefficienten genüge, habe ich diese nach den Temperaturen geordnet, und aus 10, 12, 14, 14 und 21 Werthen folgende 5 Mittelwerthe abgeleitet:

B engl. Zoll	T	μ	reducirt auf $b = 29{,}000$ $\mu =$	berechnet nach (I).	berechnet nach (II).	Beob.-Ber. nach (II).
29,188	+21,77	0,06793	0,06750	0,06750	0,06750	0,00000
29,265	+19,15	0,07038	0,06974	0,06823	0,06970	+0,00004
28,593	+16,17	0,07316	0,07420	0,06908	0,07242	+0,00178
29,007	+14,53	0,07503	0,07501	0,06956	0,07400	+0,00101
28,436	— 2,22	0,09340	0,09524	0,07486	0,09524	0,00000

Von $T = +21^\circ,77$ bis $T = -2^\circ,22$ giebt die Beobachtung $d\mu = 0{,}02774$, während die Formel (I) nur $d\mu = 0{,}00736$ darbietet. Wir schliessen hieraus, dass der Coefficient 0,0045 für T bei der irdischen

Strahlenbrechung nicht gültig ist, und finden genähert aus der Vergleichung des 1sten und 5ten Werthes statt dessen 0,0165, einen 3,7 Mal so starken Coefficienten, oder

$$\mu = \lambda \,.\, \frac{b}{B} \cdot \left(\frac{1+0{,}0165\, t}{1+0{,}0165\, T}\right) \qquad \text{(II)}$$

eine Formel, welche die 5 verschiedenen μ, wie die letzte Columne zeigt, schon ziemlich gut darstellt.

§ 53.

Da im vorigen § gezeigt worden, dass die normale Refraction nicht der Dichtigkeit der Luft am Beobachtungsorte proportionirt ist: so hat auch die daselbst gewählte Form des Ausdrucks für μ keine Begründung. Nach einiger Ueberlegung wählte ich nun folgenden Ausdruck:

$$\mu = \lambda \,.\, \frac{B}{b} \cdot (1+\gamma)^{t-T};$$

oder, wenn $\frac{B}{b} = \beta$ und $t - T = \tau$ gesetzt wird:

$$\mu = \lambda \,.\, \beta \,.\, (1+\gamma)^{\tau}. \qquad \text{(III)}$$

Dieser Ausdruck beruht auf den, wie mir scheint, naturgemässen Annahmen, dass erstlich die Refraction dem Barometerstande am Orte des Beobachters proportionirt ist, und zweitens, dass eine Abnahme der Temperatur von einem Grade die Refraction jedesmal um einen bestimmten aliquoten Theil vergrössert.

Wir kommen sofort zu einem genäherten Werth von $1+\gamma$, wenn wir die Mittelwerthe der Refractionen aus den Sommer- und Winterbeobachtungen vergleichen. Vereinigen wir die in § 52 gegebenen 4 ersten Werthe zu einem Mittel, ohne noch die Gewichte zu beachten, so findet sich, bei $b = 29{,}00$ Zoll

$$\text{für } T = +17^{\circ}{,}90 \qquad \mu = 0{,}07161;$$

und der letzte Werth daselbst gibt unmittelbar

$$\text{für } T = -2^{\circ}{,}22 \qquad \mu = 0{,}09525.$$

Hieraus folgt die Gleichung:

$$0{,}07161 \,.\, (1+\gamma)^{20{,}12} = 0{,}09525, \text{ oder } \log\,(1+\gamma) = \frac{\log 9525 - \log 7161}{20{,}12} = 0{,}006155;$$

$$\text{also } 1+\gamma = 1{,}01427.$$

Wenn wir ebenso die 4 Sommerwerthe in § 52 mit ihrem Mittel für $+17^{\circ}{,}90$ vergleichen, so erhalten wir zur Bestimmung von $(1+\gamma)$ folgende 4 Gleichungen:

$$\log 7161 - \log 6750 = 0{,}02567 = 3{,}87 \,.\, \log\,(1+\gamma)$$
$$\log 7161 - \log 6974 = 0{,}01149 = 1{,}25 \,.\, \log\,(1+\gamma)$$
$$\log 7420 - \log 7161 = 0{,}01543 = 1{,}73 \,.\, \log\,(1+\gamma)$$
$$\log 7501 - \log 7161 = 0{,}02015 = 3{,}37 \,.\, \log\,(1+\gamma).$$

Nach den kleinsten Quadraten findet sich hieraus $\log\,(1+\gamma) = 0{,}006730$, folglich

$$1+\gamma = 1{,}01562.$$

Werden die Winterbeobachtungen in Stawropol für sich auf gleiche Weise behandelt, indem die einzelnen μ mit dem für $-2^{\circ}{,}2$ geltenden Mittelwerth $\mu = 0{,}0952$ verglichen werden, so erhält man nach den kleinsten Quadraten $1+\gamma=1,02367$. Dieser Werth ist erheblich grösser, unterliegt aber einem nicht geringen w. F. Ausserdem musste er nothwendiger Weise zu gross ausfallen, weil er aus Beobachtungen abgeleitet war, in denen sich die Wirkung der Wärme mit der täglichen periodischen Störung der Refraction vereinigte, und zwar so, dass die positive Störung mit den niedrigsten Temperaturen am Abend und Morgen, die negative mit den höchsten um Mittag zusammenfiel.

Die nahe Uebereinstimmung der beiden Werthe von $1+\gamma$, deren erster 1,01427 auf der Vergleichung der Sommer- und Winterbeobachtungen, letzterer 1,01562 aber auf der Vergleichung der Sommerbeobachtungen allein unter sich beruht, war es, die mich vor allem ermuthigte, die Untersuchung weiter zu führen, indem sie mir die Ueberzeugung gewährte, dass ich in (III) eine der Natur entsprechende Form des Ausdrucks der Refraction gewählt hatte.

Ich werde im folgenden den mittleren Refractionscoefficienten λ auf den Barometerstand $b=29,00$ engl. Zoll und auf die Lufttemperatur $t=+16^0,0$ R. beziehen, wodurch $\beta=\frac{B}{29,00}$ und $\tau=16,0-T$ wird. Wenn man nun, für beide in der Formel (III) zu bestimmende Grössen λ und γ, schon genäherte Werthe λ' und γ' gefunden hat, so dass diese nur noch kleiner Verbesserungen $d\lambda'=\xi$ und $d\gamma'=\eta$ bedürfen: so führt jeder durch Beobachtung bestimmte Refractionscoefficient μ, so wie man ihn mit dem aus λ' und γ' berechneten Werthe μ' vergleicht, und $\mu-\mu'=n$ setzt, zur linearischen Gleichung

$$a\xi+q\eta=n,\ \text{worin}\ a=\frac{\mu'}{\lambda'}\ \text{und}\ q=\frac{\mu'\tau}{1+\gamma'}. \qquad \text{(IV)}$$

Diese Coefficienten a und q ergeben sich nämlich aus der Differentiirung der Formel (III), wonach

$$d\mu=\beta(1+\gamma)^\tau d\lambda+\lambda\beta\tau(1+\gamma)^{\tau-1}d\gamma$$

$$=\frac{\mu}{\lambda}d\lambda+\frac{\mu\tau}{1+\gamma}d\gamma.$$

Für die Rechnung ist es am bequemsten, wenn man sich unter ξ, η und n Einheiten der 4ten Decimalstelle vorstellt, und ein beobachtetes $\mu=0,0704$, verglichen mit einem berechneten $\mu'=0,0722$, gibt ein $n=-18$.

Einen sehr genäherten Werth $\lambda'=0,0740$, für $b=29,00$ und $t=+16,0$, bietet der 3te Mittelwerth in § 52 dar, wo wir, für $b=29,00$ und $T=+16,17$, ein $\mu=0,0742$ haben. Als Näherung für γ setze ich nach den Sommerbeobachtungen $\gamma'=0,0155$. Mit diesen zum Grunde gelegten Constanten berechnete ich nun für jedes nach § 49 beobachtete μ, sein dem B und T entsprechendes μ', und gelangte so, durch Benutzung des Materials der Sommer- und Winterbeobachtungen zu 71 Bedingungsgleichungen von der Form $a\xi+q\eta=n$, aus deren Auflösung sich ξ und η, die Verbesserungen der angenommenen Werthe λ' und γ' ergeben mussten. Es gehörten aber diese 71 Gleichungen zu drei Gruppen, bei denen, wie oben schon angedeutet ist, verschiedene Gewichte anzunehmen sind. Diese nahm ich nach einer Schätzung zu 1, $\frac{4}{9}$ und $\frac{1}{9}$ an, indem ich den Gleichungen aus den Abendbeobachtungen im Sommer, als den sichersten, die Genauigkeit 1 ertheilte, den Morgenbeobachtungen $\frac{2}{3}$, und den Winterbeobachtungen in Stawropol die Genauigkeit $\frac{1}{3}$. Mit diesen Annahmen erhielt ich:

$$\xi = -3{,}11 \mp 1{,}72;\quad \eta = +2{,}25 \mp 3{,}46;$$

und da $\lambda' = 0{,}0740 \qquad \gamma' = 0{,}0155$ vorausgesetzt war,

$$\lambda = 0{,}073689 \mp 1{,}72;\quad \gamma = 0{,}015725 \mp 3{,}46;$$

also zur Berechnung des jedesmaligen normalen Refractionscoefficienten den Ausdruck:

$$\mu = 0{,}073689 \cdot \frac{B}{29{,}00} \cdot 1{,}015725^{\tau} \qquad (V)$$

wo τ, wie immer, $= 16{,}0 - T$.

Zu gleicher Zeit ergab sich für ein einzelnes beobachtetes μ:

				Mittlere Amplitudo
im Mittel der 1sten Gruppe der Abendbeob. der w. F.	10,54	Einheiten		$C = 3811''$
« « « 2ten « « Morgenbeob. « « «	13,82	der 4ten		3741
« « « 3ten « « Winterbeob. « « «	34,37	Decimale		6248

§ 54.

So befriedigend das Resultat des vorigen § zumal dadurch erscheint, dass es zeigt, wie regelmässig besonders die nachmittägige Refraction bei ruhigen Bildern ist, indem die wahrscheinliche Abweichung der Formel von der Beobachtung im einzelnen Falle nur $10\frac{1}{2}$ Einheiten der 4ten Decimale, oder $\frac{10{,}5}{737} = \frac{1}{70}$ des Betrages der Refraction gefunden wurde: so können wir doch auf keine Weise die erhaltenen λ und γ für so genau ansehen, dass sie keiner weiteren Verbesserung bedürfen, und können ebenso wenig die denselben beigelegten w. F. für die richtigen Criterien ihrer Genauigkeit ausgeben. Zu beiden wären wir nur in dem Falle berechtigt, wenn die, für die Ableitung der beobachteten Refractionen, in § 48 zum Grunde gelegten Höhen der Berge H, und die aus ihnen gefolgerten Höhenunterschiede u zwischen den Bergen und den Standpuncten absolut genau gewesen wären. Wir sind aber nicht einmal im Stande, ein richtiges Urtheil über die Zuverlässigkeit der angewandten Berghöhen zu fällen, da die Data zur sicheren Ableitung der w. F. derselben zu unvollständig sind, und vermögen daher auch nicht zu ermitteln, um wieviel die w. F. von λ und γ, die der vorige § gegeben hat, wegen der Unsicherheit der Berghöhen vergrössert werden müssen.

Fassen wir nun unsere Aufgabe schärfer auf, so finden wir, dass wir eigentlich aus den vorhandenen Beobachtungen nicht weniger als 7 unbekannte Grössen zu bestimmen haben, nämlich die 5 Berghöhen, den mittleren Refractionscoefficienten λ, und den Thermometercoefficienten γ, und dass uns zu dieser Bestimmung 71 Gleichungen zu Gebote stehen, deren jeder ein besonderes, erst bei der Auflösung selbst zu erkennendes Gewicht zukommt. Hierbei setzen wir überdies für die Meereshöhen der Instrumente auf den Standpuncten, eine solche Genauigkeit voraus, dass ihre Unsicherheit als unerheblich angesehen werden kann. In der That zeigt auch Tafel IV, Seite 61, für die Marke β^{70} am ersten der 12 Sommerstandpuncte den w. F. 6,95 Zoll an, und für die Marke α^{87} am letzten Standpuncte den w. F. 7,90, woraus für den Höhenunterschied $\alpha^{87} - \beta^{70}$ der w. F. $\sqrt{(7{,}90^2 - 6{,}95^2)} = 3{,}76$ Zoll folgt, den wir ohne Bedenken vernachlässigen dürfen.

§ 55.

Unsere auf 12 Standpuncten gemachten 50 Sommerbeobachtungen theilen sich in:

8	Messungen	des	Beschtau,	von	5	Standpuncten aus,
11	«	«	Elbrus W.	«	4	« «
8	«	«	Elbrus O.	«	4	« «
15	«	«	Kasbek	«	7	« «
8	«	«	Anonymus	«	5	« «

Zu diesen kommen noch hinzu als Winterbeobachtungen am 13ten Standpunct: 21 Messungen des Elbrus O. von Stawropol aus, so dass für Elbrus O. im ganzen 29 Messungen von 5 Standpuncten aus vorhanden sind.

Ich werde jetzt alle Höhen eines jeden Berges zusammenstellen, welche aus den beobachteten Zenithdistanzen sich ergeben, wenn wir die Refraction nach der Formel (V) in § 53 berechnen. Die zur Ausführung der Rechnung erforderlichen Hülfsgrössen, nämlich die jedesmalige Höhe des Instrumentes über dem Meere, die C, D' u. s. w., finden sich in § 48 zusammengestellt. Für eine bequeme Berechnung der μ hatte ich ausserdem die Formel (V) § 53 in eine Tafel gebracht, welche, für jeden Grad von $+24^0$ bis -12^0, den zu $b = 29{,}00$ zugehörigen $\log \mu$ gab, und ausserdem $\log \frac{B}{29{,}00}$ für die einzelnen Zehntel des Zolls enthielt. Ist der einem B und T entsprechende $\log \mu$ aus der Tafel gefunden, so erhält man $\log \varrho = \log \mu + \log C$, woraus die berechnete Refraction ϱ folgt. — Ist nun z die beobachtete Zenithdistanz, und setzt man $90^0 - (z + \varrho) = h$, den für Refraction corrigirten Höhenwinkel des Berges, so ist bekanntlich die Höhe desselben über dem Instrumente gegeben durch:

$$\frac{D.' \sin\,(h + \frac{1}{2}C)}{\cos\,(h + C)};$$

woraus sich die Höhe über dem Asowschen Meere H, durch Hinzufügung der Höhe des Instrumentes über dem Meere, in § 48, ergibt.

Ich ordne die Messungen eines jeden Berges nach den wachsenden Amplituden, Entfernungen vom Instrumente, und bemerke noch, dass die hier gegebenen z die wegen der Biegung schon verbesserten sind. In den beiden letzten Spalten habe ich die w. F. der h und der berechneten Höhen hinzugefügt, wie sie sich aus der späteren Untersuchung in § 58 und § 63 herausstellen.

I. *Nach der Formel* § 53 (V) *berechnete Höhen des Beschtau.*

	Standpunct	Amplitudo C	Beobachter	Datum und wahre Zeit	B	T	Berechnete Refraction ρ	Beobachtete Zenithdistanz z	$h = 90° - (z + \rho)$	Höhe des Berges in engl. Zoll.	Wahrsch. Fehler der h $\psi =$	Wahrsch. Fehler der Höhe $\varepsilon =$
1	D	415″,6	F	13. Juli 4h 37m	28z,62	15°,7	30″,4	85° 52′ 14″,5	4° 7′ 15″,1	55072	2″,04	5,0 Zoll
2	Q	788,5	Σ	« « 4 37	28,65	15,7	57,7	87 51 49,4	2 7 12,9	55083	1,39	6,4
3	p^{70}	989,2	S	« « 3 47	28,94	17,6	70,9	88 13 45,7	1 45 3,4	55064	1,97	11,5
4		«	S	« « 4 37	28,94	16,0	72,7	13 43,4	1 45 3,9	55068	1,98	11,6
5	b^{79}	2684,4	S	21. Aug. 6 30	29,13	17,8	193,2	89 30 59,4	0 25 47,4	55233	3,17	50,2
6	b^{80}	2885,5	F	« « 19 30	29,19	14,5	219,1	89 35 6,3	0 21 14,6	54975	4,21	71,8
7		«	S	« « 19 30	29,19	14,5	219,1	35 0,5	21 20,4	55075	4,08	69,6
8		«	S	« « 20 7	29,19	16,5	212,4	35 14,6	21 13,0	54941	3,99	67,9
									Mittel M^{I} =	55073		

II. *Nach der Formel* § 53 (V) *berechnete Höhen des Elbrus, Westkuppe.*

	Standpunct	Amplitudo C	Beobachter	Datum und wahre Zeit	B	T	Berechnete Refraction ρ	Beobachtete Zenithdistanz z	$h = 90° - (z + \rho)$	Höhe des Berges in engl. Zoll.	Wahrsch. Fehler der h $\psi =$	Wahrsch. Fehler der Höhe $\varepsilon =$
1	p^{75}	3834″,6	F	15. Aug. 18h 22m	28z,92	14°,0	290″,7	87° 53′ 3″,3	2° 2′ 6″,0	222271	5″,31	120,2 Z.
2		«	S	« « 18 43	28,92	14,5	288,5	53 11,8	2 1 59,7	222128	5,18	117,3
3		«	Σ	« « 18 54	28,92	14,8	287,1	53 23,5	2 1 49,4	221911	4,99	113,0
4	b^{70}	4012,8	S	14. Juli 17 40	28,72	15,0	297,5	88 1 55,6	1 53 6,9	222197	5,32	126,0
5		«	F	« « 17 49	28,72	15,1	297,0	1 49,2	1 53 13,8	222359	5,41	128,0
6		«	Σ	« « 18 3	28,71	15,4	295,6	1 56,3	1 53 8,1	222224	5,14	121,6
7		«	F	« « 18 32	28,69	15,9	293,0	1 55,0	1 53 12,0	222317	5,34	126,5
8	p^{82}	4720,3	Σ	23. Aug. 6 11	29,15	19,3	332,1	88 25 52,4	1 28 35,5	221807	4,76	132,8
9	a^{87}	5779,9	F	29. Aug. 5 29	29,38	20,0	405,4	88 55 48,4	0 57 26,2	221968	5,92	202,4
10		«	F	« « 6 2	29,38	18,7	413,7	55 29,1	0 57 37,2	222345	6,03	205,9
11		«	S	« « 6 9	29,39	19,0	411,9	55 32,0	0 57 36,1	222307	5,91	201,9
									Mittel M^{II} =	222167		

III. *Nach der Formel* § 53 (V) *berechnete Höhen des Elbrus, Ostkuppe.*

A. Sommerbeobachtungen.

	Standpunct	Amplitudo C	Beobachter	Datum und wahre Zeit	B	T	Berechnete Refraction ρ	Beobachtete Zenithdistanz z	$h = 90° - (z + \rho)$	Höhe des Berges in engl. Zoll.	Wahrsch. Fehler der h $\psi =$	Wahrsch. Fehler der Höhe $\varepsilon =$
1	p^{75}	3813″,3	S	15. Aug. 18h 43m	28z,92	14°,5	286″,9	87° 52′ 50″,1	2° 2′ 23″,0	221267	5″,14	115,8 Z.
2		«	Σ	« « 18 54	28,92	14,8	285,5	52 58,7	2 2 15,8	221122	4,96	111,7
3	b^{70}	4007,0	S	14. Juli 17 40	28,72	15,0	297,1	88 2 11,4	1 52 51,5	221440	5,31	125,4
4		«	F	« « 17 49	28,72	15,1	296,5	1 59,3	1 53 4,2	221741	5,40	127,6
5		«	Σ	« « 18 3	28,71	15,4	295,2	2 15,6	1 52 49,2	221384	5,13	121,2
6		«	F	« « 18 32	28,69	15,9	292,6	2 11,3	1 52 56,1	221549	5,33	125,9
7	p^{82}	4688,7	Σ	23. Aug. 6 11	29,15	19,3	329,9	88 25 16,6	1 29 13,5	221011	4,68	129,6
8	a^{87}	5746,3	S	29. « 6 9	29,39	19,0	409,5	88 55 15,7	0 57 54,8	221063	5,89	200,0
									Mittel M^{III} =	221322		

B. Winterbeobachtungen von Stawropol aus.

	Amplitudo C	Beobachter	Datum und wahre Zeit	B	T	Berechnete Refraction ρ	Beobachtete Zenithdistanz z	$h = 90° - (z + \rho)$	Höhe des Berges in engl. Zollen.	Wahrsch. Fehler der h $\psi =$	der Höhe $\varepsilon =$
				z	°						
1	6248″,4	S	24. Dec. $20^h 15^m$	28,30	+ 4,6	536″,9	89° 12′ 34″,0	0° 38′ 29″,1	220528	18″,99	698,7 z.
2	«	S	25. « 0 1	28,27	+ 5,5	528,8	13 25,5	37 45,7	218930	18,70	688,4
3	«	S	« « 4 0	28,27	+ 4,6	536,3	12 57,2	38 6,5	219699	18,97	698,0
4	«	S	7. Jan. 21 0	28,65	— 7,0	651,3	10 1,8	39 6,9	221922	23,00	846,6
5	«	S	« « 21 30	28,65	— 7,0	651,3	10 12,2	38 56,5	221538	23,00	846,6
6	«	S	8. « 0 30	28,62	— 3,3	614,1	10 56,2	38 49,7	221288	21,69	798,4
7	«	S	« « 3 50	28,55	— 2,7	606,9	11 24,0	38 29,1	220528	21,44	789,3
8	«	S	« « 23 40	28,55	— 1,7	597,5	11 40,2	38 22,3	220278	21,11	776,9
9	«	S	9. « 20 25	28,46	— 0,3	582,7	12 11,5	38 5,8	219669	20,60	758,1
10	«	S	« « 21 20	28,46	+ 0,3	577,3	12 11,2	38 11,5	219879	20,40	750,9
11	«	S	10. « 20 28	28,37	+ 0,3	575,5	12 12,2	38 12,3	219909	20,34	748,5
12	«	S	11. « 4 10	28,32	+ 0,2	575,4	12 27,2	37 57,4	219360	20,34	748,5
13	«	F	12. « 0 36	28,22	— 0,2	577,0	11 31,0	38 52,0	221373	20,42	751,4
14	«	S	14. « 1 14	28,37	— 1,0	587,3	12 5,2	38 7,5	219732	20,76	764,0
15	«	S	30. « 0 45	28,55	—11,0	690,8	10 13,2	38 16,0	220045	24,41	898,2
16	«	F	31. « 1 10	28,42	— 6,0	636,1	10 4,0	39 19,9	222401	22,49	827,5
17	«	S	21. Febr. 20 48	28,40	— 4,5	620,9	10 51,2	38 47,9	221221	21,93	807,2
18	«	S	22. « 20 25	28,31	— 3,0	604,6	10 11,2	39 44,2	223297	21,36	786,3
19	«	S	26. « 23 45	28,40	— 2,0	597,1	11 55,2	38 7,7	219739	21,10	776,5
20	«	S	27. « 5 16	28,47	— 2,5	603,3	11 10,2	38 46,5	221169	21,32	784,7
21	«	S	« « 19 55	28,55	—10,0	680,2	9 21,2	39 18,6	222353	24,02	883,9

IV. *Nach der Formel § 53 (V) berechnete Höhen des Kasbek.*

	Standpunct	Amplitudo C	Beobachter	Datum und wahre Zeit	B	T	Berechnete Refraction ρ	Beobachtete Zenithdistanz z	$h = 90° - (z + \rho)$	Höhe des Berges in engl. Zoll	Wahrsch. Fehler der h $\psi =$	der Höhe $\varepsilon =$
1	a^{87}	3740″,2	F	29. Aug. $5^h 29^m$	29″,38	20°,0	262″,3	88° 0′ 53″,0	1° 54′ 44″,7	198452	4″,11	90,5 z.
2		«	F	« « 6 2	29,38	18,7	267,7	0 41,7	1 54 50,6	198582	4,18	92,1
3		«	S	« « 6 9	29,39	19,0	266,5	0 46,5	1 54 47,0	198503	4,05	89,2
4	b^{83}	3895,5	S	24. Aug. 20 0	29,25	19,0	276,3	88 8 13,6	1 47 10,1	198857	4,98	114,0
5	b^{82}	3991,7	F	23. « 4 27	29,20	22,0	269,7	88 13 21,9	1 42 8,4	198379	4,21	99,0
6		«	F	« « 5 27	29,20	19,6	280,0	13 12,5	1 42 7,5	198358	4,33	101,9
7	b^{81}	4020,0	S	23. « 4 38	29,11	23,5	264,5	88 14 49,4	1 40 46,1	198743	4,02	95,2
8		«	S	« « 5 28	29,11	22,2	269,9	14 46,5	1 40 43,6	198684	4,10	97,1
9		«	S	« « 6 10	29,11	20,8	275,9	14 36,4	1 40 47,7	198781	4,18	99,0
10	p^{82}	4039,5	Σ	23. « 4 12	29,14	23,2	267,3	88 15 38,9	1 39 53,8	198484	3,94	93,8
11		«	Σ	« « 6 11	29,15	19,3	284,2	15 25,3	1 39 50,5	198406	4,07	96,9
12	b^{80}	4042,8	F	21. « 19 30	29,19	14,5	307,0	88 15 38,3	1 39 14,7	198839	5,54	132,7
13		«	S	« « 19 30	29,19	14,5	307,0	15 50,3	1 39 2,7	198552	5,47	130,3
14		«	S	« « 20 7	29,19	16,5	297,5	15 59,8	1 39 2,7	198552	5,32	126,8
15	b^{79}	4143,9	S	21. « 6 30	29,13	17,8	298,2	88 20 46,1	1 34 15,7	198295	4,44	108,5
									Mittel M^{IV} =	198564		

V. *Nach der Formel* § 53 (V) *berechnete Höhen des Anonymus.*

	Standpunct	Amplitudo C	Beobachter	Datum und wahre Zeit	B	T	Berechnete Refraction ϱ	Beobachtete Zenithdistanz z	$h = 90^\circ - (z + \varrho)$	Höhe des Berges in engl. Zoll.	Wahrsch. Fehler der h $\psi =$	Wahrsch. Fehler der Höhe $\varepsilon =$
1	b^{80}	3346″,7	F	21. Aug. $19^h 30^m$	29,19 z	14°,5	254″,1	87° 39′ 25″,4	2° 16′ 20″,5	203394	4″,74	93,6 Zoll.
2		«	S	« « 19 30	29,19	14,5	254,1	87 39 33,2	2 16 12,7	203258	4,63	91,4
3	p^{75}	3439,2	Σ	15. « 18 54	28,92	14,8	257,5	87 48 5,0	2 7 37,5	203016	4,51	91,4
4	b^{81}	3502,5	S	23. « 6 10	29,11	20,8	240,4	87 47 39,6	2 8 20,0	203248	3,72	76,9
5	p^{82}	3602,6	Σ	23. « 4 12	29,14	23,2	238,4	87 52 48,9	2 3 12,7	203186	3,60	76,5
6		«	Σ	« « 6 11	29,15	19,3	253,4	87 52 36,7	2 3 9,9	203127	3,67	78,0
7	b^{82}	3645,3	F	23. « 4 27	29,20	22,0	246,3	87 54 14,9	2 1 38,8	203248	3,93	84,4
8		«	F	« « 5 27	29,20	19,6	255,7	87 54 1,8	2 1 42,5	203328	4,04	86,8
									Mittel $M^V =$	203226		

§ 56.

Wären die in der Formel § 53 (V) zum Grunde liegenden Constanten $\lambda' = 0{,}073689$, $\gamma' = 0{,}015725$ schon die aus unserm Beobachtungsmaterial folgenden wahrscheinlichsten Werthe derselben, so würden auch die in § 55 zusammengestellten mehrfachen Bestimmungen der Berghöhen die aus denselben allendlich abzuleitenden sein; und wir hätten sie nur mit Berücksichtigung ihrer Gewichte zu einem Endresultate zu vereinigen. Das oben, ohne Beachtung der Gewichte, für jeden Berg gefundene arithmetische Mittel der Berghöhen M ist jedenfalls nur als eine Annäherung zu betrachten, statt deren der wahrscheinlichste Werth $M + y$ sein wird. Dieser ist derjenige, welcher den wahrscheinlichsten Werthen von λ und γ entsprechen wird, die ich mit $0{,}073689 \,.\, (1 + \frac{x}{100})$ und $0{,}015725 + \eta$ bezeichnen will. Ist nun H die in einem einzelnen Falle des vorigen § durch Rechnung gefundene Höhe, so findet zwischen den zu betrachtenden Grössen folgende Relation statt:

$$M + y = H - px + q\eta,$$

woraus sich, wenn ich $H - M = n$ setze, die Bedingungsgleichung

$$y + px - q\eta = n$$

ergibt. Solcher Bedingungsgleichungen werden wir also für Beschtau 8, für Elbrus W. 11, für Elbrus O. $8 + 21 = 29$, für Kasbek 15, und für Anonymus 8 zu bilden haben.

Die Coefficienten p und q bestimmen sich aus folgender Betrachtung. Wird die Refractionsconstante λ' um $\frac{1}{100}$ ihres Werthes vermehrt, so ist zu jeder nach der Formel berechneten Refraction ϱ noch $0{,}01\,\varrho$ hinzuzufügen, und die berechnete Höhe des Berges wird kleiner ausfallen um $0{,}01\,\varrho \,.\, D.' \sin 1''$ in Zollen. Wird ferner die Constante γ' um eine Einheit der 4ten Decimale vermehrt, so ist, nach § 53 (IV), $d\mu' = \frac{\mu'\tau}{1+\gamma'} d\gamma = \frac{\mu'.\,\tau}{10157{,}25}$; und $d\varrho = C \,.\, d\mu' = \frac{C\mu'\tau}{10157{,}25} = \frac{\varrho\,.\,\tau}{10157{,}25}$, also positiv für $T < 16^\circ$, negativ für $T > 16^\circ$, weil $\tau = 16^\circ - T$. Einem $d\varrho$ entspricht aber ein $dH = -d\varrho \,.\, D' \sin 1''$. Diesem gemäss haben wir folgende 2 Ausdrücke unserer Coefficienten:

$$p = \frac{\varrho}{100} D' . \sin 1'';$$

$$q = \frac{\varrho (T - 16{,}0)}{10157{,}25} . D' \sin 1'' . = \frac{p (T - 16{,}0)}{101{,}5725}.$$

Da, in § 55, für jede einzelne Beobachtung die berechnete Refraction ϱ gegeben ist, und sich ebenfalls T die Temperatur daselbst findet, so ist die Berechnung der Coefficienten p und q mit Zuziehung der respectiven log $D . \sin 1''$ in § 48 eine leichte.

§ 57.

Wir erhalten nunmehr aus den in § 55 zusammengestellten berechneten Höhen der 5 Bergspitzen folgende Bedingungsgleichungen zur weiteren Verarbeitung für unseren Zweck. Die Morgenbeobachtungen, denen ihrer Natur nach ein geringeres Gewicht zukommt, sind durch ein vorgesetztes (m) bezeichnet.

I. *Ursprüngliche Bedingungsgleichungen für den Beschtau. — Gesuchte Höhe des Berges* 55073 + y^I *Zoll.*

		Gewicht G
1.	$y^I + 0{,}75\,x + 0{,}002\,\eta = - 1$	400,3
2.	$y^I + 2{,}69\,x + 0{,}008\,\eta = + 10$	240,1
3.	$y^I + 4{,}14\,x - 0{,}065\,\eta = - 9$	75,75
4.	$y^I + 4{,}24\,x + 0{,}000\,\eta = - 5$	74,82
5.	$y^I + 30{,}63\,x - 0{,}543\,\eta = + 160$	3,974
(m) 6.	$y^I + 37{,}35\,x + 0{,}552\,\eta = - 98$	1,943
(m) 7.	$y^I + 37{,}35\,x + 0{,}552\,\eta = + 2$	2,063
(m) 8.	$y^I + 36{,}20\,x - 0{,}178\,\eta = - 132$	2,167

II. *Ursprüngliche Bedingungsgleichungen für Elbrus W. — Gesuchte Höhe des Berges* 222167 + y^{II} *Zoll.*

		Gewicht G
(m) 1.	$y^{II} + 65{,}8\,x + 1{,}30\,\eta = + 104$	0,692
(m) 2.	$y^{II} + 65{,}3\,x + 0{,}96\,\eta = - 39$	0,727
(m) 3.	$y^{II} + 65{,}0\,x + 0{,}77\,\eta = - 256$	0,783
(m) 4.	$y^{II} + 70{,}4\,x + 0{,}69\,\eta = + 30$	0,630
(m) 5.	$y^{II} + 70{,}3\,x + 0{,}62\,\eta = + 192$	0,610
(m) 6.	$y^{II} + 69{,}9\,x + 0{,}41\,\eta = + 57$	0,676
(m) 7.	$y^{II} + 69{,}2\,x + 0{,}07\,\eta = + 150$	0,625
8.	$y^{II} + 92{,}6\,x - 3{,}01\,\eta = - 360$	0,566
9.	$y^{II} + 138{,}5\,x - 5{,}46\,\eta = - 199$	0,244
10.	$y^{II} + 141{,}3\,x - 3{,}76\,\eta = + 178$	0,236
11.	$y^{II} + 140{,}7\,x - 4{,}16\,\eta = + 140$	0,245

III. *Ursprüngliche Bedingungsgleichungen für Elbrus Ost.*

Gesuchte Höhe des Berges $221322 + y^{III}$ *Zoll.*

A. Sommerbeobachtungen.

		Gewicht $G =$
(*m*) 1.	$y^{III} + 64,6\,x + 0,95\,\eta = -55$	0,746
(*m*) 2.	$y^{III} + 64,3\,x + 0,76\,\eta = -200$	0,802
(*m*) 3.	$y^{III} + 70,2\,x + 0,69\,\eta = +118$	0,635
(*m*) 4.	$y^{III} + 70,1\,x + 0,62\,\eta = +419$	0,614
(*m*) 5.	$y^{III} + 69,7\,x + 0,41\,\eta = +62$	0,681
(*m*) 6.	$y^{III} + 69,1\,x + 0,07\,\eta = +227$	0,631
7.	$y^{III} + 91,4\,x - 2,97\,\eta = -311$	0,595
8.	$y^{IV} + 139,0\,x - 4,11\,\eta = -259$	0,250

B. Winterbeobachtungen.

		Gewicht $G =$
9.	$y^{III} + 197,6\,x + 11,22\,\eta = -794$	0,02048
10.	$y^{III} + 194,6\,x + 10,34\,\eta = -2392$	0,02111
11.	$y^{III} + 197,4\,x + 11,22\,\eta = -1623$	0,02052
12.	$y^{III} + 239,7\,x + 22,64\,\eta = +600$	0,01395
13.	$y^{III} + 239,7\,x + 22,64\,\eta = +216$	0,01395
14.	$y^{III} + 226,0\,x + 19,00\,\eta = -34$	0,01569
15.	$y^{III} + 223,4\,x + 18,41\,\eta = -794$	0,01605
16.	$y^{III} + 219,9\,x + 17,43\,\eta = -1044$	0,01657
17.	$y^{III} + 214,5\,x + 16,05\,\eta = -1653$	0,01740
18.	$y^{III} + 212,5\,x + 15,46\,\eta = -1443$	0,01773
19.	$y^{III} + 211,8\,x + 15,46\,\eta = -1413$	0,01785
20.	$y^{III} + 211,8\,x + 15,56\,\eta = -1962$	0,01785
21.	$y^{III} + 212,3\,x + 15,95\,\eta = +51$	0,01771
22.	$y^{III} + 216,2\,x + 16,73\,\eta = -1590$	0,01713
23.	$y^{III} + 254,3\,x + 26,58\,\eta = -1277$	0,01240
24.	$y^{III} + 234,1\,x + 21,66\,\eta = +1079$	0,01460
25.	$y^{III} + 228,5\,x + 20,18\,\eta = -101$	0,01535
26.	$y^{III} + 222,5\,x + 18,71\,\eta = +1975$	0,01617
27.	$y^{III} + 219,8\,x + 17,72\,\eta = -1583$	0,01658
28.	$y^{III} + 222,1\,x + 18,21\,\eta = -153$	0,01624
29.	$y^{III} + 250,3\,x + 25,60\,\eta = +1031$	0,01280

IV. *Ursprüngliche Bedingungsgleichungen für Kasbek. — Gesuchte Höhe des Berges* 198564 $+ y^{IV}$ *Zoll.*

		Gewicht $G =$
1.	$y^{IV} + 57{,}8\ x - 2{,}28\eta = -112$	1,220
2.	$y^{IV} + 59{,}0\ x - 1{,}57\eta = +\ 18$	1,179
3.	$y^{IV} + 58{,}7\ x - 1{,}73\eta = -\ 61$	1,256
(*m*) 4.	$y^{IV} + 63{,}3\ x - 1{,}87\eta = +293$	0,769
5.	$y^{IV} + 63{,}4\ x - 3{,}74\eta = -185$	1,020
6.	$y^{IV} + 65{,}8\ x - 2{,}34\eta = -206$	0,964
7.	$y^{IV} + 62{,}6\ x - 4{,}63\eta = +179$	1,103
8.	$y^{IV} + 63{,}9\ x - 3{,}90\eta = +120$	1,060
9.	$y^{IV} + 65{,}3\ x - 3{,}09\eta = +217$	1,020
10.	$y^{IV} + 63{,}6\ x - 4{,}51\eta = -\ 80$	1,137
11.	$y^{IV} + 67{,}6\ x - 2{,}20\eta = -158$	1,066
(*m*) 12.	$y^{IV} + 73{,}1\ x + 1{,}08\eta = +275$	0,568
(*m*) 13.	$y^{IV} + 73{,}1\ x + 1{,}08\eta = -\ 12$	0,589
(*m*) 14.	$y^{IV} + 70{,}9\ x - 0{,}35\eta = -\ 12$	0,623
15.	$y^{IV} + 72{,}8\ x - 1{,}29\eta = \ 269$	0,850

V. *Ursprüngliche Bedingungsgleichungen für Anonymus. — Gesuchte Höhe des Berges* 203226 $+ y^{V}$ *Zoll.*

		Gewicht $G =$
(*m*) 1.	$y^{V} + 50{,}2\ x + 0{,}74\eta = +168$	1,197
(*m*) 2.	$y^{V} + 50{,}2\ x + 0{,}74\eta = +\ 32$	1,142
(*m*) 3.	$y^{V} + 52{,}2\ x + 0{,}62\eta = -210$	1,197
4.	$y^{V} + 49{,}7\ x - 2{,}35\eta = +\ 22$	1,692
5.	$y^{V} + 50{,}7\ x - 3{,}59\eta = -\ 40$	1,708
6.	$y^{V} + 53{,}9\ x - 1{,}75\eta = -\ 99$	1,643
7.	$y^{V} + 52{,}9\ x - 3{,}13\eta = +\ 22$	1,404
8.	$y^{V} + 54{,}9\ x - 1{,}95\eta = +102$	1,328

In allen 71 Bedingungsgleichungen haben wir die unbekannte, auf die Refractionsconstante sich beziehende Grösse x, so wie die Correction η des vorausgesetzten Thermometercoefficienten, und daneben in jedem der 5 Systeme als dritte Unbekannte, die respective Verbesserung $y^{I} \ldots y^{V}$ der vorausgesetzten Höhe des Berges. Aus jedem Systeme werden also, zur Auflösung nach der Methode der kleinsten Quadrate, 3 partielle Endgleichungen zu bilden sein, die zuletzt in 7 Hauptendgleichungen, für die 7 Unbekannten $y^{I} \ldots y^{V}$, x und η zusammengezogen werden müssen. Betrachten wir die Coefficienten von x in den ursprünglichen Gleichungen der 5 Systeme, so wird es klar, dass diejenigen am wesentlichsten zur Bestimmung von x beitragen müssen, in denen sich die Coefficienten von x am stärksten ändern; und wir können daher von den Gleichungen der Systeme IV und V nur sehr wenig für die Bestimmung von x erwarten, während sie durch die Vermehrung der Zahl der Gleichungen wesentlich dahin wirken werden, die Genauigkeit des Endwerths mit Zuverlässigkeit zu ermitteln.

§ 58.

Um aus den ursprünglichen Bedingungsgleichungen zu den richtigen Endgleichungen zu gelangen, bedürfen wir noch der von ihren w. F. abhängigen Gewichte der ersten. Bei der Bestimmung dieser muss man in jedem Falle von der Betrachtung der unmittelbar beobachteten Grössen ausgehen, und hat den w. F. einer jeden Beobachtung zu erörtern. Aus den w. F. der beobachteten Grössen werden dann die der in den Gleichungen sich befindenden $n =$ Beobachtung — Berechnung abzuleiten sein, wenn der Weg verfolgt wird, auf welchem n aus der Beobachtung gefunden worden ist. In unserm Falle sind die beobachteten Grössen Zenithdistanzen der Bergspitzen, und wir haben zu untersuchen, welchen zufälligen Fehlern die beobachteten Zenithdistanzen unterworfen sind, indem wir unter dem Namen Fehler sowohl die Ungenauigkeiten begreifen, welche vom Beobachter und dem von ihm angewandten Apparate herrühren, als diejenigen Abweichungen, welche sich uns als durch unbekannte Umstände hervorgerufene, zufällige Unregelmässigkeiten des Phaenomens darstellen. Streng genommen gibt es zwar solche Unregelmässigkeiten nicht, denn jedes Phaenomen der Natur erfolgt nach bestimmten Gesetzen; aber unsere Kenntniss dieser Gesetze ist theils eine mangelhafte, theils fehlen uns in vielen Fällen die zur vollständigen Anwendung der Theorie auf's Phaenomen erforderlichen Data. Der von mir gewählte Ausdruck der Refraction $\varrho = C\lambda\frac{B}{b}(1+\gamma)^{\tau}$ ist gewiss nur eine Annäherung zum wahren Ausdruck des Phaenomens; und so muss angenommen werden, dass die jedesmalige Refraction sich mehr oder minder von dieser Formel entfernen wird; und diese Abweichung ist für uns eine zufällige Unregelmässigkeit des Phaenomens.

Die wirkliche Grösse der Abweichung für jede einzelne Gleichung anzugeben sind wir nicht im Stande, wohl aber können wir in unserm Falle zur genäherten Kenntniss eines wahrscheinlichen Werthes derselben gelangen, indem wir voraussetzen, dass die Abweichung im Allgemeinen der Grösse der Refraction ϱ proportionirt angenommen werden darf. Diese Annahme ist auf der Betrachtung begründet, dass in der Regel die Abweichung als die Folge einer auf die ganze Refraction einwirkenden Ursache anzusehen sein wird, und nicht als Folge von Ursachen, die in den einzelnen Elementen der Refraction unter einander unabhängig wirken. In diesem letzten Falle wäre der wahrscheinliche Werth der Abweichung der Quadratwurzel aus ϱ proportionirt zu setzen gewesen.

Die in § 55 zusammengestellten Zenithdistanzen z sind aus den vom Instrument direct angegebenen ζ durch Anbringung des Biegungscoefficienten b erhalten, oder $z = \zeta + b$. Ist demnach α der w. F. einer Beobachtung, β der w. F. der angewandten Biegung, so wird $\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)} = \delta$ den Werth des w. F. von z anzeigen, insoweit er im Instrumente und im Beobachter liegt. $\theta\varrho = \omega$ ist der Ausdruck für die zufällige Unregelmässigkeit des Phaenomens, wo θ für gleiche Umstände eine Constante ist, für wesentlich verschiedene Umstände aber verschiedene Werthe haben kann; und der vollständige Ausdruck des w. F. einer beobachteten Zenithdistanz ist:

$$\sqrt{(\delta^2 + \omega^2)} = \psi.$$

Wir haben hier die drei Beobachter zu unterscheiden. Nach Seite xx und LV ist nämlich:

für F, $\alpha = 1\rlap{.}''6$, $\beta = 1\rlap{.}''20$, folglich $\delta^2 = 4{,}00$ und $\psi^2 = 4{,}00 + \theta^2\varrho^2$

« S, « $= 1{,}6$, « $= 0{,}61$, « « $= 2{,}93$ « « $= 2{,}93 + \theta^2\varrho^2$

« Σ, « $= 1{,}1$, « $= 0{,}30$, « « $= 1{,}30$ « « $= 1{,}30 + \theta^2\varrho^2$

Mittel $= 2{,}74$

Am Schluss des § 53 haben wir im Mittel gefunden:

den w. F. eines μ aus der Gruppe der Abendbeob. $\psi = 0{,}001054C$, für $C = 3811''$ folgl. $\psi = 4\rlap{.}''018$,

« « « « « « « « « Morgenbeob. $\psi = 0{,}001382C$, « $C = 3741$, « $\psi = 5{,}171$,

« « « « « « « « « Winterbeob. $\psi = 0{,}003437C$, « $C = 6248$, « $\psi = 21{,}48$.

Hieraus findet sich, mit Zuziehung des Mittelwerthes $\delta^2 = 2{,}74$ für die ersten beiden Gruppen, und $\delta^2 = 3{,}03$ für die letzte:

für die Abendbeob. der Mittelwerth $\omega = \sqrt{(4{,}018^2 - 2{,}74)} = 3\rlap{.}''660$,

« « Morgenbeob. « « $\omega = \sqrt{(5{,}171^2 - 2{,}74)} = 4{,}898$,

« « Winterbeob. « « $\omega = \sqrt{(21{,}48^2 \quad 3{,}03)} = 21{,}41$.

Da nun für die Abendbeobachtungen das Mittel der ϱ gleich $266\rlap{.}''1$, für die Morgenbeobachtungen gleich $289\rlap{.}''4$, für die Winterbeobachtungen gleich $607\rlap{.}''5$ war, so erhalten wir

für die Abendbeob. $\theta = \frac{3{,}660}{266{,}1} = 0{,}01375$,

« « Morgenbeob. $\theta = \frac{4{,}898}{289{,}4} = 0{,}01692$,

« « Winterbeob. $\theta = \frac{21{,}41}{607{,}5} = 0{,}03524$.

Diese 2 ersten Werthe von θ sprechen den Satz aus, dass die zufälligen Abweichungen von der normalen Refraction in den Morgenstunden grösser sind, als in den Abendstunden, wie es auch schon aus der Characteristik des Bildes zu erwarten war. Der dritte Werth aber beweiset, dass die in Stawropol gemachten Winterbeobachtungen durch den Mangel der Characteristik des Bildes in ihrer Sicherheit für unsere Untersuchung erheblich beeinträchtigt sind. Wir haben jetzt also:

für jede einzelne Abendbeob. $\psi = \sqrt{((0{,}01375 \,.\, \varrho)^2 + \delta^2)}$,

« « « Morgenbeob. $\psi = \sqrt{((0{,}01692 \,.\, \varrho)^2 + \delta^2)}$,

« « « Winterbeob. $\psi = \sqrt{((0{,}03524 \,.\, \varrho)^2 + \delta^2)}$;

wobei $\delta^2 = 4{,}00$ für F, $\delta^2 = 2{,}93$ für S, $\delta^2 = 1{,}30$ für Σ zu nehmen ist.

Aus ψ findet sich endlich der in Zollen ausgedrückte w. F. einer Gleichung, durch $\varepsilon = \psi \,.\, D' \sin 1''$ und hieraus das Gewicht einer Gleichung $g = \frac{1}{\varepsilon^2}$, für welches dem Gewichte $g = 1$ ein w. F. der Höhe von 1 Zoll entspricht. Bequemer für die Rechnung ist, um zu kleine Brüche zu vermeiden, $G = 10000g$ zu setzen, wobei der Gewichtseinheit in G ein w. F. der Höhe von 100 Zoll zukommt.

Ich wähle als Beispiel die erste Gleichung für Anonymus, aus einer von Sabler in p^{75} angestellten Morgenbeobachtung abgeleitet. Nach Seite LXXII ist für p^{75} Anonymus, $\log D' \sin 1'' = 1{,}3067$. Wir haben nunmehr $\varrho = 257''\!,5$; $0{,}01692\varrho = 4''\!,36 = \omega$, die wahrscheinliche Unregelmässigkeit der Refraction; $\omega^2 + \delta^2 = 19{,}01 + 1{,}30 = 20{,}31 = \psi^2$; $\psi = 4''\!,51$ den w. F. der beobachteten Zenithdistanz; $(\log\,\psi = 0{,}6542) + 1{,}3067 = 1{,}9609 = \log\,\varepsilon$, $\varepsilon = 91{,}4$ Zoll den w. F. der berechneten Höhe; endlich $4 - 3{,}9218 = 0{,}0792 = \log\,G$, $G = 1{,}200$ das Gewicht der Gleichung.

Unser Beispiel zeigt, dass bei einem so bedeutenden Abstande wie $3439'' = 100{,}3$ Werst die zufällige Unregelmässigkeit der Refraction $\omega = 4''\!,36$ der Hauptfactor von $\psi = 4''\!,51$ ist. Anders ist es, wenn der Abstand sehr klein ist, in welchem Falle δ bedeutend grösser als ω sein kann. So ist für die erste Beobachtung des Beschtau, dessen Abstand vom Beobachter $415'' = 12{,}1$ Werst war, ω nur $0''\!,42$, $\delta = 2''\!,00$ und $\psi = 2''\!,04$, fast ganz durch δ hervorgerufen. — Die auf diesem Wege für jede einzelne Beobachtung folgenden ψ und ε sind von mir der Zusammenstellung in § 55 beigefügt worden. Die aus ε abgeleiteten Gewichte G der Bedingungsgleichungen finden sich dagegen in § 57 neben den Gleichungen, unter der Ueberschrift: *Gewicht.*

Die auf dem angegebenen Wege gefundenen Gewichte der Gleichungen können eigentlich nur erst für genäherte Werthe derselben gelten; theils weil sie auf der mit vorläufigen Gewichten ausgeführten Auflösung der nicht ganz strengen Gleichungen in § 53 beruhen, bei deren Bildung die Höhen der Berge als bekannt vorausgesetzt waren, statt dass sie als zu bestimmende Grössen hätten eingeführt sein sollen, theils weil die Gewichte aus den arithmetischen Mitteln der übrig bleibenden Fehler, verbunden mit den Mitteln der Amplituden, also nicht in aller Strenge, abgeleitet sind. Dennoch übersieht man leicht, dass diese neuen Gewichte den richtigen schon sehr nahe sein müssen, zumal wenn die vorausgesetzten Berghöhen denen nahe kommen, die aus den vollständigen Gleichungen in § 57 selbst folgen. Gewiss aber ist, dass diese Gewichte innerhalb der Gränzen jeder Gruppe als relativ richtig für alle zu derselben Gruppe gehörigen Gleichungen angesehen werden können. Aber erst nach der Auflösung der vollständigen Gleichungen kann entschieden werden, ob die angewandten Gewichte auch das richtige Verhältniss der 3 Gruppen ausdrücken. In diesem Falle muss, wenn ν den übrig bleibenden Fehler einer Gleichung bedeutet, $\Sigma(\nu^2 G)$, für jede Gruppe besonders berechnet, zu einerlei w. F. der Gewichteinheit führen, und dieser w. F. wird dann zugleich das richtige Maass der Genauigkeit aller durch die Auflösung der Gleichungen bestimmten Grössen sein. Findet sich aber ein erheblicher Unterschied unter den w. F. der Gewichtseinheit, nach den 3 Gruppen, so muss die Auflösung mit gehörig veränderten Gewichten wiederholt werden, bis die gestellte Bedingung erfüllt ist. Es lässt sich hier schon übersehen, dass der wirkliche, der Gewichtseinheit in g zukommende w. F. grösser als 1 ausfallen muss, weil in der vorläufigen Auflösung der Gleichungen die relativen Gewichte der 3 Gruppen 1; 0,444; 0,111 gesetzt sind, während sie nach den obigen 3 Werthen von ψ, sehr nahezu 1; $\left(\frac{1375}{1692}\right)^2$; $\left(\frac{1375}{3524}\right)^2$ oder 1; 0,660; 0,124 hätten sein müssen.

§ 59.

Ich stelle zunächst die aus den 5 Systemen besonders betrachtet, mit Berücksichtigung der Gewichte abgeleiteten partiellen Endgleichungen zusammen.

I. *Partielle Endgleichungen durch Beschtau.*

$$
\begin{array}{llllll}
Y^{I}) & 801,2\,y^{I} & +\ 1925\ x & -\ 2,49\ \eta & = & +\ 1108 \\
X^{I}) & 1925\ y^{I} & -16757\ x & -\ 12,24\ \eta & = & +\ 3901 \\
Z^{I}) & -2,49\,y^{I} & -\ 12,24\,x & +\ 2,797\,\eta & = & -\ 334,2
\end{array}
$$

II. *Partielle Endgleichungen durch Elbrus W.*

$$
\begin{array}{llllll}
Y^{II}) & 6,035\,y^{II} & +\ 475,87\,x & -\ 1,603\,\eta & = & -\ 64,6 \\
X^{II}) & 475,87\ y^{II} & +40954\ x & -386,9\ \eta & = & -6237 \\
Z^{II}) & -1,603\,y^{II} & -\ 386,9\ x & +\ 22,909\,\eta & = & +\ 598,8
\end{array}
$$

III. *Partielle Endgleichungen durch Elbrus O.*

$$
\begin{array}{llllll}
Y^{III}) & 5,302\,y^{III} & +\ 443,92\,x & +\ 5,70\ \eta & = & -\ 179,0 \\
X^{III}) & 443,92\ y^{III} & +45507\ x & +1208,0\ \eta & = & -53058 \\
Z^{IIV}) & 5,70\ y^{III} & +\ 1208,0\ x & +\ 122,216\,\eta & = & -\ 4178,3
\end{array}
$$

IV. *Partielle Endgleichungen durch Kasbek.*

$$
\begin{array}{llllll}
Y^{IV}) & 14,425\,y^{IV} & +\ 929,26\,x & -\ 34,25\ \eta & = & -\ 110,7 \\
X^{IV}) & 929,26\ y^{IV} & +60189\ x & -2158,0\ \eta & = & -7663 \\
Z^{IV}) & -34,25\ y^{IV} & -\ 2158,0\ x & +\ 115,830\,\eta & = & +\ 305,7
\end{array}
$$

V. *Partielle Endgleichungen durch Anonymus.*

$$
\begin{array}{llllll}
Y^{V}) & 11,311\,y^{V} & +\ 586,17\,x & -\ 17,47\ \eta & = & -\ 48,7 \\
X^{V}) & 586,17\ y^{V} & +30408\ x & -911,5\ \eta & = & -2858 \\
Z^{V}) & -17,47\ y^{V} & -\ 911,5\ x & +\ 56,860\,\eta & = & +\ 98,8
\end{array}
$$

Die 7 Hauptendgleichungen, die dem Gesammtmaterial entsprechen, werden hieraus folgende:

$$
\begin{array}{ll}
\text{1ste bis 5te Hauptgl.} & Y^{I},\quad Y^{II},\quad Y^{III},\quad Y^{IV}\quad Y^{V}, \\
\text{6te Hauptgl.} & X = X^{I} + X^{II} + X^{III} + X^{IV} + X^{V}, \\
\text{7te Hauptgl.} & Z = Z^{I} + Z^{II} + Z^{III} + Z^{IV} + Z^{V}.
\end{array}
$$

§ 60.

Auflösung der 7 Hauptendgleichungen.

Es ist leicht einzusehen, dass die Elimination in unserm Falle dadurch sehr bedeutend erleichtert wird, dass in jeder der ursprünglichen Gleichungen nur 3 der 7 Unbekannten vorkommen. Alle Gleichungen enthalten nämlich x und η, die für die Refraction gesuchten Verbesserungen, wozu in jedem System noch die 3te Unbekannte, das respective y, hinzukommt. Durch diesen Umstand können wir sofort aus den partiellen Endgleichungen $X^{I} \ldots X^{V}$ und $Z^{I} \ldots Z^{V}$, die respectiven $y^{I} \ldots y^{V}$ verschwinden machen, wenn wir statt derselben ihre aus den Gleichungen $Y^{I} \ldots Y^{V}$ folgenden Werthe substituiren.

					Gewicht	w. F.	
Aus Y^{I} ergibt sich	$y^{I} = +\ 1{,}3829$	$-\ 2{,}4027x$	$+0{,}00311\eta$		801,2	3,53 Zoll	
« Y^{II} « «	$y^{II} = -10{,}704$	$-78{,}852\,x$	$+0{,}266\ \eta$		6,035	40,71 «	
« Y^{III} « «	$y^{III} = -33{,}761$	$-83{,}728\,x$	$-1{,}075\ \eta$		5,302	43,43 «	($\odot$)
« Y^{IV} « «	$y^{IV} = -\ 7{,}6747$	$-64{,}427\,x$	$+2{,}375\ \eta$		14,425	26,33 «	
« Y^{V} « «	$y^{V} = -\ 4{,}3056$	$-51{,}8239x$	$+1{,}5445\ \eta$		11,311	29,73 «	

Werden diese Werthe der y in die partiellen Endgleichungen, aus denen die Hauptendgleichungen für x und η zusammengesetzt sind, eingeführt, so erhält man folgende Zusammenstellung:

Beschtau X^{I})	$12132x = +\ 1249$	$+\ 6{,}25\eta$	Z^{I})	$2{,}789\eta = -\ 330{,}76$	$+\ 6{,}25x$	
Elbrus W. X^{II})	$3431x = -\ 1143$	$+260{,}50\eta$	Z^{II})	$22{,}483\eta = +\ 581{,}64$	$+260{,}50x$	
Elbrus O. X^{III})	$8338x = -38071$	$-730{,}54\eta$	Z^{III})	$116{,}084\eta = -3985{,}70$	$-730{,}54x$	($\supset$)
Kasbek X^{IV})	$322x = -\ 531{,}2$	$-\ 48{,}75\eta$	Z^{IV})	$34{,}490\eta = +\ 42{,}80$	$-\ 48{,}75x$	
Anonymus X^{V})	$30x = -\ 334{,}2$	$+\ 6{,}14\eta$	Z^{V})	$29{,}880\eta = +\ 23{,}58$	$+\ 6{,}14x$	

Aus der Summirung dieser erfolgen nun sofort die beiden neuen Hauptendgleichungen

$$X)\quad 24253x = -38830 - 506{,}40\eta$$
$$Z)\quad 205{,}726\eta = -\ 3668{,}4 - 506{,}40x,$$

deren Auflösung auf gewöhnlichem Wege uns die gesuchten x und η gibt, nämlich:

$$x = -1{,}2954 \qquad \eta = -14{,}639$$

Gewicht 23004 $\qquad$ 195,13

$$\text{w. F.} = \frac{100}{\sqrt{23004}} = 0{,}6594 \qquad \frac{100}{\sqrt{195{,}13}} = 7{,}158$$

Substituirt man endlich die eben gefundenen x und η in die Gleichungen ($\odot$), so ergeben sich die Endwerthe der gesuchten $y^{I} \ldots y^{V}$. Auf diese Weise findet sich:

$$y^{I} = +4{,}46;\quad y^{II} = +87{,}5;\quad y^{III} = +90{,}4;\quad y^{IV} = +41{,}0;\quad y^{V} = +40{,}2 \text{ Zoll.}$$

§ 61.

Die Richtigkeit der im vorigen § gelieferten Auflösung der Gleichungen hängt noch von der Gültigkeit der für die ursprünglichen Gleichungen in § 57 angesetzten Gewichte G ab. Um diese jetzt zu untersuchen, haben wir die in § 60 für x, η und $y^{I} \ldots y^{V}$ gefundenen Werthe in die ursprünglichen Gleichungen zu setzen, den Werth n' aus dem links vom = befindlichen Gliedern zu berechnen, und mit dem in der Gleichung rechts gegebenen n zu vergleichen. $\nu = n - n'$ sind die übrigbleibenden, in Zollen angegebenen Fehler der ursprünglichen Gleichungen. Diese stelle ich jetzt zusammen, und neben ihnen die Werthe von $\nu^2 g = \frac{\nu^2 G}{10000}$. Die Morgenbeobachtungen der Sommerzeit sind mit (m) wie früher angezeigt.

I. *Beschtau.*

$v =$		$v^2g =$
— 4,6		0,87
+ 9,1		1,99
— 9,1		0,63
— 4,0		0,12
+ 187		13,89
— 46	(m)	0,41
+ 54	(m)	0,60
— 92	(m)	1,84
$\Sigma(v^2g) =$		20,35
		8 Beob.

II. *Elbrus W.*

$v =$		v^2g
+ 121	(m)	1,01
— 28	(m)	0,06
— 248	(m)	4,82
+ 44	(m)	0,12
+ 205	(m)	2,56
+ 66	(m)	0,29
+ 153	(m)	1,46
— 371		7,80
— 187		0,85
+ 218		1,12
+ 174		0,74
		20,83
		11 Beob.

III *A*. *Elbrus O. Sommerb.*

$v =$		v^2g
— 48	(m)	0,17
— 196	(m)	3,08
+ 129	(m)	1,06
+ 429	(m)	11,31
+ 68	(m)	0,31
+ 227	(m)	3,25
— 326		6,32
— 230		1,32
		26,82
		8 Beob.

III *B*. *Elbrus O. Winterbeobacht.*

v	v^2g	v	v^2g
— 464	0,44	— 1550	4,29
— 2079	9,12	+ 466	0,38
— 1293	3,43	— 1155	2,29
+ 1151	1,85	— 651	0,52
+ 767	0,82	+ 1609	3,75
+ 446	0,31	+ 400	0,24
— 326	0,17	+ 2447	9,69
— 595	0,59	— 1030	1,76
— 1231	2,70	+ 311	0,16
— 1032	1,89	+ 1640	3,44
— 1003	1,80		
	$\underbrace{\qquad}_{49,64}$		
	21 Beob.		

IV. *Kasbek.*

$v =$		$v^2g =$	$v =$		$v^2g =$
— 112		1,53	+ 215		4,71
+ 30		0,11	— 105		1,25
— 51		0,33	— 144		2,21
+ 307	(m)	7,25	+ 344	(m)	6,72
— 199		4,04	+ 57	(m)	0,19
— 196		3,70	+ 34	(m)	0,07
+ 152		2,55	— 235		4,70
+ 105		1,17			
$\Sigma v^2g =$		$\underbrace{\qquad}_{40,53}$			
		15 Beob.			

V. *Anonymus.*

$v =$		$v^2g =$
+ 204	(m)	4,98
+ 68	(m)	0,53
— 174	(m)	3,62
+ 12		0,02
— 67		0,77
— 95		1,48
+ 4		0,00
+ 104		1,44
		12,84
		8 Beob.

Da nun aus unsern 71 Gleichungen 7 Unbekannte bestimmt sind, und $\frac{64}{71} = 0,9014$ ist: so erhalten wir nach den 5 verschiedenen Systemen und für die Gesammtzahl der Beobachtungen die nachfolgenden Werthe der $\Sigma\,(v^2g)$, der ihnen entsprechenden Divisoren d und des der Gewichtseinheit in g zukommenden w. F. $\varepsilon' = 0,6745\,\sqrt{\frac{\Sigma(v^2g)}{d}}$.

	$\Sigma(v^2g)$	Divisor d	$\varepsilon =$
I. Beschtau	20,35	8 . 0,9014 = 7,212	1,133 Zoll
II. Elbrus W.	20,83	11 . 0,9014 = 9,915	0,978 «
III. Elbrus O.	76,46	29 . 0,9014 = 26,141	1,153 «
IV. Kasbek	40,53	15 . 0,9014 = 13,521	1,168 «
V. Anonymus	12,84	8 . 0,9014 = 7,211	0,900 «
	171,01	64,000	1,103 Zoll

Die 5 Werthe von ε' stimmen so gut zusammen, als sich nach der mässigen Zahl der den einzelnen zum Grunde liegenden Beobachtungen erwarten lässt. Wir haben aber noch besonders zu untersuchen, wie die 3 Werthe von ε' übereinkommen, welche für die 3 Gruppen der Abend- und Morgenbeobachtungen in den Sommermonaten und der Winterbeobachtungen in Stawropol getrennt sich ergeben. Hiezu müssen wir die $\Sigma(\nu^2 g)$ für jede Classe besonders nehmen, und erhalten folgende Grössen:

	$\Sigma\nu^2 g$	Divisor d	$\varepsilon' =$
Aus den 27 Abendbeob.	65,66	$27 . 0{,}9014 = 24{,}338$	$1{,}108 \mp 0{,}061$ Zoll
« « 23 Morgenbeob.	55,71	$23 . 0{,}9014 = 20{,}732$	$1{,}106 \mp 0{,}067$ «
« « 21 Winterbeob.	49,64	$21 . 0{,}9014 = 18{,}930$	$1{,}092 \mp 0{,}070$ «
	171,01	64,000	

Die Abweichungen dieser 3 Werthe von ε' liegen weit innerhalb der Gränze ihrer Sicherheit. Wir gelangen also zu der Ueberzeugung, dass die für die ursprünglichen Gleichungen angesetzten Gewichte, auch für die Mittel der 3 Gruppen, als den übrigbleibenden Fehlern relativ entsprechend anzusehen sind. Dass die Gewichte innerhalb jeder Gruppe relativ richtig sind, ist schon früher angedeutet, und erhält jetzt seine volle Bestätigung. Wir sind also jetzt versichert, dass die gegebene Auflösung der Gleichungen in Bezug auf die Gewichte eine richtige ist. Da wir aber durch die strenge Auflösung der Gleichungen für den der Gewichtseinheit in g entsprechenden w. F., der vorläufig, nach § 58, $\varepsilon = 1{,}0$ angenommen war, jetzt $\varepsilon' = 1{,}103$ Zoll erhalten haben, so folgt, dass die in § 60 für x und η gefundenen w. F. zu klein und mit dem Coefficienten 1,103 zu multipliciren sind. Es wird demnach

der w. F. von x jetzt $0{,}6594 . 1{,}103 = 0{,}7273$;

« « « « η « $7{,}158 . 1{,}103 = 7{,}895$ Einheiten der 4ten Stelle.

§ 62.

Die für die Bildung der Bedingungsgleichungen gewählten genäherten Werthe der beiden, die Refraction bedingenden Constanten waren $\lambda' = 0{,}073689$ und $1 + \gamma' = 1{,}015725$.

Mit $x = -1{,}2954 \mp 0{,}7273$ und $\eta = -14{,}639 \mp 7{,}895$, nach § 60, erhalten wir jetzt als Resultat der gesammten Beobachtungen:

$$\lambda = 0{,}073689\,(1 - 0{,}012954 \mp 0{,}007273) = 0{,}072734 \mp 0{,}000523,$$

$$1 + \gamma = 1{,}015725 \quad - 0{,}001464 \mp 0{,}000789 \quad = 1{,}014261 \mp 0{,}000789,$$

und für den jedesmaligen Refractionscoefficienten den Ausdruck

$$\mu = 0{,}072734 \cdot \frac{B}{29{,}00} \cdot 1{,}014261^{\tau}.$$

§ 63.

Ich habe es in § 51 als einen der Zwecke der Untersuchung angegeben, zu erforschen, ob die normale Refraction, unabhängig vom Höhenunterschiede zwischen Object und Beobachter, durch die Amplitudo bestimmt wird. Die bisherige Untersuchung zeigt dies im allgemeinen dadurch, dass wir aus der Gesammtheit der Beobachtungen einen Werth von λ gefunden haben, der die Beobachtungen des nur 4600

Fuss hohen Beschtau und die der 4 andern zwischen 16500 und 18500 Fuss hohen Bergspitzen nahezu gleich gut darstellt. Indess bedarf der Gegenstand einer näheren Prüfung; und es bietet sich dazu der Weg sogleich dar, dass wir die Beobachtungen der 4 hohen Bergspitzen zusammen für sich, und ebenso die des Beschtau für sich behandeln, und die Ergebnisse dieser Behandlung vergleichen.

Wenn wir die auf den Beschtau bezüglichen partiellen Endgleichungen X^I und Y^I in § 61 (☽) bei Seite lassen, so erhalten wir aus der Vereinigung der übrigen sofort zwei neue Hauptgleichungen für x und η, die auf den alleinigen Messungen der hohen Bergspitzen beruhen, nämlich:

$$[X]\quad 12121x = -40079 - 512{,}65\eta;$$
$$[Z]\quad 202{,}937\eta = -3337{,}7 - 512{,}65x.$$

Die Auflösung dieser gibt:

	$x = -2{,}9233$	$\eta = 9{,}062$
Gewicht	10826	181,26
w. F.	$\frac{110{,}3}{\sqrt{10826}} = 1{,}060$	$\frac{110{,}3}{\sqrt{181{,}26}} = 8{,}191.$

Der neue Werth $\eta = -9{,}062 \mp 8{,}191$ ist auf jeden Fall dem aus dem Complexe aller Beobachtungen erhaltenen Werthe $\eta = -14{,}64 \mp 7{,}90$ vorzuziehen, weil er auf dem gleichartigeren Materiale der Beobachtungen der hohen Bergspitzen allein beruht, indem der andere die noch nicht erwiesene Unabhängigkeit der λ von der Höhe der Berge voraussetzt. Die Beschtau-Messungen konnten überhaupt für sich nur einen geringen Beitrag zur Bestimmung von η liefern, weil bei ihnen die äussersten Thermometerstände um nicht mehr als $3^0{,}3$ von einander abweichen, und daher steht auch das neue Gewicht $= 181{,}26$ dem mit Zuziehung des Beschtau erhaltenen $= 195{,}13$ nur um ein geringes nach*).

---

*) Es ist einzig die 5te in b^{79} gemachte Beschtau-Beobachtung, welche die Störung in der Uebereinstimmung der beiden Werthe von η hervorgerufen hat. Wenn wir diese einzige Beobachtung ausschliessen, so ergeben sich durch Beschtau, statt der in § 59 I. gegebenen, die nachfolgenden partiellen Endgleichungen:

$$Y^I)\quad 797{,}2\,y^I + 1803\,x - 0{,}33\,\eta = +473$$
$$X^I)\quad 1803\,y^I + 13028\,x + 53{,}84\,\eta = -15564$$
$$Z^I)\quad -0{,}33\,y^I + 53{,}84x + 1{,}626\eta = +10{,}9$$

Nachdem hier y^I wie früher eliminirt ist, wird

$$[X^I]\quad 8950\,x = -16634 - 54{,}59\eta$$
$$[Z^I]\quad 1{,}626\eta = +11{,}1 - 54{,}59x.$$

Vereinigen wir diese 2 Gleichungen mit den obigen, aus den 4 hohen Bergen abgeleiteten [X] und [Y], so werden die beiden neuen Hauptendgleichungen, statt der in § 60 gegebenen, nunmehr folgende sein:

$$X)\quad 21071\,x = -56713 - 567{,}24\eta$$
$$Z)\quad 204{,}563\eta = -3326{,}6 - 567{,}24x.$$

Und hieraus ergibt sich:

	$x = -2{,}436$	$\eta = -9{,}51$
Gewicht	19489	189,29
w. F.	0,762	7,74.

Dies $\eta = -9{,}51$ ist dem obigen $\eta = -9{,}06$ so nahe, dass es in Betracht der erheblichen w. F. als fast mit demselben identisch angesehen werden kann.

Dennoch hat diese Uebereinstimmung für mich keinen hinlänglichen Beweggrund abgegeben, die erwähnte 5te Beschtau-Beobachtung zu verwerfen, weil ich es für wesentlich ansah, bei einer solchen Untersuchung mich jeder Willkühr zu enthalten. Es ist übrigens diese Beobachtung unter allen die am stärksten abweichende, wie das ihr nach § 61 zukommende $\nu^2 g = 13{,}89$ zeigt. Da das Quadrat des w. F. der

Ich sehe daher $\eta = -9{,}06 \mp 8{,}19$ als das richtige Ergebniss unserer Untersuchung über den Thermometercoefficienten an. Da wir nun von dem genäherten $1 + \gamma' = 1{,}015725$ ausgegangen sind: so ist allendlich

$$1 + \gamma = 1{,}014819 \text{ mit dem w. F. } 0{,}000819.$$

Wir können aber nun noch untersuchen, wie übereinstimmend die aus den Messungen der 4 hohen Bergspitzen sich ergebenden Werthe von λ unter sich sind. Zu dem Ende finden wir durch die Gleichungen $X^{II} \ldots X^{V}$ in § 60 (☽), sofort:

		Gewicht	w. F.
nach X^{II} aus	Elbrus W. $x = -\ 0{,}334 + 0{,}0759\,\eta$	3431	1,882
« X^{III} «	Elbrus O. $x = -\ 4{,}566 - 0{,}0875\,\eta$	8338	1,208
« X^{IV} «	Kasbek $x = -\ 1{,}663 - 0{,}1512\,\eta$	322	6,144
« X^{V} «	Anonymus $x = -11{,}14 + 0{,}2047\,\eta$	30	20,13

Setzen wir hierin jetzt $\eta = -9{,}06 \mp 8{,}19$, so findet sich:

	w. F.	$\nu =$
aus Elbrus W. $x = -\ 1{,}021$	$\mp 1{,}882 \mp 0{,}620 = \mp 1{,}981$	$+ 1{,}779$
« Elbrus O. $x = -\ 3{,}773$	$\mp 1{,}208 \mp 0{,}717 = \mp 1{,}404$	$- 0{,}973$
« Kasbek $x = -\ 0{,}293$	$\mp 6{,}153 \mp 1{,}239 = \mp 6{,}268$	$+ 2{,}507$
« Anonymus $x = -12{,}99$	$\mp 20{,}13 \mp 1{,}68 = \mp 20{,}19$	$-10{,}19$

Vereinigen wir diese 4 Werthe nach ihren w. F., so ergibt sich der Mittelwerth $x = -2{,}800$. Dieser weicht etwas vom früher, § 60, durch die Elimination der Gleichungen $[X]$ und $[Y]$ gefundenen $x = -2{,}923$ ab; und so muss es auch sein, weil bei der jetzigen Auflösung die Compensation nicht beachtet ist, die unter den Coefficienten von η für's Endresultat stattfindet. Wenn wir aber die Uebereinstimmung der 4 partiellen Werthe von x beurtheilen wollen, so haben wir sie als unabhängig von einander mit ihrem eigenen Mittel zu vergleichen, und diesem entsprechen auch die oben gegebenen ν. Die Vergleichung dieser ν mit den entsprechenden w. F. zeigt nun, dass alle 4 Werthe von x innerhalb ihrer w. F. mit dem Mittel übereinstimmen. Wir schliessen hieraus, dass wir vollkommen berechtigt sind, für die Beobachtungen der 4 hohen Bergspitzen einen einzigen Refractionscoefficienten anzunehmen.

Um jetzt auch aus den im vorigen bei Seite gelassenen Beobachtungen des Beschtau den diesen zugehörenden Refractionscoefficienten zu erhalten, haben wir, nach § 60 (☽),

$$X^{I})\ 12132\,x = +1249 + 6{,}25\,\eta.$$

Gewichtseinheit $\varepsilon'^2 = 1{,}10^2 = 1{,}21$ ist, so gibt diese Beobachtung eine Abweichung, die $\sqrt{(13{,}89 : 1{,}21)} = 3{,}4$ Mal grösser ist als der w. F. Der Theorie nach gibt es unter 71 Beobachtungen 2,6 Fehler, die grösser als $3{,}1\,\varepsilon$ sind; und es ist sehr befriedigend, dass unser Beobachtungsmaterial statt 2,6 Fälle nur einen einzigen darbietet; woraus erhellt, dass in der Theorie der Fehler kein Grund zum Ausschliessen der genannten Beobachtung zu finden ist, d. h. dass die Theorie uns nicht andeutet, dass irgendwie störende Versehen in unsern Beobachtungen vorkommen. Ein anderes wäre es gewesen, wenn an der Beobachtung selbst sich etwas verdächtig auswiese. Ich habe sie daher nach den Originaltagebüchern untersucht, und nach diesen als richtig berechnet und unverdächtig erkannt, ja völlig controllirt durch die Uebereinstimmung des Ortes des Zeniths aus den beiden Beobachtungen des Beschtau und des Kasbek.

Aus dieser Gleichung ergibt sich

$$x = +0{,}1030 + 0{,}00052\eta, \text{ mit dem w. F. } \frac{110{,}3}{\sqrt{12132}} = 1{,}001.$$

Wir sehen, dass dieses x fast ganz unabhängig von η ist, und wenn wir für η seinen Werth $-9{,}06 \mp 8{,}19$ setzen, so findet sich

$$x = +0{,}0983, \text{ mit dem w. F.} \mp 1{,}001 \mp 0{,}0039 = \mp 1{,}001.$$

§ 64.

Da, nach § 56, $\lambda = 0{,}073689 \cdot \left(\frac{1+x}{100}\right)$ ist, und wir

für die 4 hohen Berge $x = -2{,}923 \mp 1{,}060$

für Beschtau $x = +0{,}098 \mp 1{,}001$

in § 63 erhalten haben: so ist also

für die 4 hohen Berge $\lambda = 0{,}07153 \mp 0{,}00074$

für den Beschtau $\lambda = 0{,}07376 \mp 0{,}00078$.

Diese beiden Werthe weichen stärker von einander ab, als sie es nach ihren w. F. sollten, indem $(0{,}6745 \,.\, 223)^2 = 22624$ fast das Doppelte von $78^2 + 74^2 = 11560$ beträgt, und somit deutet der Unterschied auf eine wirkliche Verschiedenheit der beiden λ, ohne diese indess ausser Zweifel zu stellen, da es noch nichts sehr auffallendes hat, wenn ein wirklicher Unterschied 0,00223 doppelt so gross ist als der wahrscheinliche, 0,00108.

§ 65.

Die bisherigen Untersuchungen haben zu 4 Werthen des mittleren für $b = 29{,}00$ engl. Zoll und $t = +16^0{,}0$ R. geltenden normalen Refractionscoefficienten geführt. Zwei derselben sind am Schlusse des § 45 gegeben, und beruhen auf den reciproken, im Verlaufe des Nivellements beobachteten Zenithdistanzen der um 115″,5 und 230″,7 oder 3,37 und 6,75 Werst entfernten Signale. Für diese λ ist zugleich die mittlere Höhe der Gesichtslinie über dem Erdboden, die ich mit A bezeichnen will, angegeben. Die beiden andern sind das Ergebniss der Messungen des 4600 Fuss hohen Beschtau, für den die Entfernungen, aus welchen er beobachtet wurde, von der kleinsten 6′56″ = 12,1 Werst, bis zur grössten 48′6″ = 84,2 Werst gehen, und der Messungen der 4 andern im Mittel über 17000 Fuss hohen Bergspitzen, bei welchen die Entfernungen zwischen 55′46″ = 96,9 Werst, und 1°44′8″ = 180,3 Werst liegen. Einen genäherten Werth der mittleren Höhe der Gesichtslinie werden wir auch für diese beiden λ erhalten, wenn wir statt ihrer die halben Unterschiede der Meereshöhen der Standpuncte und der Bergspitzen nehmen, und zu einem Mittel vereinigen. Auf diese Weise findet sich für den Beschtau $A = 1765$ Fuss, für die 4 hohen Spitzen $A = 8435$ Fuss. Somit haben wir

	A	
$\lambda = 0{,}10060 \mp 0{,}00370$	16 Fuss	aus der Operationslinie,
$\lambda = 0{,}08140 \mp 0{,}00180$	42 «	
$\lambda = 0{,}07376 \mp 0{,}00078$	1765 «	durch Beschtau,
$\lambda = 0{,}07153 \mp 0{,}00074$	8435 «	durch die 4 hohen Berge.

Die vier λ zeigen nun ganz entschieden, dass ausser dem Barometer- und Thermometerstande am Beobachtungsorte, auch noch die Höhe der Gesichtslinie über dem Erdboden, in ihrem ganzen Wege vom Object zum Auge des Beobachters betrachtet, einen Einfluss auf den Refractionscoefficienten ausübt, dass dieser also nicht durch die Amplitudo allein bestimmt wird. Wir sehen, dass mit einer Abnahme von A eine Vergrösserung der Refraction eintritt, dass diese Zunahme aber erst erheblich ist, wenn A sehr klein wird.

§ 66.

Die bisher angenommene Formel $\varrho = \mu C$, worin ϱ die Refraction, μ deren von B und T bedingten Coefficienten und C die Amplitudo bedeuten, ist das Integral der Differentialformel $d\varrho = \mu dC$. Dieses Differential ist also nicht vollgültig, und wir müssen annehmen, dass $d\varrho$ noch ein zweites Glied enthält, welches von h, der dem Elemente der Gesichtslinie zukommenden Höhe über dem Boden, bestimmt wird. Wäre die Erdoberfläche eine genaue Kugel, und befände sich das beobachtete Object frei ruhend in der Atmosphäre, so liesse sich $h = bC + cC^2$ mit hinreichender Annäherung ausdrücken, worin c aus dem Krümmungshalbmesser abgeleitet wird, und b durch die Zenithdistanz des Objects gefunden werden kann. Wir hätten also folgenden vollständigeren Werth der Refraction

$$\begin{aligned} \varrho &= \int (\mu dC + f(bC + cC^2)dC) \\ &= \mu C + \int K dC. \end{aligned}$$

Von der Natur dieser Function K wissen wir nur soviel, dass sie abnimmt, wenn C zunimmt, aber nicht $= \infty$ werden darf für $C = 0$, und so wäre die einfachste Form, die wir uns denken können, $K = \frac{\chi}{\sigma + bC + cC^2}$, und in dieser Voraussetzung hätten wir

$$\varrho = \mu C + \int \frac{\chi dC}{\sigma + bC + cC^2}.$$

Dieses Integral ist ein bekanntes. Die Schwierigkeit der Anwendung liegt aber darin, dass χ und σ erst aus den Beobachtungen zu bestimmende Grössen sind, durch deren Einführung 2 neue Unbekannte zu den 3 jetzt schon in jeder ursprünglichen Gleichung vorhandenen hinzukämen, und wir also im Ganzen 9 zu bestimmende Unbekannte für unsern Fall hätten. Dazu gesellt sich nun aber noch der Umstand, dass die Voraussetzung eines in einer Höhe über der sphärischen Erdoberfläche frei ruhenden Punctes in der Natur gar nicht vorkommt; dass vielmehr die Höhe der Gesichtslinie für jedes Element derselben von der zufälligen ganz unregelmässigen Linie abhängt, in welcher die Verticalebene des Objects den Erdboden schneidet. Nur wenn ein vollständiges Profil des Terrains zwischen dem Beobachter und dem Objecte gegeben wäre, könnten wir alle Werthe von h finden, und wären dann im Stande $\int \frac{\chi dC}{\sigma + h}$ durch mechanische Quadratur zu ermitteln, so wie χ und σ bekannt sind. Es ergibt sich hieraus, dass, selbst wenn die obige einfache Form von K gültig wäre, was keinesweges fest steht, der Einführung der neuen Unbekannten χ und σ in die ursprünglichen Gleichungen unübersteigbare Hindernisse entgegentreten, und dass wir also gezwungen sind, diesen Weg ganz zu verlassen.

§ 67.

Es bietet sich jetzt der Ausweg dar, die Veränderung von λ als von A, der mittleren Höhe der Gesichtslinie über dem Boden, abhängig anzusehen, und diese Abhängigkeit aus der Erfahrung, d. h. aus den 4 in § 65 gegebenen Werthen von λ abzuleiten. Ich setze daher $\lambda = A + fA$, und wähle nach den früheren, auch hier noch zu berücksichtigenden Gründen $fA = \frac{\chi}{\sigma + A}$, wo σ und A in engl. Fussen ausgedrückt sind, und durch die Einführung von σ bezweckt ist, dass fA, für $A = 0$, nicht unendlich werde. Auf diese Weise erhalten wir durch die Angaben in § 65:

	w. F.	rel. Genauigkeit
1) $A + \frac{\chi}{\sigma + 16} = 0{,}10060$	0,00370	1,00
2) $A + \frac{\chi}{\sigma + 42} = 0{,}08140$	0,00180	2,05
3) $A + \frac{\chi}{\sigma + 1765} = 0{,}07376$	0,00078	4,75
4) $A + \frac{\chi}{\sigma + 8435} = 0{,}07153$	0,00074	5,00

Aus diesen 4 Gleichungen sind die 3 Unbekannten A, χ und σ zu bestimmen.

Suchen wir nun σ zunächst aus der Verbindung der Gleichungen 1) 2) 4), und dann aus den Gleichungen 1) 2) 3): so ergibt sich das erste Mal $\sigma = -2{,}6$ und das zweite Mal $\sigma = -5{,}4$. Die andern zwei Verbindungen kommen hier gar nicht in Betracht, da sie für die Bestimmung von σ zu ungünstig sind, so wie σ sehr klein gegen A ist. Es entspricht also unseren Gleichungen ein kleiner negativer Werth von etwa 4 Fuss für σ, der unstatthaft ist weil σ positiv sein muss, und sich ganz einfach aus den kleinen, in den beiden ersten λ befindlichen Fehlern, so wie aus der über den genauen Werth der A nachbleibenden Unsicherheit erklärt. Siehe Seite LXIX. Wir genügen daher unseren 4 Gleichungen desto besser, je kleiner der positive Werth ist, den wir für σ ansetzen, d. h. wir haben diejenigen Werthe von A und χ zu suchen, welche $\sigma = 0$ entsprechen, indem beide Grössen A und χ, wenn σ sehr klein ist, als von σ unabhängig anzusehen sind. Dabei verliert auch unsere Auflösung nichts an Brauchbarkeit, weil in der Anwendung $A < 10$ Fuss wohl nicht leicht vorkommt, und wenn es vorkommt, wie bei einem geometrischen Nivellement, man gar keiner Kenntniss von λ bedarf, da die Wirkung der Strahlenbrechung wegen der Kleinheit der Entfernungen für sich als verschwindend angesehen werden darf, und überdies, bei jeder Operation von der Mitte aus, eliminirt wird.

Nehmen wir demnach $\sigma = 0$, so werden unsere 4 Gleichungen, wenn wir in ihnen $\chi = 10000\,\chi'$ setzen und sie mit ihren relativen Genauigkeiten multipliciren, zu folgenden 4 Gleichungen von gleicher Genauigkeit $= 1{,}00$ umgeformt, in denen der dem Gewichte 1 entsprechende w. F. $= 0{,}00370$ ist:

	Fehler d. Gl. $v =$
$A + 625{,}0\,\chi' = 0{,}10060$	$+0{,}00160$
$2{,}05\,A + 488{,}1\,\chi' = 0{,}16687$	$-0{,}00230$
$4{,}75\,A + 26{,}91\,\chi' = 0{,}35036$	$+0{,}00542$
$5{,}00\,A + 5{,}93\,\chi' = 0{,}35765$	$-0{,}00450$

Aus ihnen folgen die beiden Eingleichungen:

$$52{,}764\varLambda + 1783{,}0\chi' = 3{,}89514;$$
$$1783{,}0\varLambda + 629626\chi' = 155{,}873;$$

und deren Auflösung gibt

$$\varLambda = 0{,}072383 \quad \text{mit dem w. F. } 0{,}000535;$$
$$\chi' = 0{,}000042586 \quad « \quad « \quad « \quad « \quad 0{,}000004904;$$
$$\chi = 0{,}42586 \quad « \quad « \quad « \quad « \quad 0{,}04904.$$

Wir haben also für die jedesmaligen Refractionscoefficienten den Ausdruck

$$\lambda = 0{,}072383 + \frac{0{,}42586}{A},$$

in welchem A die mittlere Höhe der Gesichtslinie über dem Erdboden in engl. Fussen bedeutet, oder, wenn diese mangelt, den halben Höhenunterschied der beiden Puncte. Die 4 ursprünglichen gegebenen λ sind:

	0,10060	0,08140	0,07376	0,07153
w. F.	∓ 370	∓ 180	∓ 78	∓ 74
die Formel gibt	0,09900	0,08252	0,07262	0,07243
Unterschied	$+160$	-112	$+114$	-90

Berechnet man mit den oben gegebenen ν den der Gewichtseinheit zukommenden w. F., so findet er sich 0,00395, während er nach den Bestimmungen selbst 0,00370 war. Es zeigt sich also, dass die 4 Werthe λ der angenommenen Form $\varLambda + \frac{\chi}{A}$ fast so genau entsprechen, als es nach den in ihnen vorhandenen w. F. zu erwarten war, und dass sie folglich für die Gültigkeit dieser Form zeugen.

§ 68.

Jetzt haben wir endlich noch die aus den bisherigen Untersuchungen folgenden absoluten Höhen der Berge abzuleiten. Nach § 57 ist

die Höhe des Beschtau $= 55073 + y^{I}$ Zoll,
« « « Elbrus Westkuppe $= 222167 + y^{II}$ «
« « « Elbrus Ostkuppe $= 221322 + y^{III}$ «
« « « Kasbek $= 198564 + y^{IV}$ «
« « « Anonymus $= 203226 + y^{V}$ «

Zur Bestimmung von $y^{I} \ldots y^{V}$ führen die Gleichungen § 60 (☉), wenn wir in diese die Endwerthe für η und x substituiren. Für x haben wir bei Beschtau und bei den 4 hohen Bergen einen etwas verschiedenen Werth zu setzen. Es ist nämlich, nach § 67:

für Beschtau $\lambda = 0{,}072624 = 0{,}073689 - 0{,}001065$; w. F. $= 0{,}000535$,
für die hohen Berge $\lambda = 0{,}072433 = 0{,}073689 - 0{,}001256$; w. F. $= 0{,}000535$;

und wir haben für Beschtau $x = -\frac{0{,}1065}{0{,}07369} = -1{,}445$ w. F. $= 0{,}0726$.

für die hohen Berge $x = -\frac{0{,}1256}{0{,}07369} = -1{,}703$ w. F. $= 0{,}0726$.

Für alle 5 Berge gemeinsam gilt, nach § 63, $\eta = -9{,}062$, w. F. $= 8{,}191$.

I. *Beschtau.*

Die Gleichung § 61 (⊙) $y^{I} = +1,3829 - 2,407x + 0,00311\eta$, mit dem w. F. 3,53,

gibt jetzt $y^{I} = +1,38 + 3,47 - 0,03 = +4,82$ Z., « « « « $\mp 3,53 \mp 1,74 \mp 0,03 = 3,9$.

Höhe des Beschtau = 55077,8 Zoll, mit dem w. F. 3,9 Zoll.

II. *Elbrus Westkuppe.*

Die Gleichung $y^{II} = -10,704 - 78,852x + 0,266\eta$, mit dem w. F. 40,71,

gibt $y^{II} = -10,70 + 134,42 - 2,41 = +121,3$ Zoll, « « « « $\mp 40,71 \mp 57,25 \mp 2,17 = 70,3$.

Höhe des Elbrus W. = 222288,3 Zoll, w. F. 70,3 Zoll.

III. *Elbrus Ostkuppe.*

Die Gleichung $y^{III} = -33,761 - 83,728x - 1,075\eta$, mit dem w. F. 43,43,

gibt $y^{III} = -33,76 + 142,75 + 9,74 = 118,7$ Zoll, « « « « $\mp 43,43 \mp 60,80 \mp 8,81 = 75,2$.

Höhe des Elbrus O. = 221440,7 Zoll, w. F. 75,2 Zoll.

IV. *Kasbek.*

Die Gleichung $y^{IV} = -7,675 - 64,427x + 2,375\eta$, mit dem w. F. 26,33,

gibt $y^{IV} = -7,67 + 109,78 - 21,52 = +80,6$ Z., « « « « $\mp 26,33 \mp 46,77 \mp 19,45 = 57,1$.

Höhe des Kasbek = 198644,6 Zoll, w. F. 57,1 Zoll.

V. *Anonymus.*

Die Gleichung $y^{V} = -4,306 - 51,824x + 1,5445\eta$, mit dem w. F. 29,73,

gibt $y^{IV} = -4,31 + 88,33 - 14,00 = +70,0$ Zoll, « « « « $\mp 29,73 \mp 37,62 \mp 12,65 = 49,6$.

Höhe des Anonymus = 203296,2 Zoll, w. F. 49,6 Zoll.

Die gegebenen w. F. sind hier aus der Verbindung dreier partieller w. F. entstanden. Es ist z. B. für Elbrus W. 40,71 Zoll der w. F., welchen die Unsicherheit der Messungen selbst nachgelassen hat, wobei die zufälligen Unregelmässigkeiten der Strahlenbrechung den grössten Antheil haben, die eigentlichen Beobachtungsfehler einen nur geringen. Die 2te Zahl, 57,25 Zoll, ist der w. F. der Höhe, welcher von der in λ, dem mittleren Refractionscoefficienten, nachgebliebenen Unsicherheit herrührt; die 3te, 2,17 Zoll, ist der Fehler, den die Unsicherheit des Thermometercoefficienten $1 + \gamma$ für die Höhenbestimmung erzeugt. Der Totalbetrag des w. F. ist $\sqrt{(40,71^2 + 57,25^2 + 2,17^2)} = \mp 70,3$ Zoll. Es ist ersichtlich, dass die übrig gebliebene Unsicherheit von λ die Genauigkeit der Berghöhen am bedeutendsten beeinträchtigt hat, während der Einfluss des Thermometercoefficienten fast verschwindend ist, weil die Sommerbeobachtungen, auf denen die Berghöhen fast ausschliesslich beruhen, für jeden Berg eine mittlere Temperatur haben, die sehr wenig von $+16°,0$ abweicht, für welchen Stand der Refractionscoefficient λ gilt.

Die so gefundenen Zahlen geben die w. F. des Höhenunterschiedes zwischen den Bergspitzen und den Standpuncten. Um also die vollständigen w. F. der Meereshöhen zu erhalten, müssen noch die w. F. der Standpuncte selbst hinzugezogen werden. Für den ersten Standpunct p^{70} ist, nach Seite LIX, der w. F. der Meereshöhe 6,90 Zoll, für den letzten α^{87}, nach Seite LXI, 7,90 Zoll. Wir können daher ohne Bedenken als Mittelwerth den w. F. der Meereshöhen der Standpuncte 7,4 Zoll setzen, und haben zu den früheren Summen der Quadrate der partiellen Fehler, die 15,5, 4939, 5661, 3259 und 2459 waren, jetzt noch $7{,}4^2 = 54{,}8$ hinzuzufügen, wodurch wir die neuen Quadratsummen 69,3, 4994, 5716, 3314 und 1514 erhalten, und daraus die vervollständigten w. F. 8,3, 70,7, 75,6, 57,6 und 49,6 Zoll.

Wir haben aber noch zu untersuchen, welche Fehler die in der Bestimmung der geodätischen Abstände stattfindende Unsicherheit für die Berghöhen hervorgerufen haben kann. § 9, Seite xv, ist von mir gezeigt worden, dass die horizontalen auf der Operationslinie des Nivellements selbst genommenen Entfernungen zwischen zwei beliebigen Signalen für innerhalb $\frac{1}{30000}$ genau angesehen werden dürfen. Nun sind die Entfernungen der Bergspitzen auf beobachtete Richtungen derselben begründet, für welche die Entfernung der Signale der Operationslinie die Basis abgaben. Jede Berghöhe unterliegt also in dieser Rücksicht einem w. F. von etwa $\frac{1}{30000}$ des mittleren Höhenunterschiedes u des Berges und der Standpuncte. Somit kommen zu den früheren w. F. noch hinzu:

	u	w. F. der Höhe	Quadrat
für Beschtau	42400 Zoll	1,4 Zoll	2,0
für Elbrus W.	213600 «	7,1 «	50
für Elbrus O.	211720 «	7,0 «	49
für Kasbek	190900 «	6,4 «	41
für Anonymus	194400 «	6,5 «	42

Die geodätischen Entfernungen hängen aber auch noch von der Genauigkeit der beobachteten Richtungen der Objecte ab. Die horizontalen Richtungen nach den Bergspitzen sind von 10 verschiedenen Puncten der Operationslinie und vom Hülfspunct Q gemessen worden, und deren Zusammenstellung ist Seite 45 des Textes gegeben. Wir sehen daselbst, dass

Beschtau eingeschnitten	wurde	von	Q, P^{70}, B^{70}, P^{75},	also	von	4 Puncten,
Elbrus W. / Elbrus O.	«	«	Stawropol, B^{70}, P^{75}, A^{87}, P^{87},	«	«	5 «
Kasbek	«	«	P^{75}, B^{80}, P^{82}, B^{83}, A^{87}, P^{88}, B^{95},	«	«	7 «
Anonymus	«	«	P^{75}, B^{80}, P^{82}, B^{83}, P^{88},	«	«	5 «

Die hauptsächlichen Richtungen finden sich in der Charte verzeichnet, wobei ich bemerke, dass die für den Kasbek wichtige Richtung von P^{95} aus nicht eingetragen ist. Wie Sawitsch aus den verschiedenen Richtungen eines Berges die wahrscheinlichsten Werthe seiner Coordinaten ableitete, ist Seite 372, 373 des Textes auseinandergesetzt, ohne dass indess die Einzelnheiten der Rechnung mitgetheilt werden, indem Seite 374 sich nur die Endresultate der Abstände der Bergspitzen von den Standpuncten zusammengestellt finden. Zugleich gibt Sawitsch die wichtige Notiz, dass, nach der Ausgleichung der Beobachtungen die einzelnen Richtungen nach den Bergen bis auf etwa 8″ genau sind, d. h. einem w. F. von 8″ unterliegen.

Wenn in einem Dreiecke, von den Winkeln A, B, C, nur die beiden an der gegebenen Grundlinie c liegenden Winkel, A und B, gemessen sind, und beide einem w. F. von f Secunden unterliegen, so findet sich der w. F. der beiden berechneten Seiten a und b einfach auf folgende Weise. Es seien α, β, γ die einer Bogensecunde entsprechenden Veränderungen von log sin A, log sin B und log sin C, in Einheiten der 7ten Decimale, positiv genommen für den spitzen Winkel, negativ für den stumpfen, so ist

$$\frac{da}{a} = \frac{f\sqrt{((\alpha+\gamma)^2+\gamma^2)}}{4342945}, \quad \frac{db}{b} = \frac{f\sqrt{((\beta+\gamma)^2+\gamma^2)}}{4342945}.$$

Betrachten wir nun die Dreiecke der äussersten nach jedem der Berge gezogenen Gesichtslinien, so finden wir mit hinreichender Genauigkeit:

	für Beschtau	Elbrus	Kasbek	Anonymus
Grundlinie $c =$	$P^{70} - P^{75}$	$B^{70} - P^{88}$	$P^{75} - B^{95}$	$P^{75} - P^{88}$
$A =$	93°	97°	51°	93°
$B =$	50	43	77	50
$C =$	37	40	52	37
$da =$	$\frac{a}{14000}$	$\frac{a}{15900}$	$\frac{a}{14500}$	$\frac{a}{14000}$
$ab =$	$\frac{b}{10200}$	$\frac{b}{10100}$	$\frac{b}{20100}$	$\frac{1}{10200}$

Es ergibt sich also, dass, wenn der w. F. der Abstände im allgemeinen auf $\frac{1}{10000}$ angesetzt wird, wir ihn zu gross annehmen, weil keiner der obigen da und db so beträchtlich ist, und überdies alle Entfernungen durch die Zuziehung der andern Richtungen noch sicherer geworden sein müssen. Dem angenommenen w. F. der Distanz $= \frac{1}{10000}$ entspricht ein ebenso grosser Theil des Höhenunterschiedes als w. F. der Höhe, also

			Quadrat	Vollständiges Quadrat des w. F.	vollständ. w. F. d. Meereshöhe
für Beschtau	von	4,2 Zoll	17,6	69,3 + 2,0 + 17,6 = 88,9	9,4 Zoll
« Elbrus W.	«	21,4 «	458	4994 + 50 + 458 = 5502	74,2 «
« Elbrus O.	«	21,2 «	449	5716 + 49 + 449 = 6214	78,8 «
« Kasbek	«	19,1 «	365	3314 + 41 + 365 = 3720	61,0 «
« Anonymus	«	19,4 «	376	2514 + 42 + 376 = 2932	54,1 «

Schliesslich haben wir noch zu beachten, dass, nach Seite XIV, alle linearen Dimensionen noch um $\frac{1}{45855}$ ihres Betrages zu vermindern sind. Diese Reduction ist bei der Berechnung des Nivellements zwischen beiden Meeren als ganz unbedeutend vernachlässigt. Für die Berghöhen ist sie in Rechnung zu führen, und beträgt für Beschtau —1,2, für Elbrus W. —4,8, für Elbrus O. —4,8, für Kasbek —4,3, für Anonymus —4,4 Zoll. Wenn wir diese Verbesserungen an die Zahlen des § 68 anbringen, so gelangen wir zu den *Endresultaten der Berghöhen:*

Definitive Werthe der Berghöhen.

			Unterschied der früheren Best.-Seite
Beschtau	55077,6 Zoll,	w. F. = 9,4 Zoll	— 6 Zoll
Elbrus W.	222283,5 «	« « = 74,2 «	—116 «
Elbrus O.	221435,9 «	« « = 78,8 «	— 81 «
Kasbek	198640,3 «	« « = 61,0 «	—102 «
Anonymus	203291,8 «	« « = 54,1 «	— 59 «

Die hier gegebenen Höhen der Berge sind als das wahrscheinlichste Resultat aus dem Complexe aller als geeignet angezeigten Beobachtungen anzusehen. Die angegebenen w. F. sind aus der Betrachtung *aller* die Genauigkeit beeinträchtigenden Fehlerquellen gefunden, und ich glaube, dass keine einzige von mir übersehen ist. Interessant ist mir, wie nahe die frühere Bestimmung, Seite LXV, der neuen steht. Für Beschtau ist der Unterschied kleiner als der w. F. der Endbestimmung; für die andern 4 Berge beträgt er im Mittel das 1,30fache des w. F. Der Vorzug der neuen Bestimmung liegt aber gerade darin, dass sie wirklich die wahrscheinlichsten Werthe gibt, und dass die Sicherheit derselben durch die genau ermittelten w. F. richtig erkannt ist. Dass alle Berghöhen etwas grösser geworden sind, ist eine Folge der Verminderung der Refractionscoefficienten, zu der ich gelangt bin.

Da Berghöhen in Zollen ausgedrückt ungewöhnlich und unbequem sind, so gebe ich im nachfolgenden die Berghöhen nach 4 verschiedenen gebräuchlicheren Maasseinheiten.

§ 69.

Endwerthe der Höhen der Berge des Caucasus über dem Asow'schen Meere.

	engl. Fuss	Saschen.	Toisen.	Mètres.
Beschtau	4589,8 ∓ 0,8	655,7 ∓ 0,1	717,8 ∓ 0,1	1398,9 ∓ 0,2
Elbrus Westkuppe	18523,6 ∓ 6,2	2646,2 ∓ 0,9	2896,8 ∓ 1,0	5645,9 ∓ 1,9
Elbrus Ostkuppe	18453,0 ∓ 6,6	2636,1 ∓ 0,9	2885,7 ∓ 1,0	5624,4 ∓ 2,0
Kasbek	16553,4 ∓ 5,1	2364,8 ∓ 0,7	2588,6 ∓ 0,8	5045,4 ∓ 1,5
Anonymus	16941,0 ∓ 4,9	2420,1 ∓ 0,7	2649,3 ∓ 0,7	5163,5 ∓ 1,4

§ 70.

Nach den bisherigen Untersuchungen ist der vollständige Ausdruck des jedesmaligen normalen Refractionscoefficienten

$$\mu = \left(0{,}072383 + \frac{0{,}42586}{A}\right) \cdot \frac{B}{29{,}00} \cdot 1{,}014819^{(16-T)};$$

w. F. 535 4904 819

worin

A die mittlere Höhe der Gesichtslinie über dem Erdboden, oder an deren Stelle den halben Höhenunterschied des Standpunctes und des Objects, in engl. Fussen, bedeutet,

B die in englischen Zollen ausgedrückte, auf die Temperatur des Gefrierpunctes reducirte Höhe der Quecksilbersäule des Barometers, am Orte des Beobachters,

T die Lufttemperatur am Ort des Beobachters nach der Réaumur'schen Scale.

Um die Formel auch für andere Maasseinheiten zu brauchen, sind folgende Substitutionen zu machen:

$\frac{0{,}42586}{A} = \frac{0{,}066598}{A'}$, wenn die mittl. Höhe der Gesichtslinie A' Toisen beträgt,

$= \frac{0{,}12980}{A''}$, « « « « « « A'' Mètres «

$\frac{B}{29{,}00} = \frac{B'}{326{,}525}$, wenn die Barometerhöhe B' pariser Linien ist,

$= \frac{B''}{736{,}586}$, « « « B'' Millimètres «

$1{,}014819^{(16-T)} = 1{,}011838^{(20-T')}$, wenn die Lufttemperatur $= T'$ Grade der 100theiligen Scale,

$= 1{,}006559^{(68-T'')}$, « « « $= T''$ « « Fahrenheit'schen « .

Am Schlusse dieses Aufsatzes ist eine Tafel gegeben, durch welche die Anwendung unserer Formel erleichtert wird.

§ 71.

Ich glaube hier einige Betrachtungen über die Resultate der geführten Untersuchung und über den Weg, wie dieselben durch neue Erfahrungen bestätigt oder berichtigt, und erweitert werden können, so wie einige andere diesen Gegenstand betreffende Bemerkungen hinzufügen zu dürfen.

1. Ramond gibt in seiner berühmten Abhandlung: *Mémoires sur la formule barométrique* 1811, Seite 35 und 234 als erstes Beispiel der Anwendung seiner Formel die Berechnung der Höhe des Chimboraço, aus der von H. v. Humboldt auf dem Berge angestellten Barometerbeobachtung, verglichen mit einer correspondirenden am Ufer des Oceans, und findet die Höhe 5879,2 Mètres. Wenn man die Höhen des Barometers auf 0° des Quecksilbers reducirt, so sind uns folgende Stände gegeben:

	Meeresufer	Chimboraço	
B'	336,4	166,9	par. Linien,
T'	+25°,3	−1°,6	Centigr.,
A''	2940		Mètres.

Berechnet man hiemit nach den obigen Formeln für eine fingirte reciproke Beobachtung der Zenithdistanzen auf dem Chimboraço und am Meeresufer die beiden normalen Refractionscoefficienten, so erhält man:

für die Beob. am Meeresufer $\mu = 0{,}07009$,

« « « auf dem Chimboraço $\mu = 0{,}04671$.

Es ist also das 2te μ genau $\frac{2}{3}$ des ersten, obgleich die Barometerhöhe B' auf dem Berge nur 0,496 oder kaum die Hälfte des B' am Meeresufer beträgt. Unsere Formel spricht also aus, dass die Tangente der Curve des Lichtstrahls in ihren äussersten Puncten mit der die beiden Puncte verbindenden geraden Linie verschiedene Winkel bildet; und dies ist naturgemäss. Es zeigt sich ferner, dass der gefundene Thermometercoefficient bedeutend dahin wirkt, die beiden Refractionen einander zu nähern. Fraglich bleibt aber, ob das nach unserer Formel für den Chimboraço gefundene μ auch das wirklich dort stattfindende ist, weil unsere Formel auf einem zwar sehr umfangreichen Materiale beruht, in welchem aber Beobachtungen von den hohen Puncten aus fehlen. Um über den fraglichen Punct zur Entscheidung zu gelangen, sind gleichzeitige, bei ruhigen Bildern angestellte reciproke Beobachtungen auf 2 Puncten von bedeutendem Höhenunterschiede zu machen, und zwar mit Instrumenten, deren Biegungscoefficienten bekannt sind. Zu diesen Beobachtungen, die unmittelbar die Summe der beiden Refractionen an den Endpuncten geben würden, muss aber, wenn diese einzeln erkannt werden sollen, noch die unabhängige Bestimmung des Höhenunterschiedes hinzukommen, und dieser kann nur erreicht werden, wenn eine eigene Operation zwischen den beiden Puncten ausgeführt wird, die den ganzen Höhenunterschied in so kleine Theile zerlegt, dass bei ihnen der Einfluss der Refraction eliminirt oder wenigstens unschädlich gemacht wird. Ich sehe die grossen Schwierigkeiten der Ausführung einer solchen Arbeit ein, wage aber doch hier den Vorstehern der in der Nähe eines Gebirges belegenen Sternwarten, so wie den mit geodätischen Arbeiten in gebirgigen Gegenden beschäftigten Männern die Ausführung derselben als ein dringendes Bedürfniss für einen weitern Fortschritt in der Kenntniss der irdischen Strahlenbrechung auf's dringendste zu empfehlen.

2. Dem ersten Anscheine nach liegt für den Ausdruck

$$\lambda = 0{,}072383 + \frac{0{,}42586}{A}$$

die Hauptquelle der Unsicherheit im 2ten Gliede, weil dasselbe auf einer nicht strenge zu erweisenden Annahme begründet wurde. Zu einer klareren Einsicht über den Antheil dieses Gliedes führt folgende Tafel der λ, für verschiedene A, von $A = 10$ Fuss bis $A = 15000$ Fuss, also bis jenseits der den höchsten Bergen der Erde zukommenden A, berechnet.

$A =$	$\lambda =$	$A =$	$\lambda =$	$A =$	$\lambda =$	$A =$	$\lambda =$
10 Fuss	0,11497	100 Fuss	0,07664	1000 Fuss	0,07281	10000 Fuss	0,07243
20 «	0,09368	200 «	7451	2000 «	7260	11000 «	7242
30 «	8658	300 «	7380	3000 «	7252	12000 «	7242
40 «	8303	400 «	7345	4000 «	7249	13000 «	7242
50 «	8090	500 «	7323	5000 «	7247	14000 «	7241
60 «	7948	600 «	7309	6000 «	7245	15000 «	7241
70 «	7847	700 «	7299	7000 «	7244		
80 «	7771	800 «	7292	8000 «	7244		
90 «	7712	900 «	7286	9000 «	7243		
100 «	7664	1000 «	7281	10000 «	7243		

Für grössere Höhenunterschiede A ist die Veränderung von λ so geringe, dass wir für $A = 800$ Fuss $\lambda = 0{,}07292$, für $A = 15000$ Fuss $\lambda = 0{,}07241$ in unserer Tafel finden, und der erste Werth noch auf der wahrscheinlichen oberen Gränze des für $A = \infty$ gefundenen $\lambda = 0{,}072383 \mp 0{,}000535 = 0{,}07292$ liegt. Demzufolge stellt sich die Höhenbestimmung für Puncte, die mehr als 1600 Fuss über dem Standpunct erhaben sind, als fast unabhängig vom 2ten Gliede in λ heraus. Erst bei kleinen Erhebungen A wird die Zunahme von λ bedeutend. Es ist aber zu beachten, dass hier der Einfluss des 2ten Gliedes dadurch wieder vermindert wird, dass mit der kleinen Erhebung der Gesichtslinie immer eine geringe Entfernung der Objecte verbunden ist, und so der Einfluss des 2ten Gliedes auf die Höhenbestimmung selbst sehr unbedeutend wird. Ich werde dies durch ein Beispiel erläutern. Die Amplitudo zwischen dem Centro der Sternwarte in Pulkowa und dem 65192 Fuss = 18,626 Werst entfernten Festungsthurm in St. Petersburg beträgt 642,2 Secunden der Erdcurve. Die mittlere Höhe der Gesichtslinie über dem Erdboden ist sehr genau 270 Fuss für ein 5 Fuss über dem Eingang zur Sternwarte gestelltes Instrument. Bei einem Barometerstande von $B = 30{,}00$ Zoll, und $T = +16^{\circ}{,}0$ R. der Lufttemperatur, haben wir also

$$\mu = \left(0{,}072383 + \frac{0{,}42586}{270}\right) \cdot \frac{30{,}00}{29{,}00} = 0{,}07488 + 0{,}00163 = 0{,}07651.$$

$$\varrho = 642''{,}2 \,.\, (0{,}07488 + 0{,}00163) = 48''{,}08 + 1''{,}05 = 49''{,}13.$$

Der von A abhängige 2te Theil von ϱ beträgt also nur $1''{,}05$, und ist selbst hier noch kleiner als der w. F. der mit tragbaren Höheninstrumenten gemessenen Zenithdistanzen. Der Einfluss dieser $1''{,}05$ auf die Höhe ist nur 0,33 Fuss = 3,98 Zoll.

Die Bestimmung des zu A gehörigen Coefficienten bietet daher mehr ein physicalisches als ein geodätisches Interesse dar. Nichts desto weniger ist eine genauere Bestimmung von λ, für mässige A, wie sie in einem Flachlande, das noch keine Steppe ist, vorkommen, wünschenswerth, weil die beiden von mir für kleine A benutzten λ, theils den geringen Erhebungen von 16 und 42 Fuss angehören, theils auf sehr kurzen Entfernungen beruhen. Die Oertlichkeit der Pulkowaer Sternwarte eignet sich für diese Bestimmung und bietet überdies die Gelegenheit dar, den Thermometercoefficienten durch Beobachtungen zwischen -24° und -24° R. von neuem zu prüfen. Beide Arbeiten werden in den Kreis unserer Beschäftigungen aufgenommen werden. Das geeignetste Object für diesen Zweck ist der oben erwähnte Festungsthurm in St. Petersburg, für den bei $B = 30{,}00$ Zoll, nach unserer Formel die Refraction bei $+24^{\circ}$ gleich $43''{,}6$ wäre, bei -24° aber $88''{,}4$, mehr als das Doppelte. Ist die Entfernung auch keine grosse, indem C nur $642''{,}2$ beträgt, so kann dennoch eine bedeutende Sicherheit durch Anwendung eines sehr genauen Instruments, wie unser tragbarer Repsoldscher Verticalkreis, erreicht werden, wenn durch Beobachtungen von der Mitte aus der Höhenunterschied mit voller Sicherheit bestimmt sein wird. Hiebei wird es indess erst erforscht werden müssen, ob eine 399 Fuss über dem Grunde erhabene Thurmspitze zwischen $+24^{\circ}$ bis -24° R., durch die Einwirkung der Temperatur auf das Gebäude, ihre absolute Höhe ändert oder nicht. Beobachtungen von einem mittleren Standpuncte aus zu verschiedenen Jahreszeiten gemacht werden darüber entscheiden.

Ein genäherter Werth von λ, für mässige A, lässt sich aus dem Material der *Gradmessung in den Ostseeprovinzen*, Band I. Seite 204, ableiten. Hier finden wir für die Polhöhe 58° und die

Zeit des hohen Sommers, genauer für den Julius-Monat, mehrere Werthe von λ verzeichnet, und namentlich

für 4,4 Uhr w. Z., $\lambda = 0{,}0619$,
« 5,94 « « « $\lambda = 0{,}0728$,
« 7,55 « « « $\lambda = 0{,}1000$.

Das 2te λ ergab sich aus den reciproken, aber nicht gleichzeitigen Zenithdistanzen, die *kurz vor dem Eintreten der Ruhe der Bilder* gemessen wurden, weil ich, so wie diese stattfand, die horizontale, für den Hauptzweck wichtigere Winkelmessung begann. Die Zeit der völligen Ruhe der Bilder ist sehr nahe auf 6 Uhr 20^m zu setzen. Interpolirt man nun aus den 3 Zahlen das für 6,33 Uhr geltende λ, so findet sich $\lambda = 0{,}0758$, eine Bestimmung, die sehr sicher ist. Der mittlere Barometerstand kann hier nahezu auf 29,5 Zoll gesetzt werden, und die mittlere Höhe der Gesichtslinie über dem Erdboden auf etwa 180 Fuss. Für dieses A finden wir in der obigen Zusammenstellung für $b = 29{,}00$ und $T = +16^0{,}0$ ein $\lambda = 0{,}0747$, also für $B = 29{,}5$ Zoll, $\lambda = 0{,}0760$, eine Zahl, die mit der aus den Beobachtungen der Gradmessung abgeleiteten $\lambda = 0{,}0758$ als identisch angesehen werden kann, und also eine völlige Bestätigung darbieten würde, wenn wir über die mittlere Temperatur bei jenen Beobachtungen sicher wären. Leider hatte ich damals, in den Jahren 1823 bis 1827, keine Ahndung von der Wichtigkeit der Temperatur für die Untersuchung der Strahlenbrechung, und so wurden bei den Zenithdistanzen der irdischen Objecte keine Thermometerablesungen gemacht. Gewiss ist indess, dass im Juli-Monat, bei heiteren Tagen, um 6 Uhr 20^m die mittlere Temperatur sehr nahezu $+16^0$ R. gewesen sein muss, und dass hier kaum eine Unsicherheit von einem Grade obwaltet.

3. Ich habe *a priori* in dem Ausdruck für μ angenommen, dass die normale irdische Strahlenbrechung der Barometerhöhe proportionirt sei. Es ist wünschenswerth, dass dieser Satz durch Bestimmungen von μ in grösseren Höhen bestätigt, oder vielleicht berichtigt werde.

4. Bei der Messung grosser Höhen, für welche eine rasche Erhebung der Gesichtslinie stattfindet, lässt sich der Werth von λ als unabhängig von der Eigenthümlichkeit der Erdoberfläche ansehen. Anders kann es aber sein, wenn die Erhebung der Gesichtslinie über dem Boden eine geringe ist; denn gewiss ist das Gesetz der Abnahme der Wärme mit der Höhe, im allgemeinen, ein anderes, wenn der Lichtstrahl über festes Land, als wenn er über eine Wasserfläche hingeht; ja wir können uns denken, dass selbst die Beschaffenheit des Landes einen Einfluss äussert, und dass ein Unterschied stattfindet über einer dürren Sandfläche, einer Steppe, und über einer grünen, von voller Vegetation gedeckten Gegend. Zugleich aber wird es wahrscheinlich, dass die Modificationen, die unter andern Umständen vorhanden sind und die eigentlichen Störungen der Strahlenbrechung hervorrufen, für die Zeit der ruhigen Bilder verschwinden, wenn hierin gerade die Bedingung der Ruhe der Bilder liegen sollte. Wenn der tägliche Gang der irdischen Refraction über Land ziemlich genau bekannt ist, so sind dagegen die Veränderungen derselben, wenn der Lichtstrahl in geringer Höhe über eine Wasserfläche hinstreicht, noch wenig erörtert, und ver-

dienen die Aufmerksamkeit der Gelehrten. Es ist kaum zu bezweifeln, dass das Minimum der täglichen Strahlenbrechung über See auf ganz andere Stunden falle, als über Land, wo bekanntlich dies Minimum um Mittag oder vielmehr etwas später gegen die Zeit der grössten Tageswärme eintritt.

5. Ueber den nächtlichen Gang der irdischen Strahlenbrechung ist, so viel ich weiss, wenig nachgeforscht worden. Eine Beobachtungsreihe, die ich vor etwa 20 Jahren in Dorpat anfing, die aber bald anderer Arbeiten wegen unterbrochen wurde, zeigte während mehrerer Nächte, in denen unausgesetzt von Sonnenuntergang bis Sonnenaufgang die Zenithdistanzen einer 10320 Toisen = 19 Werst entfernten, eigens für den Zweck aufgestellten Lampe gemessen wurden, auffallend geringe Veränderungen der Refraction bei Nacht an, und fast gleiche Werthe derselben bei wesentlich verschiedenen Zuständen der Atmosphäre. Bei diesen Beobachtungen war die mittlere Höhe der Gesichtslinie über dem Erdboden nahezu 90 engl. Fuss.

6. Wenn ich in der ausgeführten Untersuchung die theoretische Betrachtung der Strahlenbrechung fast ganz beseitigt, und vielmehr den Weg der Erfahrung eingeschlagen habe, so glaube ich, dass dies Verfahren in der Schwierigkeit für eine theoretische Untersuchung, die in der Anwendung von Erfolg sein sollte, die Grundlagen zu gewinnen, seine völlige Rechtfertigung findet. Erst wenn wir über mehrere Puncte aus der Erfahrung hinlängliche Data geschöpft haben werden, kann es an der Zeit sein, die Analyse auf dies verwickelte Phänomen anzuwenden. Vielleicht gelingt es alsdann, eine vollständige Theorie der normalen Refraction zu geben, d. h. derjenigen, bei welcher der Normalzustand der Atmosphäre durch die Ruhe der Bilder erkannt wird. Schwerlich wird aber die Wissenschaft je in der Kenntniss der gestörten Refractionen so weit fortschreiten, dass sich diese durch Rechnung bestimmen lassen, weil wir hier nicht mit allgemeinen, sondern mit örtlichen Verhältnissen zu thun haben, die sich fast gänzlich der Rechnung entziehen.

§ 72.

Als Hauptresultate meiner Untersuchung lassen sich folgende Sätze ansehen:

1. Es gibt einen Zustand der Atmosphäre, für welchen die irdische Strahlenbrechung mit grosser Sicherheit berechnet werden kann, und dieser Zustand tritt in der Regel zwei Mal am Tage ein, ein Mal in den Frühstunden, ein anderes Mal in den Nachmittagsstunden, und wird in einem hinlänglich vergrössernden Fernrohre durch die Ruhe des Bildes, d. h. durch die Abwesenheit des Schwirrens, mit Zuverlässigkeit erkannt. In der Regel ist der Zustand der Ruhe der Bilder von längerer Dauer, und vollkommener in den Nachmittagsstunden als in den vormittägigen, und seine Mitte fällt in den Sommermonaten, in unseren Breiten, auf etwa 0,7 des Zeitintervalls von Mittag bis Sonnenuntergang. In grösseren Abständen vom Solstitio ist der Bruch wohl etwas kleiner. Die genäherte Kenntniss der Zeit der ruhigen Bilder ist für die Anwendung bequem. Sie kann aber immer nur eine genäherte sein, weil jede atmosphärische Veränderung, vorzüglich die Bildung und das Verschwinden der Wolken, die Zeit der ruhigen Bilder ändert. Wie diese Veränderung

aber auch sein mag, so wie die Ruhe der Bilder da ist, findet die normale Refraction statt. Selten dauert die Ruhe der Bilder selbst am Nachmittage länger als eine Stunde, aber diese Zeit ist hinreichend für die Beobachtung. Es wird dem Beobachter aber nicht entgehen, dass, wenn er z. B. bei völliger Ruhe des Bildes um 6 Uhr und um 7 Uhr eine Zenithdistanz beobachtet, die letzte eine Vermehrung der Refraction zeigt. Diese ist aber keine Störung, sondern nur der normale Zuwachs, den die Refraction durch die Abnahme der Temperatur der Luft erhält. Zu jeder trigonometrischen Höhenmessung zur Zeit der normalen Refraction sind die Angaben des Barometers und des Thermometers unerlässlich.

2. Das wichtigste Element bei der Bestimmung der normalen Refraction ist die Temperatur der Luft. Wir sahen aus § 70, dass, bei einer Vermehrung der Temperatur um 1° R., die Refraction um 0,014819 ihres Betrages vermindert wird, während die Abnahme der Dichtigkeit der Luft nur 0,0045 beträgt, § 52. Es ist also der Thermometercoefficient der Refraction 3,29 Mal stärker, als der Thermometercoefficient der Dichtigkeit. Hieraus folgt unmittelbar, dass die Grösse der Refraction nicht sowohl von der Dichtigkeit der Luft am Orte der Beobachtung bedingt ist, als von dem Gesetze der mit der Höhe stattfindenden Veränderung derselben. Je rascher die Dichtigkeit der Luft mit der Höhe abnimmt, desto grösser ist die Refraction. Die Abnahme der Temperatur wirkt, indem sie eine Verdichtung der höheren Luftschichten erzeugt, der Abnahme der Dichtigkeit nach dem Mariotteschen Gesetze entgegen, und es folgt daraus, dass die Refraction desto kleiner ausfallen muss, je rascher die Temperatur mit der Höhe sich vermindert. Nothwendiger Weise ist aber die Verminderung der Temperatur mit der Höhe im Winter eine langsamere als im Sommer, denn in einer gewissen, vielleicht sehr bedeutenden Höhe müssen wir eine constante Temperatur setzen. Auch die Erfahrungen zeigen eine schnellere Abnahme der Wärme im Sommer als im Winter an. Siehe Kämtz *Lehrbuch der Meteorologie, Band I. Seite* 137. Wir haben also im Winter, in Folge der langsameren Abnahme der Temperatur, eine raschere Abnahme der Dichtigkeit der über einander liegenden Luftschichten als im Sommer, und hierin den Hauptgrund der grösseren irdischen Strahlenbrechung im Winter zu suchen.

3. Für die Anwendung, d. h. für die Höhenbestimmung vermittelst der Zenithdistanzen, bei gegebenen Abständen, stellt sich also folgende einfache Vorschrift heraus:

Für die trigonometrische Höhenbestimmung können keine andere Beobachtungen mit Sicherheit benutzt werden, als diejenigen, bei denen die Ruhe der Bilder stattfindet, und je vollkommener diese ist, desto sicherer fällt die Höhenbestimmung aus, wenn der Refractionscoefficient mit Hülfe der Formel § 70, aus den Angaben des Barometers und Thermometers und, wenn erforderlich, mit Zuziehung der mittleren Höhe der Gesichtslinie über dem Boden, berechnet wird.

Wir sind im Stande, die Sicherheit einer auf diesem Wege bestimmten Höhenbestimmung anzugeben, weil diese vorzugsweise von dem Betrage der übrigbleibenden, für uns zufälligen Unregelmässigkeiten der Strahlenbrechung abhängt. § 58, Seite xci, ist nachgewiesen, dass der wahrscheinliche Betrag der Unregelmässigkeit der Strahlenbrechung, bei den günstigeren nachmittägigen Beobachtungen im Sommer

0,01375 der Strahlenbrechung, oder $\frac{1}{73}$ derselben beträgt. Nun ändert sich aber die Strahlenbrechung für jeden Grad des Réaum. Thermometers um 0,0148 oder um $\frac{1}{68}$. Demnach zeigt sich die Unsicherheit der Formel, bei ihrer Anwendung im einzelnen Falle, geringer als die Einwirkung, die eine Temperatur-Veränderung von 1° ausübt. Es ist jetzt leicht, eine klare Ansicht von dem Belange der w. F. eines mit Hülfe unserer Formel gemachten Höhenbestimmung zu gewinnen, die nothwendiger Weise dem Quadrate des Abstandes, der Amplitudo, proportionirt sein werden. Es reicht hiebei aus, den Mittelwerth des Refractionscoefficienten 0,0724 und für die Grösse einer Bogensecunde auf der Erdoberfläche 101,2 engl. Fuss zu setzen.

Amplitudo	Entfernung in Wersten	Mittlere ird. Refraction	Wahrsch. Unsicherheit der Refraction.	w. F. der Höhe
0° 5′	8,6	22″	0″,3	0,04 engl. Fuss
10	17,3	43	0,6	0,18
15	26,0	65	0,9	0,39
20	34,7	87	1,2	0,70
25	43,4	108	1,5	1,1
30	52,0	130	1,8	1,6
40	69,4	174	2,4	2,8
50	86,7	217	3,0	4,7
1° 0	104,1	261	3,6	6,3
10	121,4	304	4,1	8,6
20	138,8	348	4,7	11,2
30	156,1	390	5,3	14,2
40	173,5	435	5,9	17,5
50	190,8	478	6,5	21,2
2° 0	208,2	521	7,1	25,2

§ 73.

Hülfsmittel zur Berechnung der normalen irdischen Strahlenbrechung $= \varrho$.

$\varrho = \mu C$, wenn C die Amplitudo des zwischen dem Beobachter und dem Objecte liegenden geodätischen Bogens ist.

$\mu =$ I. II. III.

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{I} &= 0{,}072383\ .\ 1{,}014819^{16-T} \\ \mathrm{Log\ I} &= 8{,}85964 + (16-T)\,0{,}0063886 \end{aligned}\right\}\text{ wenn die Lufttemp.} = T \text{ Grad Réaum.}$$

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{I} &= 0{,}072383\ .\ 1{,}011838^{20-T'} \\ \mathrm{Log\ I} &= 8{,}85964 + (20-T')\,.\,0{,}0051109 \end{aligned}\right\}\text{ « « « } = T' \text{ Grad Cent.}$$

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{I} &= 0{,}072383\ .\ 1{,}006559^{68-T''} \\ \mathrm{Log\ I} &= 8{,}85964 + (68-T'')\,0{,}0028394 \end{aligned}\right\}\text{ « « « } = T'' \text{ Grad Fahrenh.}$$

$\mathrm{Log\ II} = \mathrm{Log}\ B - 1{,}46240$, wenn die Barometerhöhe $= B$ engl. Zoll,

$= \mathrm{Log}\ B' - 2{,}51392$, « « « $= B'$ par. Linien,

$= \mathrm{Log}\ B'' - 2{,}86722$, « « « $= B''$ Millimètres.

$\mathrm{III} = 1 + \frac{5{,}8834}{A}$, wenn die mittl. Höhe der Gesichtslinie über dem Boden $= A$ engl. Fuss,

$= 1 + \frac{0{,}92007}{A'}$, « « « « « « « « « $= A'$ Toisen,

$= 1 + \frac{1{,}7932}{A''}$, « « « « « « « « « $= A''$ Mètres.

$\mathrm{Log}\ 5{,}8834 = 0{,}76963$; $\mathrm{Log}\ 0{,}92007 = 9{,}96382$; $\mathrm{Log}\ 1{,}7932 = 0{,}25364$.

Tafel des Gliedes I für Réaumursche Grade T.

Therm. R.	log I	I	Therm. R.	log I	I	Therm. R.	log I	I
—32°	9,1663	0,1466	—10°	9,0257	0,1061	+12°	8,8852	0,0768
—31	9,1599	0,1445	— 9	9,0194	0,1046	+13	8,8788	0,0756
—30	9,1535	0,1424	— 8	9,0130	0,1030	+14	8,8724	0,0745
—29	9,1471	0,1403	— 7	9,0066	0,1015	+15	8,8660	0,0734
—28	9,1407	0,1383	— 6	9,0002	0,1000	+16	8,8596	0,0724
—27	9,1343	0,1362	— 5	8,9938	0,0986	+17	8,8532	0,0713
—26	9,1280	0,1343	— 4	8,9874	0,0971	+18	8,8469	0,0703
—25	9,1216	0,1323	— 3	8,9810	0,0957	+19	8,8405	0,0693
—24	9,1152	0,1304	— 2	8,9746	0,0943	+20	8,8341	0,0682
—23	9,1088	0,1285	— 1	8,9682	0,0930	+21	8,8277	0,0672
—22	9,1024	0,1266	0	8,9619	0,0916	+22	8,8213	0,0663
—21	9,0960	0,1247	+ 1	8,9555	0,0902	+23	8,8149	0,0653
—20	9,0896	0,1229	+ 2	8,9491	0,0889	+24	8,8085	0,0644
—19	9,0832	0,1211	+ 3	8,9427	0,0876	+25	8,8021	0,0634
—18	9,0768	0,1194	+ 4	8,9363	0,0864	+26	8,7958	0,0625
—17	9,0705	0,1176	+ 5	8,9299	0,0851	+27	8,7894	0,0616
—16	9,0641	0,1159	+ 6	8,9235	0,0838	+28	8,7830	0,0607
—15	9,0577	0,1142	+ 7	8,9171	0,0826	+29	8,7766	0,0598
—14	9,0513	0,1125	+ 8	8,9108	0,0814	+30	8,7702	0,0589
—13	9,0449	0,1109	+ 9	8,9044	0,0802	+31	8,7638	0,0580
—12	9,0385	0,1093	+10	8,8980	0,0791	+32	8,7574	0,0572
—11	9,0321	0,1077	+11	8,8916	0,0779	+33	8,7510	0,0564
—10	9,0257	0,1061	+12	8,8852	0,0768	+34	8,7446	0,0555

Tafel des Gliedes I für Centesimal-Grade T′.

Therm. C.	log I	I	Therm. C.	log I	I	Therm. C.	log I	I
—40°	9,1663	0,1466	—13°	9,0283	0,1067	+14°	8,8903	0,0777
—39	9,1612	0,1449	—12	9,0232	0,1055	+15	8,8852	0,0768
—38	9,1561	0,1432	—11	9,0181	0,1042	+16	8,8801	0,0759
—37	9,1510	0,1416	—10	9,0130	0,1030	+17	8,8750	0,0750
—36	9,1458	0,1399	— 9	9,0078	0,1018	+18	8,8699	0,0741
—35	9,1407	0,1383	— 8	9,0027	0,1006	+19	8,8648	0,0732
—34	9,1356	0,1367	— 7	8,9976	0,0995	+20	8,8596	0,0724
—33	9,1305	0,1351	— 6	8,9925	0,0983	+21	8,8545	0,0715
—32	9,1254	0,1335	— 5	8,9874	0,0971	+22	8,8494	0,0707
—31	9,1203	0,1319	— 4	8,9823	0,0960	+23	8,8443	0,0699
—30	9,1152	0,1304	— 3	8,9772	0,0949	+24	8,8392	0,0690
—29	9,1101	0,1288	— 2	8,9721	0,0938	+25	8,8341	0,0682
—28	9,1050	0,1273	— 1	8,9670	0,0927	+26	8,8290	0,0674
—27	9,0998	0,1258	0	8,9618	0,0916	+27	8,8239	0,0667
—26	9,0947	0,1244	+ 1	8,9567	0,0905	+28	8,8188	0,0659
—25	9,0896	0,1229	+ 2	8,9516	0,0895	+29	8,8136	0,0651
—24	9,0845	0,1215	+ 3	8,9465	0,0884	+30	8,8085	0,0644
—23	9,0794	0,1201	+ 4	8,9414	0,0874	+31	8,8034	0,0636
—22	9,0743	0,1187	+ 5	8,9363	0,0864	+32	8,7983	0,0628
—21	9,0692	0,1173	+ 6	8,9312	0,0854	+33	8,7932	0,0621
—20	9,0641	0,1159	+ 7	8,9261	0,0844	+34	8,7881	0,0614
—19	9,0590	0,1145	+ 8	8,9210	0,0834	+35	8,7830	0,0607
—18	9,0538	0,1132	+ 9	8,9159	0,0824	+36	8,7779	0,0600
—17	9,0487	0,1119	+10	8,9108	0,0814	+37	8,7728	0,0593
—16	9,0436	0,1106	+11	8,9056	0,0805	+38	8,7676	0,0586
—15	9,0385	0,1093	+12	8,9005	0,0795	+39	8,7625	0,0579
—14	9,0334	0,1080	+13	8,8954	0,0786	+40	8,7574	0,0572
—13	9,0283	0,1067	+14	8,8903	0,0777	+41	8,7523	0,0565

Tafel des Gliedes I für Fahrenheitsche Grade T''.

Therm. F.	log I	I	Therm. F.	log I	I	Therm. F.	log I	I
—40°	9,1663	0,1466	— 6°	9,0698	0,1174	+28°	8,9732	0,0940
—39	9,1634	0,1457	— 5	9,0669	0,1162	+29	8,9704	0,0934
—38	9,1606	0,1448	— 4	9,0641	0,1159	+30	8,9675	0,0928
—37	9,1578	0,1438	— 3	9,0612	0,1151	+31	8,9647	0,0922
—36	9,1549	0,1429	— 2	9,0584	0,1144	+32	8,9618	0,0916
—35	9,1521	0,1419	— 1	9,0556	0,1136	+33	8,9590	0,0910
—34	9,1492	0,1410	0	9,0527	0,1129	+34	8,9562	0,0904
—33	9,1464	0,1401	+ 1	9,0499	0,1122	+35	8,9533	0,0898
—32	9,1436	0,1392	+ 2	9,0470	0,1114	+36	8,9505	0,0892
—31	9,1407	0,1383	+ 3	9,0442	0,1107	+37	8,9477	0,0886
—30	9,1379	0,1374	+ 4	9,0414	0,1100	+38	8,9448	0,0881
—29	9,1351	0,1365	+ 5	9,0385	0,1093	+39	8,9420	0,0875
—28	9,1322	0,1356	+ 6	9,0357	0,1086	+40	8,9391	0,0869
—27	9,1294	0,1347	+ 7	9,0328	0,1079	+41	8,9363	0,0864
—26	9,1265	0,1338	+ 8	9,0300	0,1072	+42	8,9335	0,0858
—25	9,1237	0,1330	+ 9	9,0272	0,1064	+43	8,9306	0,0852
—24	9,1209	0,1321	+10	9,0243	0,1058	+44	8,9278	0,0847
—23	9,1180	0,1312	+11	9,0215	0,1051	+45	8,9249	0,0841
—22	9,1152	0,1304	+12	9,0186	0,1044	+46	8,9221	0,0836
—21	9,1123	0,1295	+13	9,0158	0,1037	+47	8,9193	0,0830
—20	9,1095	0,1287	+14	9,0130	0,1030	+48	8,9164	0,0825
—19	9,1067	0,1278	+15	9,0101	0,1024	+49	8,9136	0,0820
—18	9,1038	0,1270	+16	9,0073	0,1017	+50	8,9108	0,0814
—17	9,1010	0,1262	+17	9,0044	0,1010	+51	8,9079	0,0809
—16	9,0982	0,1254	+18	9,0016	0,1004	+52	8,9051	0,0804
—15	9,0953	0,1245	+19	8,9988	0,0997	+53	8,9022	0,0798
—14	9,0925	0,1237	+20	8,9959	0,0991	+54	8,8994	0,0793
—13	9,0896	0,1229	+21	8,9931	0,0984	+55	8,8966	0,0788
—12	9,0868	0,1221	+22	8,9902	0,0978	+56	8,8937	0,0783
—11	9,0840	0,1213	+23	8,9874	0,0971	+57	8,8909	0,0778
—10	9,0811	0,1205	+24	8,9846	0,0965	+58	8,8880	0,0773
— 9	9,0783	0,1198	+25	8,9817	0,0959	+59	8,8852	0,0768
— 8	9,0754	0,1190	+26	8,9789	0,0953	+60	8,8824	0,0763
— 7	9,0726	0,1182	+27	8,9760	0,0946	+61	8,8795	0,0758
— 6	9,0698	0,1174	+28	8,9732	0,0940	+62	8,8767	0,0753

Therm. F.	log I	I	Therm. F.	log I	I	Therm. F.	log I	I
+62°	8,8767	0,0753	+76°	8,8369	0,0687	+ 90°	8,7972	0,0627
+63	8,8738	0,0748	+77	8,8341	0,0682	+ 91	8,7943	0,0623
+64	8,8710	0,0743	+78	8,8312	0,0678	+ 92	8,7915	0,0619
+65	8,8682	0,0738	+79	8,8284	0,0674	+ 93	8,7886	0,0615
+66	8,8653	0,0733	+80	8,8256	0,0669	+ 94	8,7858	0,0611
+67	8,8625	0,0729	+81	8,8227	0,0665	+ 95	8,7830	0,0607
+68	8,8596	0,0724	+82	8,8199	0,0660	+ 96	8,7801	0,0603
+69	8,8568	0,0719	+83	8,8170	0,0656	+ 97	8,7773	0,0599
+70	8,8540	0,0714	+84	8,8142	0,0652	+ 98	8,7745	0,0595
+71	8,8511	0,0710	+85	8,8114	0,0648	+ 99	8,7716	0,0591
+72	8,8483	0,0705	+86	8,8085	0,0644	+100	8,7688	0,0587
+73	8,8454	0,0701	+87	8,8057	0,0639	+101	8,7659	0,0583
+74	8,8426	0,0696	+88	8,8028	0,0635	+102	8,7631	0,0580
+75	8,8398	0,0691	+89	8,8000	0,0631	+103	8,7603	0,0576
+76	8,8369	0,0687	+90	8,7972	0,0627	+104	8,7574	0,0572