

so dass der Einfluss desselben auf den Unterschied der beiden Richtungen, oder den Winkel II , gleich $2r$ sein wird. Ausserdem ist aber der Winkel II noch dem w. F. e unterworfen, wie jeder mit dem grossen Universalinstrument gemessene Winkel. Bezeichnen wir daher den wahrscheinlichen Fehler des Winkels II mit π : so haben wir

$$\pi^2 = 4r^2 + e^2 = 16,70 - e^2; \quad \pi < 4''09.$$

Es ist für den bestimmten Werth π fast gleichgültig, ob wir $e = 1''32$ oder $1''53$ annehmen, ersteres gibt $\pi = 3''87$, letzteres $\pi = 3''80$. Ich bleibe bei $\pi = 3''87$, welcher Werth der Wahrheit sehr nahe kommen muss, da π gewiss kleiner als $4''00$ ist. Dieses würde $e^2 = 0,70$ und $e = 0''84$ voraussetzen. So genau ist ein in einem einzigen Satze, in beiden Lagen, mit dem Universalinstrument gemessener Winkel nicht.

Geht die Verbindung, wie einige Male vorkommt, durch einen Basispunct, so tritt der Winkel $P^n P^{n+1} A^{n+1}$ auf, den wir mit II^1 bezeichnen wollen. Dieser wird einem grösseren w. F. π^1 unterworfen sein, und es ist, wie leicht zu übersehen,

$$(\pi^1)^2 = 9r^2 + e^2 = 37,58 - 3,5e^2 = 31,49, \quad \text{für } e = 1''32;$$

folglich

$$\pi^1 = 5''61.$$

Für den dann weiterführenden stumpfen Winkel an der Basis ist aber der w. F. oben schon $(f) = 3''98$ ermittelt. Auf diesen folgt sodann wieder ein Winkel II^1 mit dem w. F. $5''61$, und hierauf treten die Winkel II wieder an die Reihe.

Die vorstehende Untersuchung reicht hin die Sicherheit einer durch eine Anzahl Zwischenwinkel übertragenen Richtung in jedem vorkommenden Falle zu beurtheilen, und zeigt dass die ausgeführte Arbeit auch in dieser Hinsicht eine vorzügliche Genauigkeit gewährt.

III. Ueber die auf der Operationslinie erhaltenen geodätischen Höhenbestimmungen und deren Genauigkeit.

§ 11.

Bei der Untersuchung der Genauigkeit eines Messungsergebnisses, das durch eine zahlreiche Folge von Theilwerthen erkannt wird, hat man, neben der Ermittlung der Sicherheit dieser Theilwerthe aus der Betrachtung der obwaltenden Fehlerursachen, eine wichtige Prüfung, so wie mehrfache, von einander unabhängige Bestimmungen dieser Theilwerthe und des aus ihrer Vereinigung hervorgehenden Endergebnisses vorhanden sind. Wir haben oben, Seite III, gesehen, dass unsere Operation, wenn consequent durchgeführt, zu 5 unabhängigen Reihen von Höhenbestimmungen führen musste. Indess erkennen wir, dass diese Reihen nur in Bezug auf die Messung der Zenithdistanzen als gänzlich unabhängig von einander angesehen werden können, und dass, bei den aus den Zenithdistanzen abgeleiteten Höhenunterschieden, für alle 5 Reihen dieselben horizontalen Entfernungen zum Grunde liegen. Wir haben daher zuvörderst zu untersuchen:

c

welche gemeinschaftliche Unsicherheit in die Höhenbestimmungen der einzelnen Punkte, und besonders für das Endresultat des Unterschiedes der beiden Meere = K aus den im frühern erkannten Fehlern der horizontalen Abstände hervorgehen kann.

Die Unsicherheit des Grundmaasses von $\frac{1}{35000}$ seiner Länge, nach Seite xiv, übt einen Einfluss auf die Höhenbestimmungen, der, obgleich constanter Natur, doch als gänzlich verschwindend für die absoluten Höhen über dem Meere angesehen werden darf. Ihr Einfluss beträgt nämlich für die grösste derselben = 22264 Zoll = 1855 Fuss, in P^{48} , nur 0,6 Zoll. Für den Unterschied der beiden Meere von 85 Fuss ist sie nur 0,03 Zoll.

Im nachstehenden werde ich untersuchen, welche Unsicherheit der Höhen aus den andern Fehlern der Entfernungen entstehen, unter Betrachtung derjenigen Höhen, die aus der Verbindung der an den Hauptpunkten und Basispunkten angestellten reciproken Beobachtungen hervorgehen. Da die Höhenunterschiede zwischen den benachbarten Basispunkten und den Hauptsignalen ohne Ausnahme grösser sind als zwischen den benachbarten Hauptsignalen, so musste bei jenen sich ein etwas grösserer Einfluss der Entfernungsfehler auf die Höhenbestimmungen äussern.

Wir haben gefunden, Seite xi und xiv,

den wahrsch Fehler einer Dreiecksseite $S = P^n A^n$ gleich 9,0 Zoll aus der Unsicherh. der Winkelmessung,
 5,0 " " " " der Grundlinie.

Aus beiden Ursachen folgt der w. F. $dS = 10,3$ Zoll. Der Einfluss dieses Fehlers auf den Höhenunterschied zweier benachbarter Stationen = h , ist aber, wenn die reciproken Zenithdistanzen z und z^1 sind und wir $\frac{1}{2}(z^1 - z) = \zeta$ den Höhenwinkel setzen:

$$dh = dS \sin \zeta; \text{ also bei } \zeta = 1^\circ \text{ wird } dh = 0,175 \text{ Zoll.}$$

In Folge des Mangels der Winkelmessung an den Hauptsignalen kommen aber 5 grössere Unsicherheiten in den Entfernungen vor. Ich stelle sie hier mit den zugehörigen ζ und den aus ihnen folgenden dh zusammen:

Seite S	w. F. = dS	$\zeta =$	$dh =$	} $\Sigma (dh)^2 = 3,622$
$B^{17} P^{18}$	44,9 Zoll	$0^\circ 1',3$	0,02 Zoll	
$B^{67} P^{67}$	30,8 "	0 38,2	0,27 "	
$B^{67} P^{68}$	68,6 "	1 33,0	1,82 "	
$P^{75} B^{75}$	40,0 "	0 12,5	0,15 "	
$P^{76} B^{76}$	88,4 "	0 18,0	0,46 "	

Hier ist ein einziges Mal dh grösser als 1 Zoll, in einem Falle wo $\zeta = 1^\circ 33'$. Solcher Fälle wo $\zeta > 1^\circ$ kommen noch 15 Mal vor, die ich einzeln so untersuche, dass ich für jeden das dS aus der wirklichen Winkelmessung ableite, und hiemit dh berechne.

Log. $S =$	Seite S	$\xi =$	Horizontal- winkel in P	w. F. aus der Winkel- messung, $a =$	w. F. aus der Basis- messung, $b =$	$dS = \sqrt{a^2 + b^2}$	$dh =$
5,0853	$B^{42} P^{45}$	$1^{\circ} 32'$	$4^{\circ} 57'$	9,1 Zoll	4,3 Zoll	10,1 Zoll	0,27 Zoll
4,9458	$P^{47} B^{47}$	1 29	9 47	3,3 "	3,2 "	4,6 "	0,12 "
5,1298	$B^{47} P^{48}$	1 19	6 37	7,5 "	4,8 "	8,9 "	0,20 "
5,0361	$P^{48} B^{48}$	1 23	7 7	5,6 "	3,9 "	6,9 "	0,17 "
5,3496	$P^{49} A^{49}$	1 12	4 0	20,7 "	8,0 "	22,2 "	0,46 "
4,8099	$A^{50} P^{51}$	2 1	9 15	2,6 "	2,3 "	3,5 "	0,12 "
5,1918	$B^{52} P^{53}$	1 43	5 40	10,2 "	5,6 "	11,6 "	0,35 "
4,5128	$A^{53} P^{54}$	2 36	5 33	2,0 "	1,1 "	2,3 "	0,10 "
5,2728	$P^{54} B^{54}$	1 27	4 29	15,5 "	6,7 "	16,9 "	0,43 "
5,3353	$A^{58} P^{59}$	1 53	3 53	20,6 "	7,7 "	22,0 "	0,72 "
5,2257	$P^{60} B^{60}$	1 13	4 56	12,6 "	6,0 "	14,0 "	0,30 "
5,0454	$P^{61} B^{61}$	3 20	6 31	6,3 "	4,0 "	7,5 "	0,44 "
5,3617	$P^{64} B^{64}$	1 0	3 38	23,4 "	8,2 "	24,8 "	0,43 "
5,0734	$P^{65} B^{65}$	1 11	6 6	7,2 "	4,2 "	8,3 "	0,17 "
5,0734	$B^{65} P^{66}$	1 6	6 2	7,3 "	4,2 "	8,4 "	0,16 "
							$\Sigma(dh)^2 = 1,741$ "

Für die übrigen 226 Höhenunterschiede ist

118 Mal ζ zwischen $0'$ und $10'$; $\Sigma(\zeta^2) =$	3363	} $\Sigma(dh)^2 = 77411 (\sin 1'. 10,3)^2$ $= 0,695$
57 " " " 10 " 20	12455	
24 " " " 20 " 30	14604	
16 " " " 30 " 40	19176	
5 " " " 40 " 50	9942	
6 " " " 50 " 60	17871	
Summe 77411,0.		

Verbinden wir die 3 Summen, so ergibt sich

$$\Sigma(dh)^2 = 3,622 + 1,741 + 0,695 = 6,058 \text{ und } dK = 2,46 \text{ Zoll,}$$

welches dK den aus der Unsicherheit der Entfernungen hervorgehenden wahrscheinlichen Fehler des Höhenunterschiedes K der beiden Meere anzeigt.

§ 12.

Wenn die irdische Strahlenbrechung nicht wäre, so würde die Sicherheit einer Höhenbestimmung nur noch einzig von der Genauigkeit der Messung der Zenithdistanzen abhängen. Wir wollen voraussetzen dass durch eine zweckmässige Anordnung und Verbindung der Beobachtungen der constante Fehler eines jeden Instruments, der von dem sogenannten Biegungscoefficienten abhängig ist, eliminirt werden kann. Dann bliebe uns nur der w. F. einer mit dem Instrumente gemessenen Z. D. zu ermitteln, um die Genauigkeit des mit ihm bestimmten Höhenunterschiedes h zweier benachbarter Punkte, so wie der beiden

- a. Weil die Biegungscoefficienten der verschiedenen Instrumente weder $= 0$, noch unter sich gleich angenommen werden dürfen, vielleicht sogar bei jedem Instrumente kleinen Veränderungen unterworfen sind. Es können indess die Biegungen durch die Anordnung und Verbindung der Beobachtungen sehr nahezu vollständig eliminirt werden.
- b. Weil in jeder der verschiedenen Reihen die einzelnen Höhenunterschiede nicht mit gleicher Sicherheit bestimmt sind, indem bald mehr bald weniger Sätze beobachtet worden. Es ist nämlich leicht einzusehen, wenn wir annehmen, statt

$$\begin{array}{l} x = a \text{ mit dem Gew. } 1, \text{ einen Werth } x = a' \text{ mit dem Gew. } 1+r, \\ y = b \text{ " " " } 1, \text{ " " " } y = b' \text{ " " " } 1-r: \end{array}$$

dass alsdann sich ergibt

$$x + y = a + b, \text{ Gew. } \frac{1}{2} \qquad x + y = a + b, \text{ Gew. } = \frac{1-r^2}{2};$$

und dass folglich die zweite Bestimmung immer ungenauer wird, als die erste. Hieraus folgt sogleich dass eine Grösse $K = (x + y + z + \dots)$ am vortheilhaftesten bestimmt ist durch eine Summe von einzelnen Beobachtungen, Gewichten, wenn auf jeden Theilwerth x, y, \dots eine gleiche Anzahl von Beobachtungen, ein gleiches Gewicht kommt. Ja man sieht dass ein Resultat k sehr ungenau werden kann, wenn eins oder einige wenige der Glieder bedeutend unsicher sind. Bei zusammengesetzten Operationen ist es daher von der grössten Wichtigkeit zu untersuchen, ob nicht irgendwo im Zusammenhang der Theile eine Schwäche vorhanden sei.

- c. Weil in der irdischen Strahlenbrechung ein feindselig gegen alle Höhenbestimmungen wirkendes Element vorhanden ist, dessen Störungen nicht vollständig, sondern nur zum Theil unschädlich gemacht werden können.

§ 13.

Wenn wir uns erinnern dass unsere 3 Beobachter gleichzeitig so vertheilt waren, dass beobachtet wurden :

von Fuss	am Standpunct	B^{n+1}	die Zenithdistanzen von	P^{n+1}	und	P^{n+2} ,
von Sabler	"	"	P^{n+1}	"	"	B^n, B^{n+1} und P^n, P^{n+2} ,
von Sawitsch	"	"	B^n	"	"	P^n und P^{n+1} ,

und dass die Beobachter am nächsten Tage sich in $B^{n+2}, P^{n+2}, B^{n+1}$ befanden, um dort ebenso zu arbeiten; so ergeben sich für jede kürzere Distanz $B^n P^{n+1}$ drei Höhenbestimmungen als vorhanden, 2 von Fuss und Sawitsch in B^n und eine von Sabler in P^{n+1} gemacht, wobei die Beobachtungen von Sawitsch und Sabler gleichzeitig reciproke sind, während die Beobachtung von Fuss einen Tag früher gemacht war. Ebenso finden sich für die Distanz $P^{n+1} B^{n+1}$ gleichzeitig reciproke Beobachtungen von Sabler und Fuss, während Sawitsch in B^{n+1} einen Tag später beobachtete. Für jede längere Entfernung $P^{n+1} P^{n+2}$ liefert Sabler 2 entgegengesetzte Beobachtungen, die aber um einen Tag von einander abliegen. Wir sehen hieraus dass eigentlich nur eine einzige Folge von gleichzeitigen reciproken Zenithdistanzen vorhanden ist, und zwar für die kürzeren Abstände S , durch die Beobachtungen von Fuss in B^{n+1} , von Sabler in P^{n+1} und Sawitsch in B^n , so dass sich eine reciproke Bestimmung für

den Höhenunterschied $B^{n+1} - P^{n+1}$ durch die Verbindung von Σ und F , die andere für den Höhenunterschied $B^n - P^{n+1}$ durch die Verbindung von Σ und S ergibt. Wollte man also nur diese Folge, als die einzige, die eine gleichzeitige Gegenseitigkeit darbietet, anwenden, so bliebe die Hälfte der an den Basispunkten angestellten Beobachtungen ungenutzt.

Die Zusammenstellung, Seite 222 bis 248, gibt die Berechnung dieser reciproken Höhen, bei der die jedesmalige Refraction direct eliminirt ist, unter der Voraussetzung, dass die Curve des Lichtstrahls an beiden Enden einen gleichen Winkel mit der geraden Linie zwischen beiden Objecten bildet. Diese Voraussetzung ist aber gewiss keine streng richtige. Der einzige Umstand dass Fälle vorkommen, wo eins der Objecte schwirrend erscheint von einem Endpunkte der Linie aus, während das andere am entgegengesetzten ein ruhiges Bild bietet, zeigt dass die Curve des Lichtstrahls nicht immer eine symmetrische ist. Hierzu kommt noch der Umstand dass, weil die Basispunkte in der Fläche lagen, die Hauptsignale auf den sogenannten Kurganen, die Gesichtslinie an den letztern etwa 20 Fuss höher über dem Erdboden lag, als in der Nähe der ersten, und folglich bei diesen grössere Abweichungen von einer mittleren Strahlenbrechung statt finden müssen. Man ersieht aber gleich dass dieser Umstand die Sicherheit der reciproken Höhenbestimmung nicht wesentlich stört, da er von P^{n+1} aus nach B^n und B^{n+1} im entgegengesetzten Sinne wirkt, und also für die Summe beider Höhenunterschiede oder für $B^{n+1} - B^n$ sich soweit aufheben muss, dass nur kleine zufällige Fehler aus dieser Quelle übrig bleiben.

Es gibt aber einen anderen Umstand, der die so erhaltenen Höhenunterschiede für die Ableitung eines Endresultats K zwischen beiden Meeren fast unbrauchbar macht, ich meine die Verschiedenheit der Biegungscoefficienten der 3 Instrumente. Wollen wir annehmen dass die Biegungscoefficienten für die 3 Instrumente von Sabler, Sawitsch und Fuss b, b', b'' sind, und dass beobachtet wurde

in B^n	von Sawitsch,	für P^{n+1} ,	die Zenithdistanz z ,	statt der richtigen $z + b'$,
« P^{n+1}	« Sabler,	« B^n ,	« « « z' ,	« « « $z' + b$,
« « « «	« « « «	« B^{n+1} ,	« « « ω' ,	« « « $\omega' + b$,
« B^{n+1}	« Fuss,	« P^{n+1} ,	« « « ω ,	« « « $\omega + b''$:

so ergibt sich, unter Annahme gleicher Abstände = S ,

für den Höhenunterschied $P^{n+1} - B^n$ der Werth $h = S \cdot \sin \frac{z' - z}{2} = S \cdot \sin \zeta$, statt $S \cdot \sin (\zeta + \frac{1}{2}(b - b'))$
 « « « « $B^{n+1} - P^{n+1}$ « « $i = S \cdot \sin \frac{w - w'}{2} = S \cdot \sin \eta$, statt $S \cdot \sin (\eta + \frac{1}{2}(b'' - b))$
 also für $B^{n+1} - B^n \dots \dots h + i = S \cdot \sin (\zeta + \eta)$, statt $S \cdot \sin (\zeta + \eta + \frac{1}{2}b'' - \frac{1}{2}b')$

Man sieht dass der Biegungscoefficient b des Sablerschen Instruments aus dem Resultate verschwindet, dass aber der durch die Rechnung erhaltene Höhenunterschied $h + i$ die Correction $S \sin \frac{1}{2}(b'' - b')$ erhalten muss. Wenn nun auch die Biegungscoefficienten der gebrauchten Instrumente klein waren, Seite 343, so müssen wir doch einen Werth von $b'' - b'$ nicht nur als möglich, sondern als gewiss vorhanden gestatten. Nehmen wir an dass sein Werth auch nur 1 Secunde betrug, so bedarf für ein mittleres Intervall der Höhenunterschied $h + i$ einer Verbesserung von 0,34 Zoll. Dieses ist nun zwar für den einzelnen Werth $h + i$ fast verschwindend gegen die übrigen zufälligen Fehler, und kann im einzelnen

Falle nur dann erheblich sein, wenn $b'' - b'$ mehrere Secunden beträgt. Da aber Fuss beständig (wenigstens von P^{14} an) der vorangehende Beobachter war, Sawitsch der nachfolgende: so wirkt der Unterschied der Biegungen auf alle einzelnen Höhenunterschiede in demselben Sinne, und es ist ersichtlich, dass wenn $b'' - b' = n$ Secunden, bei 123 Stationen, der aus den reciproken Höhenmessungen gefundene Werth von $P^{123} - P^{14}$ eine Correction von $0,34 \cdot 123 \cdot n = 41,82 \cdot n$ Zoll erhalten muss. Diesem zu Folge ist die Ansicht, dass das direct aus den reciproken gleichzeitigen Messungen für den Unterschied der beiden Meere erhaltene Resultat, das Seite 248 als $K = -923$ Zoll sich findet, verworfen werden muss, vollkommen gerechtfertigt, und wir erkennen deutlich dass nur der Weg zu einer scharfen Kenntniss von K führen kann, auf welchem die Biegungscoefficienten der Instrumente eliminirt werden. Ich stehe auch gar nicht an, durch eine Vergleichung der definitiven Werthe der Höhenunterschiede, die von der Biegung unabhängig sind, mit denjenigen, welche die reciproken Messungen, bei denen Fuss der vorangehende war, allein geben, den Werth der Biegungscoefficienten $b'' - b'$ abzuleiten. Wir können zu dieser Bestimmung nur den Höhenunterschied $P^{123} - P^{14}$ gebrauchen, da die regelmässige Anordnung, nach welcher Fuss voranging, erst mit P^{14} beginnt. Dieser Werth findet sich nach der auf der definitiven Rechnung beruhenden Tafel III, § 38, gleich $-3664,1$ Zoll. Die reciproken Messungen geben aber nur $-3533,9$ Zoll*), also 130,2 Zoll weniger. Da hierbei 107 reciproke Höhenbestimmungen benutzt sind (für 2 Stationen fehlen sie): so folgt die mittlere Wirkung der Biegungscoefficienten auf eine Station $= -130,2 : 107 = -1,22$ Zoll, woraus $b'' - b' = -1,22 : 0,34 = -3,58$ folgt. Es gibt demnach, dieser Untersuchung zu Folge, der von Sawitsch gebrauchte Theodolit jede aus einer directen Messung folgende positive Höhe eines beobachteten Objects über dem Instrumente im Mittel um 2,44 Zoll grösser, als das von Fuss angewandte Instrument, oder im einzelnen Falle um $D \cdot \sin 3,58$ grösser, wenn D den horizontalen Abstand bezeichnet. Wir werden später, in § 31, eine unabhängige Bestätigung dieser Grösse finden.

§ 14.

Ich komme zur Strahlenbrechung. Sabler hat diesen wichtigen Gegenstand, Seite 249 bis 271, einer für den vorliegenden Fall fast erschöpfenden Untersuchung unterworfen, deren Ergebniss, eine wahre Zierde unseres Werks, durch die Bündigkeit des Verfahrens über jedem Zweifel steht. Ich habe hier kurz die hauptsächlichsten Punkte hervorzuheben.

Bekanntlich tritt täglich vorzugsweise in den Nachmittagsstunden, etwa auf $\frac{3}{5}$ der Zwischenzeit zwischen Mittag und Sonnenuntergang ein Zeitraum ein, in welchem die irdischen Objecte durch's Fernrohr betrachtet *vollkommen ruhige* Bilder darbieten. Die Dauer desselben ist bald kürzer, bald länger, und hängt von mannigfachen Witterungsumständen und den Oertlichkeiten ab. Vor und nach der Zeit der Ruhe ist die Zeit der schwirrenden Bilder. Die Unruhe ist bei gewöhnlichem Verlaufe desto grösser, je weiter

*) Nach der von Sabler gegebenen Zusammenstellung der reciproken Messungen, findet sich Seite 227, für P^{14} die Höhe 2154,9 + 1072,1 = 3227,0 Zoll, und Seite 248 für P^{123} die Höhe $-736,9 + 401,9 = -335,0$ Zoll, woraus $P^{123} - P^{14} = -3562,0$ Zoll folgt. Die von mir gegebene Zahl ist eine andere geworden, weil ich für die einzelnen Höhenunterschiede alle Sätze nach ihren gehörigen Gewichten stimmen liess, was von Sabler nicht gleichförmig beobachtet war.

die Zeit von der Mitte der ruhigen Bilder abliegt. Aber die beiden Unruhen, vor und nach der Ruhe, sind wesentlich verschiedener Natur. Bei der vorangehenden Unruhe I, die wir die *negative Unruhe* nennen können, ist die Strahlenbrechung kleiner als für die Ruhe des Bildes, bei der nachfolgenden Unruhe II, der *positiven*, ist sie ohne Ausnahme grösser. Sabler nimmt 5 Abstufungen des Bildes, in Bezug auf die Ruhe, vor der vollkommenen Ruhe, und ebenso viel nach derselben an, also im Ganzen 10 Stufen, von I *sehr unruhig* durch *sehr ruhig* bis II *sehr unruhig*. Gewöhnlich durchläuft das Bild von Mittag bis Sonnenuntergang diese 11 Zustände in der angegebenen Reihenfolge. (Die vormittägigen Erscheinungen sind von ihm nicht erörtert, weil alle Zenithdistanzen in den im Ganzen weit günstigeren Nachmittagsstunden beobachtet sind.)

Die Ursache dieses Verlaufs ist in dem Einfluss des mehr oder minder erwärmten Erdbodens zu suchen, welcher die regelmässige Schichtung der Luft stört. So lange der Erdboden wärmer ist als die ihn berührende Luft, tritt eine Verdünnung der unteren Luftschichten ein, welche eine Verminderung der Refractionen, und durch das Aufsteigen der erwärmten Luftschichten das Schwirren der Bilder zur Folge hat. Ist die Temperatur des Bodens der der Luft gleich, so findet die regelmässige Schichtung der Luft statt, die Ruhe der Bilder beginnt, und wir haben die diesem Zustande entsprechende normale Refraction. Oft ist diese wichtige Periode des normalen Zustandes nur von kurzer Dauer, denn bald verliert der Boden an Wärme, durch Strahlung und Verdunstung, wird kälter als die ihn berührenden Luftschichten und erzeugt nunmehr bis Sonnenuntergang wachsende Refractionen, die mit einer in der Regel zunehmenden Unruhe der Bilder verbunden sind. Der so eben beschriebene Verlauf tritt ein gleichermassen, der Himmel mag wolkenrein oder bedeckt sein; nur dass in letzterem Falle der Verlauf ein langsamerer, die Dauer der einzelnen Zustände eine längere ist. Die Abweichungen von der Reihenfolge sind selten, und ereignen sich vorzugsweise nur bei plötzlichen atmosphärischen Veränderungen. Wenn z. B. bei bedecktem Himmel die Ruhe der Bilder schon begonnen, dann sich plötzlich der Himmel aufklärt und die Sonne heftig wirkt: so kehrt mitunter die erste Unruhe auf eine kurze Zeit zurück, geht aber meistens bald in eine neue Ruhe über, die dann gewöhnlich um so rascher in die 2te Unruhe verläuft. Unmittelbar nach einem Regenschauer, das eine plötzliche Nässe und Erkältung des Bodens hervorbringt, kann schon vor der Ruhe der Bilder eine Unruhe II, mit stärkerer Refraction entstehen. So wie diese Wirkung aber aufhört, stellt sich die Ruhe der Bilder ein, auf welche in der Regel bald ein Uebergang in die Unruhe II folgt.

Unsere Beobachter haben daher bei jedem Beobachtungssatze den Zustand der Bilder für jedes der beobachteten Objecte aufs sorgfältigste bezeichnet, in der Aussicht in dieser Characteristik der Bilder einen wichtigen Fingerzeig für die anzuwendende Strahlenbrechung zu erhalten, falls es gelingen würde den Zusammenhang zwischen dem Zustande der Bilder und der Strahlenbrechung auszumitteln. Diese Maassregel hat einen ausgezeichneten Erfolg gehabt.

Wir müssen uns hier erinnern, dass die Refractionen sowohl für die kürzeren Entfernungen S zwischen den Basispunkten und den Hauptpunkten, als für die grösseren E zu untersuchen waren, und dass hierbei nicht nur die Entfernungen, die im Mittel sich fast genau wie 1:2 verhalten (3,34 und 6,68 Werst,

oder 115,5 und 230,7 Secunden des grössten Kreises der Erde), sondern auch besonders der Umstand in Betracht kam, dass die Gesichtslinien S immer näher am Erdboden lagen, als die Gesichtslinien E . In der eigentlichen flachen Steppe, von P^1 bis P^{40} und P^{71} bis P^{124} , befanden sich nemlich, wie schon erwähnt, die Hauptsignale auf den Kurganen, während die Basispunkte in der Ebene lagen. Auf gleiche Weise waren auf dem etwas ungleicheren Theile des Terrains, zwischen den Signalen P^{40} und P^{71} , die Hauptsignale auf den Anhöhen, die sich vorfanden, die Basen in den zwischenliegenden ebenen Thälern. Es war daher zu erwarten, dass im Allgemeinen verhältnissmässig grössere Veränderungen der Refractionscoefficienten für die Entfernungen S als für die grösseren E sich herausstellen würden.

§ 15.

Sabler begann seine Untersuchung mit der Ermittlung des Coefficienten der Strahlenbrechung für die vollkommene Ruhe des Bildes, durch Untersuchung derjenigen Beobachtungssätze, deren Characteristik *sehr ruhig* ist. Er fand

aus 83 Beobachtungen der Basispunkte $\varrho = 0,0876 C \mp 0,0019 C$;

« 61 « der Signalpunkte $\varrho = 0,0884 C \mp 0,0013 C$.

Es zeigt sich also hier bei vollkommener Ruhe der Bilder ein völlig gleicher Refractionscoefficient 0,088, für die Objecte in einfacher und doppelter Entfernung, und deutet somit eine normale Schichtung der Luft bis zur Berührung mit dem Boden an. Dies Ergebniss erhält eine noch grössere Bedeutung, wenn sich nachweisen lässt, dass für denselben Zustand des Bildes auch, bei einer höheren Lage des Lichtstrahls über dem Boden, derselbe Coefficient stattfindet. Ich habe, in meiner *Gradmessung in den Ostseeprovinzen*, Bd. I, S. 203, für den mittleren Werth der Refraction $\varrho = 0,0619 C$ gegeben. Dieser Coefficient bezieht sich aber auf eine Zeit, die am Nachmittage dem Anfange der Ruhe der Bilder etwa 1 Stunde vorausgeht. Es muss also der Coefficient für den Normalzustand der Bilder grösser sein. Die vollkommene Ruhe der Bilder tritt unter 58° Polhöhe, in den beiden dem Sommersolstitio nächsten Monaten, nahezu um $6^h 20^m$ ein. Für diese Zeit lässt sich, aus *Gradmessung* Seite 204, $\varrho = 0,080$, für die Temperatur $+7^\circ,4$ R. und die Barometerhöhe 332,7 Par. Lin., mit grosser Annäherung ableiten. Endlich finden wir in unserm Werke S. 378 aus den Beobachtungen der hohen Bergspitzen des Caucasus, bei denen die tägliche Veränderlichkeit der Strahlenbrechung, wegen der raschen Entfernung der Gesichtslinie vom Boden, schon sehr gering ist, für den Sommer den Werth $\varrho = 0,0774 C$ angegeben. Die Vergleichung dieser 4 Bestimmungen unter sich zeigt, dass für die Zeit der völligen Ruhe der Bilder, in den Sommermonaten, ein gleicher mittlerer Coefficient der Strahlenbrechung unter allen Verhältnissen der Erhebung der Gesichtslinie stattfindet, der also auf den jedesmaligen mit Berücksichtigung des Barometers und Thermometers am Beobachtungsorte zu reduciren ist, wie bei der astronomischen Strahlenbrechung. Der Werth dieses Coefficienten lässt sich etwa zu 0,084 annehmen. Es wäre wichtig ihn durch geeignete Beobachtungsreihen an Standpunkten in verschiedenen Höhen über dem Meere und an Gegenständen, die unter möglichst verschiedenen Höhenwinkeln erscheinen, von neuem, mit sorgfältiger Beachtung der Ruhe der Bilder, zu ermitteln, und die Grenzen seiner Sicherheit festzusetzen, weil er dann zu einer höhern Genauigkeit der trigonometrischen Höhenbestimmung aus einseitigen Beobachtungen führen müsste.

Auf ganz ähnliche Weise, wie für die völlige Ruhe der Bilder, hat Sabler die Constante für die übrigen 10 von ihm angenommenen Zustände abgeleitet, die sich auf gedoppelte Weise zusammenstellen lassen :

Zustand des Bildes.	Mittlerer Werth der Strahlenbrechung	
	für die Signalbeob., B, mittl. Entfernung C = 115",5.	für die Signalbeob., P, mittl. Entfernung C = 230",7.
	$\varrho =$ R	$\varrho =$ R'
I sehr unruhig	-0,326 C = (ϱ) - 43",4	-0,065 C = (ϱ) - 36",1
I unruhig	-0,133 C = (ϱ) - 23,3	-0,020 C = (ϱ) - 2",4
I etwas unruhig	-0,036 C = (ϱ) - 1",4	+0,027 C = (ϱ) - 1",4
I fast ruhig	+0,009 C = (ϱ) - 9,5	+0,050 C = (ϱ) - 9,2
I ruhig	+0,054 C = (ϱ) - 4,0	+0,071 C = (ϱ) - 4,0
sehr ruhig	+0,088 C = (ϱ)	+0,088 C = (ϱ)
II ruhig	+0,117 C = (ϱ) + 3,6	+0,104 C = (ϱ) + 3,4
II fast ruhig	+0,150 C = (ϱ) + 7,5	+0,120 C = (ϱ) + 7,4
II etwas unruhig	+0,187 C = (ϱ) + 12,9	+0,156 C = (ϱ) + 15,9
II unruhig	+0,272 C = (ϱ) + 20,6	+0,196 C = (ϱ) + 22,2
II sehr unruhig	+0,488 C = (ϱ) + 38,3	

Die 2ten Werthe sind die von Sabler, Seite 269, zusammengestellten, die ersten habe ich aus Seite 255 bis 268 zusammengetragen. Die Betrachtung dieser Tafel führt zu folgenden Schlüssen :

- 1) Der regelmässige Gang der gefundenen ϱ , in beiden Reihen, beweist die völlige Gültigkeit und Bedeutsamkeit der von Sabler angenommenen Bezeichnung des Zustandes der Bilder.
- 2) Wenn man zwischen je zwei gleich weit von der völligen Ruhe der Bilder abstehenden Refractionen die Mittel nimmt, so erhält man nach einander, von der Mitte aus, folgende Werthe :

$$\begin{array}{l}
 \text{bei den B} \left| \begin{array}{c} \frac{1}{2} (\varrho^1 + \varrho^{-1}) \\ (\varrho) - 0",2 \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} \frac{1}{2} (\varrho^2 + \varrho^{-2}) \\ (\varrho) - 1",0 \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} \frac{1}{2} (\varrho^3 + \varrho^{-3}) \\ (\varrho) - 0",6 \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} \frac{1}{2} (\varrho^4 + \varrho^{-4}) \\ (\varrho) - 1",4 \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} \frac{1}{2} (\varrho^5 + \varrho^{-5}) \\ (\varrho) - 2",5 \end{array} \right| \\
 \text{" " P} \left| \begin{array}{c} (\varrho) - 0,6 \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} (\varrho) - 0,9 \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} (\varrho) + 0,9 \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} (\varrho) - 1,1 \end{array} \right|
 \end{array}$$

Hieraus erkennt man die wahre Bedeutung der entgegengesetzten Bezeichnungen wie I *unruhig* und II *unruhig*; es sind, bei gleichem Grade der Unruhe, Zustände der Bilder, bei denen die Strahlenbrechung fast genau gleich weit nach beiden Seiten von ihrem normalen Werthe (ϱ), der bei der Ruhe der Bilder eintritt, abweicht.

- 3) Da für alle Zustände $R = R'$ *) sich findet, so weit die w. F. es zulassen, so stellen sich hier die Abweichungen der jedesmaligen Refraction von der normalen Refraction, als im Winkelbetrage unabhängig von der Entfernung der Objecte dar. Diese Unabhängigkeit erscheint im Widerspruche mit dem angenommenen Gesetze, dass zu gleichen Zeiten die Refractionen verschieden entfernter Objecte, sich wie die Abstände derselben verhalten. Es ist aber zu bedenken, dass allgemein betrachtet, für

*) Im Texte Seite 254 u. f. ist diese Grösse K und K' bezeichnet.

Gegenstände in verschiedenen Entfernungen, nicht gleiche Zustände der Bilder gleichzeitig sind, indem in der Regel das Schwirren der entfernteren Gegenstände das stärkere ist. Sabler gibt zwar gewöhnlich in seinem Tagebuche der Beobachtung einen gleichen Zustand der Bilder für beiderlei Objecte, in einfacher und doppelter Entfernung an, mit einigen Ausnahmen, wo das entferntere Object als das unruhigere gesehen wurde. Aber diese Gleichheit der Bilder ist hier wohl vorzugsweise dem Umstande zuzuschreiben, dass für das nähere Object, wie oben schon gesagt, die Gesichtslinie in der Regel die dem Boden nähere war. Es darf also der von Sabler aufgestellte Satz $\varrho = 0,088 C + R$ auf keine Weise als ein für gleichzeitige beliebige Entfernungen unter allen Umständen gültiger angesehen werden, sondern vielmehr als der merkwürdig genaue Ausdruck der Refractionen, unter den bei der ausgeführten Operation obwaltenden allgemeinen örtlichen Verhältnissen.

§ 16.

Sabler gibt nun noch, S. 271, aus den übrigbleibenden Abweichungen der einzelnen beobachteten Strahlenbrechungen von der Formel, den w. F. einer einzelnen Brechung, d. h. den w. F. einer einzelnen beobachteten Zenithdistanz, für die verschiedenen Zustände der Bilder. Für die *sehr ruhigen* Bilder ist er 2",06 bei den Basisbeobachtungen, und 2",40 bei den Signalbeobachtungen, und wird desto grösser, je weiter der Zustand der Bilder sich von der völligen Ruhe nach beiden Seiten entfernt. Wenn man berücksichtigt, dass der w. F. der Messung 1",1 beträgt, Seite 317, so folgt dass die Unsicherheit der Refraction allein, oder deren Abweichung von der Formel, für die ruhigen Bilder noch kleiner wird, und nur $\sqrt{(2,06^2 - 1,1^2)} = 1",74$ und $\sqrt{(2,40^2 - 1,1^2)} = 2",13$ beträgt. Aber diese Werthe sind entschieden noch etwas zu gross, weil die bei ihrer Ableitung zum Grunde gelegten Höhenunterschiede nicht ganz genau waren. Diese Fehlerquelle hat aber auf das Mittel aus einer Anzahl von Beobachtungen keine Wirkung, und wir können in den Formeln $\varrho = 0,088 C - R$, R als mit so grosser Sicherheit bestimmt ansehen, als sein w. F. es angibt. Den Winkeln 1",74 und 2",13 entsprechen, bei den mittleren Entfernungen, lineare Werthe von 1,2 Zoll und 2,89 Zoll, welche Grössen die in den Höhenunterschieden zwischen einem Hauptpunct und dem benachbarten Basispunct B , oder Hauptpunct P , durch die zufälligen Störungen der Refraction hervorgerufenen Unsicherheiten ausdrücken, wenn dieselben aus einem einzigen Satze, bei völlig ruhigen Bildern von Sabler beobachtet, abgeleitet werden.

Aus den w. F. einer Zenithdistanz, wie sie Seite 271 für die verschiedenen Zustände der Bilder gegeben, finden sich nun ebenfalls die Gewichte der bei diesen verschiedenen Zuständen beobachteten Sätze, und hiermit der Weg sie regelrecht zu einem Mittel zu vereinigen. Siehe Seite 271. Seite 272 bis 317 sind nun alle von Sabler gefundenen partiellen Höhenunterschiede eines jeden P^{n+1} von P^n , P^{n+2} , B^n , B^{n+1} gegeben, berechnet unter Anwendung der jedesmal dem Zustande der Bilder entsprechenden Strahlenbrechung, so wie die aus den verschiedenen Sätzen nach den relativen Gewichten gefolgerten Mittel. Diese Angaben bilden die Grundlage der aus den von Sabler an den Hauptpuncten P angestellten Beobachtungen für sich abzuleitenden Höhenbestimmungen der ganzen Operationslinie.

Seite 320 bis 348 gibt uns Sawitsch seine Bearbeitung der von ihm an den Basispuncten beobachteten Zenithdistanzen. Auch er sieht, nach Sabler's Vorgange, den Zustand der Bilder als das Kennzeichen der

jedesmaligen Refraction an, nimmt aber nur 7 verschiedene Zustände an, Seite 320. Die von ihm gefundenen Refractionscoefficienten beruhen auf seinen und Sabler's reciproken Beobachtungen, beziehen sich also alle auf die Abstände S zwischen den Haupt- und Basispunkten. Er weicht aber wesentlich in seiner Ansicht über die Refraction von Sabler ab, indem er die jedesmaligen Refractionen den Abständen proportionirt setzt. Vergleicht man die von ihm gefundenen Coefficienten mit den nach Sabler oben Seite xxvi gegebenen: so ergibt sich, wenn wir die verschiedenen Zustände bei Sabler durch Σ^1 bis Σ^{11} , bei Sawitsch durch S^1 bis S^7 bezeichnen, dass, da der Σ^1 entsprechende Zustand bei Sawitsch nicht vorkommt, von dann an sehr nahezu:

$$S^1 = \Sigma^2, S^2 = \Sigma^3, S^3 = \Sigma^4; S^4 = \frac{\Sigma^5 + \Sigma^6 + \Sigma^7}{3}$$

$$S^5 = \Sigma^8, S^6 = \frac{\Sigma^9 + \Sigma^{10}}{2}, \text{ und } S^7 = \Sigma^{11}.$$

Bei der Berechnung benutzt er diejenige Refraction, die seine Untersuchung ihm für die verschiedenen Zustände der Bilder gegeben, vereinigt aber die aus den verschiedenen Sätzen folgenden Werthe der partiellen Höhenunterschiede in der Art, dass er nur diejenigen berücksichtigt, bei denen die Bilder entweder ganz ruhig oder wenig unruhig waren; also die Beobachtungen bei Unruhe oder heftiger Unruhe als zu unsicher ganz beseitigt. Für jene 2 gebrauchten Zustände bestimmte er das Verhältniss der Gewichte 10 : 4, Seite 321.

Endlich haben wir, S. 349 bis 370, die Zusammenstellung aller von Fuss aus seinen Beobachtungen an den Basispunkten gefolgerten partiellen Höhenunterschiede, bei deren Berechnung die von Sawitsch gefundenen Refractionscoefficienten, für den verschiedenen Zustand der Bilder, angewandt wurden. Indess hat Fuss für mittlere Zustände, zwischen denen die Sawitsch zum Grunde legt, auch die Mittel der beiden benachbarten Coefficienten genommen. Um die aus verschiedenen Sätzen erhaltenen Höhenunterschiede zu vereinigen, hat er relative Gewichte gebraucht, die aber im Texte nicht angegeben sind.

§ 17.

Die Beobachtungen auf den Basispunkten, von Sawitsch und Fuss, mussten auf eine ganz einfache Weise durch Summirung der partiellen Höhenunterschiede zu den zwei Reihen (S) und (F) führen, welche, da die absolute Höhe des ersten Signals P^1 über dem mittleren Stande des Asowschen Meeres unmittelbar = 146,0 Zoll gemessen war, die absoluten Höhen aller beobachteten Signalmarken über diesem Meere enthalten, und mit der negativen Höhe des Caspischen Meeres K schliessen. Ebenso führten Sabler's Beobachtungen nach seiner Ansicht zu 2 Reihen von Bestimmungen, die zuletzt ebenfalls die relative Höhe der beiden Meere geben. Eine dieser Reihen (Σ^1) geht durch die Basispunkte, die andere (P) durch die Hauptsignale. Jeder Beobachter hat ferner den w. F. seines Endresultats K nach gewissen Grundlagen abgeleitet. Endlich hat Sabler, aus der Verbindung der Bestimmungen der einzelnen Beobachter und deren w. F., einen Schlusswerth gezogen, nach dem das mittlere Niveau des Caspischen Meeres um 83,67 engl. Fuss tiefer liegt als das Asowsche, eine Bestimmung, deren wahrscheinlicher Fehler = 1,23 Fuss angegeben ist. Siehe S. 371.

§ 18.

Gewiss ist dieser von Sabler angegebene Höhenunterschied der beiden Meere ein nahezu richtiger, aber er ist nicht derjenige, der aus der Gesammtheit der Beobachtungen folgt, wenn dieselben auf's strengste abgewogen, verglichen und zu Endwerthen vereinigt werden. Ich hielt es für nothwendig mich der Ausführung dieser Arbeit zu unterziehen, wenn ich gleich einsah dass dies nicht ohne ein in's einzelne gehendes Studium des ganzen Beobachtungsmaterials, und ohne einen bedeutenden Aufwand von Rechnung geschehen konnte.

Ich werde zunächst die Arbeiten der 3 Beobachter als gesonderte ansehen, und daher auch die 3 auf Sabler's Messungen beruhenden Reihen Σ' , Σ'' , Σ''' als ohne Verbindung unter einander betrachten, so dass das Seite 371 gegebene Resultat aus der Reihe (*P*) wieder in seine beiden Bestandtheile Σ'' und Σ''' , von den geraden und ungeraden Signalpuncten aus beobachtet, zerlegt wird. Auf diese Weise komme ich zu 5 unabhängigen, neben einander laufenden Reihen, für die Höhen der Zwischenpuncte so wie des Caspischen Meeres, auf die Fläche des Asowschen bezogen, wie dies Seite III gefordert wurde. Die Uebereinstimmung dieser 5 Reihen, innerhalb gewisser Gränzen, gewährt die vollkommenste Ueberzeugung von der allgemeinen Richtigkeit der ganzen Operation, und erhöht das subjective Zutrauen zu deren Endresultate, welches Zutrauen wohl nicht in dem Maasse gewonnen wird, wenn für jeden partiellen Höhenunterschied die von den verschiedenen Beobachtern gewonnenen Zahlenwerthe sofort unter einander verbunden werden, und dadurch das gegenseitige Verhalten der einzelnen Reihen in ihrem ganzen Verlaufe aus den Augen verloren geht.

Die Richtigkeit der Rechnungen, wodurch aus den beobachteten Zenithdistanzen, mit Zuziehung der horizontalen Abstände, Seite 195 bis 221, die einzelnen Höhenunterschiede abgeleitet waren, unterlag keinem Zweifel, da jeder der 3 Bearbeiter seine Rechnung doppelt unabhängig geführt hatte. Ich konnte daher mit voller Zuversicht die in den 3 Zusammenstellungen, von Sabler Seite 272 bis 317, von Sawitsch Seite 322 bis 342, von Fuss Seite 350 bis 370, gegebenen Zahlenwerthe meinen Untersuchungen im allgemeinen zum Grunde legen. Indess hielt ich es für nothwendig die daselbst angewandten Refractionen mit Aufmerksamkeit durchzusehen, zumal in den Fällen, wo, durch eine verschiedene Characteristik des Zustandes der Bilder der beiden von der Mitte aus entgegengesetzten Objecte, die Annahme einer verschiedenen Refraction für beide veranlasst worden war.

§ 19.

In den 3 Tagebüchern der Zenithdistanzen, die das 2te Capitel Seite 48 bis 178 enthält, ist von den Beobachtern der Zustand der Bilder bei jedem Satze eines Objecte gegeben, aber ohne weitere Angabe, ob die Characteristik sich auf die Unruhe vor oder nach der völligen Ruhe bezog. Diese Angabe konnte sich auch nur aus dem Verlaufe der Bilder in den auf einander folgenden Sätzen ableiten lassen. In der Regel bleibt auch nicht der geringste Zweifel über die Richtigkeit der von Sabler für die Auswahl der jedesmaligen Refraction bei den Berechnungen Seite 272 bis 317 gewählten I oder II.

Nur in 3 Fällen finde ich dass die beigeetzte II den Angaben des Tagebuchs nicht entspricht. Es sind die folgenden.

Seite 282, in p^{29} . 1837, 6. Mai. Tagebuch S. 58.

In der Berechnung ist im ersten und zweiten Satz den Objecten β^{28} und P^{28} die Characteristik II *ruhig* gegeben, es muss aber I *ruhig* sein, wie für die beiden andern Objecte und im dritten Satz. Hierdurch ist folgendes zu ändern. Statt der beiden Refractionen $-15,9$ und $-29,5$ sind $-8,3$ und $-22,1$ zu setzen. Für die verbesserten Höhen in Zollen $-98,0$, $+529,2$, $-93,6$ und $+543,1$ sind $-91,4$, $+542,1$, $-87,0$ und $+556,0$ zu setzen. Endlich auf der rechten Seite sind als Mittelwerthe bei β^{28} statt $-93,4$ jetzt $-88,9$, und bei P^{28} statt $+536,1$ jetzt $+549,0$ zu setzen.

Seite 286, in p^{40} . 1837, 21. Mai. Tagebuch S. 62.

Beim Object P^{39} im 2ten Satz ist II *ruhig* in I *ruhig*, und dem zufolge $-20,6$ und $+52,3$ in $-13,2$ und $+60,8$, endlich auf der rechten Seite $+52,4$ in $+56,6$ zu ändern.

Seite 289, in p^{48} . 1837, 6. Juni. Tagebuch S. 66.

Beim Object P^{47} im 2ten Satz ist II *ruhig* problematisch, indem der Zustand auch I *ruhig* gewesen sein kann. Im ersten Fall wäre die Refraction $-18,7$, im zweiten $-11,3$ gewesen. Um die geringste Gefahr zu laufen ist das Mittel $-15,0$ genommen, wodurch der Höhenunterschied statt $-821,1$ jetzt $-817,6$ zu setzen ist, und auf der rechten Seite als Mittelwerth statt $-821,5$ jetzt $-818,6$ kommt.

Ich habe diese Verbesserungen, nachdem sie gemacht waren, H. Sabler mitgetheilt, der sie alle 3 nach Untersuchung des Originaltagebuches als richtig anerkannt hat.

§ 20.

In der Zusammenstellung von Sawitsch habe ich folgende Verbesserungen als unerlässlich erkannt.

1. Seite 327. P^{55} und P^{54} . 13. Mai. Tagebuch S. 107.

Die Characteristik des 2ten Satzes für P^{54} *unruhig* muss nach dem Tagebuche *etwas unruhig* sein. Die von Sawitsch für dies Object angewandten Refractionscoefficienten $-0,13$, $-0,03$, $+0,01$, $+0,20$ sind in $-0,13$, $+0,01$, $+0,15$ und $+0,20$ zu ändern. Die diesen entsprechenden einzelnen Höhen sind 278,8, 277,4, 275,7, 295,2.

2. Seite 329. P^{45} und P^{46} . Juni 1. Tagebuch S. 111.

Im dritten Satz ist für P^{45} der Refractionscoefficient $+0,46$, für P^{46} aber $+0,20$ angewandt. Diese Annahme ist wegen der ungleichen Entfernung doppelt bedenklich, und es ist nothwendig den 3ten Satz ganz auszuschliessen, um das Resultat aus den beiden andern nicht zu gefährden, selbst wenn der 3te mit kleinem Gewichte hinzukäme.

3. Seite 331. P^{58} und P^{59} . Juni 27. Tagebuch S. 115.

Die 3 Beobachter geben für den heutigen Tag in den Tagebüchern in unabhängiger Uebereinstimmung an, dass die Sätze um $3^h 48^m$ und $4^h 38^m$ nach und bei Gewitterregen beobachtet wurden. Erst beim letzten Satz um $5^h 28^m$ war, nachdem der Regen vorübergegangen war, völlige Ruhe der Bilder eingetreten. Da Gewitterregen immer ohne Ausnahme eine Vermehrung der Refraction erzeugt, so hat Sabler richtig seinem Satz um $4^h 38^m$ die Characteristik II gegeben, S. 293, was auch mit dem scheinbaren

Sinken der Objecte von 4^h38^m bis 5^h28^m übereinstimmt. Dasselbe Sinken spricht sich in den Beobachtungen von Sawitsch und Fuss aus, beide haben aber bei den Berechnungen die gewöhnlichen schwachen Refractionen angewandt, was ganz unstatthaft ist. Nach den von Sawitsch gegebenen Characteristiken sind für P^{58} die Refractionscoefficienten $+0,15$, $+0,15$ und $+0,088$, für P^{59} aber $+0,15$, $+0,088$ und $+0,088$ zu setzen. Die Characteristik *ruhig* für P^{59} um 3^h48^m ist nemlich ein Versehen, und ist nach dem Tagebuche entschieden in *ziemlich ruhig* zu verändern. Mit diesen Refractionen sind nun die einzelnen Höhen

	für P^{58}	für P^{59}
	— 1305,9	+ 7147,5
	— 1306,3	+ 7154,3
	— 1305,5	+ 7148,0

4. Seite 337. P^{93} und P^{94} . Sept. 9. Tagebuch S. 126.

Im dritten Satz um 5^h28^m müssen beide Objecte die gleiche Bezeichnung *fast ruhig* erhalten, und der Refractionscoefficient für P^{94} muss $0,15$ statt $0,20$ sein. Die diesem entsprechende Höhe wird $+145,8$ statt $+138,9$.

5. Seite 337. P^{94} und P^{95} . Sept. 10. Tagebuch S. 126.

Die Characteristik *unruhig* im ersten Satz ist nicht richtig. Sie muss *fast ruhig* sein. Der Refractionscoefficient muss für beide Objecte $+0,01$ sein, und statt $+316,4$ und $-72,1$ müssen die Höhen $+314,3$ und $-75,8$ sein.

§ 21.

In der Zusammenstellung von Fuss sind folgende Verbesserungen anzubringen.

1. Seite 351. P^{13} und P^{14} . 8. April. Tagebuch S. 140.

Hier ist ein kleiner Rechnungsfehler vorhanden. Für P^{14} sind die unverbesserten Erhebungen über β^{13} , $+48,7$, $+59,7$ und $+63,5$, wofür $+50,8$, $+61,8$ und $+65,2$ gegeben sind.

2. Seite 354. P^{28} und P^{29} . 5. Mai. Tagebuch S. 145.

Fuss Beobachtungen in β^{28} zeigen eine ganz ungewöhnliche Veränderung der Refraction an, zumal für das Object P^{28} , zu dem die Gesichtslinie dicht über eine vorliegende hohe Fläche streifte. Von 3^h47^m bis 6^h9^m nimmt die Zenithdistanz von P^{29} um $0'45''$ ab, die des nur etwas entfernten Signals P^{28} aber um $1'57''$, welchen Veränderungen Zunahmen der Refractionscoefficienten von $0,32$ für P^{29} , und von $0,75$ für P^{28} entsprechen, und wonach P^{29} zuletzt um $37,3$ Zoll, P^{28} aber um $108,1$ Zoll höher erschien, als zu Anfang der Beobachtungen. Fuss zeigt einen ungewöhnlichen Zustand um 3^h47^m sofort dadurch an, dass er dem Object P^{28} im Tagebuche den Beisatz *fast miragirt* gibt. Es ist demnach entschieden dass dieser früheste Satz nicht berücksichtigt werden darf. Wir haben also die drei andern Sätze allein zu betrachten. Die Seite 354 gegebenen Characteristiken sind *fast ruhig*, *ruhig* und *fast ruhig*. Die letzte ist aber eine willkürliche Aenderung, denn das Tagebuch hat für 6^h9^m ganz bestimmt *völlig ruhig*, so gut wie für 5^h27^m . Unmöglich ist es aber die 3 Sätze zu einem zuverlässigen Resultate zu vereinigen,

da der Höhenunterschied $P^{29}-P^{28}$ aus ihnen respective $-493,5$, $-518,0$ und $-539,4$ Zoll nach Fuss Rechnung folgt, worin sich die Ungleichheit der Refraction nach beiden Seiten deutlich ausspricht. Glücklicher Weise geben die gleichzeitigen Beobachtungen von Sabler und Sawitsch vollständigen Aufschluss, und bestimmen in diesem Ausnahmefalle die zu treffende Wahl aufs entschiedenste. Sabler fand nemlich in P^{28} eine ganz analoge ausserordentliche Zunahme der Refraction für β^{28} , wie Fuss für P^{28} von β^{28} aus, während auch für ihn die Veränderung für die anderen Objecte β^{27} , P^{28} und P^{29} nur die gewöhnliche war, und es ergibt sich ganz deutlich dass nur für die Linie $P^{28}\beta^{28}$ ein ausnahmlches Phänomen stattfand. Dies übersieht man am deutlichsten in seinem eigenthümlichen Verhalten aus Seite 229, wo die reciproken Zenithdistanzen zusammengestellt sind. Wir finden daselbst nemlich:

	für die Linie $\beta^{27}-P^{28}$,	für die Linie $P^{28}-\beta^{28}$
um 4^h41^m	$\rho : C = -0,015$	$\rho : C = -0,269$
5 27,5	+0,047	-0,030
6 9	+0,163	+0,181.

Es sind demnach die Refractionscoefficienten für die letzte Linie, um 4^h41^m und $5^h27^m,5$ ganz anders als für die erste, und nur im letzten Satz findet ein fast genau gleicher Coefficient nach beiden Seiten statt. Da hatte also der störende Einfluss der Nähe der Gesichtslinie zum Erdboden aufgehört. Da nun der Vortheil der Messung aus der Mitte auf der Gleichheit der Refractionen nach beiden Seiten beruht, so ist es klar dass wir nur den von Fuss beobachteten letzten Satz brauchen können, und alle 3 früheren ausschliessen müssen. Fuss hat diesen seinen Satz mit dem Refractionscoefficienten 0,15 berechnet, der zwar fast genau mit dem durch die reciproken Beobachtungen abgeleiteten übereinstimmt. Es ist aber consequenter, da die völlige Ruhe der Bilder von Fuss bestimmt angegeben ist, den Coefficienten $+0,09$ zu gebrauchen, dem die Refractionen in Zollen $+13,0$ für P^{28} , und $+10,4$ für P^{29} zukommen, womit der Höhenunterschied $P^{29}-P^{28}$ nach diesem Satze $-540,9$ Zoll wird.

3. Seite 355. P^{56} und P^{57} . 16. Mai. Tagebuch S. 147.

Dem Satz III um 5^h27^m ist die Characteristik *fast ruhig* von Fuss gegeben. Das Tagebuch gibt aber bestimmt *ruhig*. Folglich gehört zu diesem Satz der Refractionscoefficient $+0,09$ und nicht $+0,15$. Die entsprechenden Refractionen in Zollen sind $+15,1$ und $+10,3$, und $P^{57}-P^{56}$ aus diesem Satz wird $-452,5$ statt $-449,3$.

4. Seite 359. P^{59} und P^{60} . 27. Juni. Tagebuch S. 155.

Der erste Satz für 3^h47^m findet sich nicht im gedruckten Tagebuch. Er ist auch ungültig und von Fuss gleich verworfen, weil die Objecte unregelmässige Formänderungen zeigten. Für den 2ten Satz ist der Refractionscoefficient $+0,15$ zu brauchen. Siehe oben Seite xxxi. 3. Mit ihm sind die Refractionen in Zollen $+11,1$ für P^{59} , und $+14,5$ für P^{60} , und $P^{60}-P^{59}$ wird $-283,4$ aus diesem Satz.

§ 22.

Alle von unsern Beobachtern gegebenen Höhenunterschiede beziehen sich auf die Mitten der an den verschiedenen Puncten aufgestellten Visirmarken, und nicht auf den Erdboden. Die Nivellirungslinie geht

also von einem Meere zum andern durch alle Oerter der Marken, in einer gewissen Höhe über dem Fussboden fort, die für die Hauptsignale P nahezu 12 Fuss, für die Basissignale A oder B anfangs 5 Fuss, bis zur 20sten Basis, nachher aber ebenfalls 12 Fuss beträgt, da bei allen Basispunkten, deren Zenithdistanzen zu beobachten waren, von der 21sten Grundlinie an, höhere Signalstangen α oder β errichtet wurden. Siehe Seite 103.

An jedem Beobachtungspuncte hat jeder der Beobachter für den Höhenunterschied der beiden correspondirenden, nach entgegengesetzten Seiten belegenen Punkte so viel Werthe erhalten, als verschiedene Sätze von ihm genommen sind. Diese Werthe müssen nach den Gewichten der einzelnen Sätze zu einem Mittel vereinigt werden, wobei sich zugleich das Gewicht dieses Mittels ergibt. Es ist klar dass hierbei, wenn in einem Satze den beiden Höhen h und i , der beiden correspondirenden Objecte, über dem Standpuncte, bei verschiedenem Zustande der Bilder, verschiedene Gewichte m und n zukommen, bei der Berechnung der Mittel, beiden das gleiche Gewicht $\frac{2mn}{m+n}$ gegeben werden muss, wodurch der Höhenunterschied $i-h$ das richtige Gewicht $\frac{mn}{m+n}$ erhält. Sabler hat genau angegeben, welches die relativen Gewichte der Sätze nach den Zuständen der Bilder sind. Siehe Seite 271. Ich fand aber dass seine Mittel anfangs nicht strenge nach diesen Gewichten genommen sind, und habe daher alle Mittel auf's neue berechnet. Für die Mittel waren überdies die unvollständigen Sätze auszuschliessen, in welchen nur eins der correspondirenden Objecte beobachtet war. Würden nemlich diese mitgenommen, so wäre die für das Princip der Messung aus der Mitte so wesentliche Gleichzeitigkeit der Beobachtung nach beiden Seiten hin gestört. Wir finden z. B. bei Sabler p. 293, dass in p^{58} die beiden Basissignale β^{57} und α^{58} in 3 Sätzen, I, II, III, ausserdem aber noch β^{57} allein im Satz IV beobachtet ist. Diese letzte Beobachtung ist von ihm mit zum Mittel gezogen, muss aber, wenn die Gleichzeitigkeit erhalten werden soll, ausgeschlossen werden. Solcher Fälle sind nur noch 2, in p^{67} und p^{69} . Auch für die Beobachtungen von Sawitsch und Fuss wurden neue Mittel gezogen, was um so nothwendiger war, als ersterer etwas willkürlich in der Regel die Sätze, bei welchen die Bilder nicht ganz ruhig waren, ausschloss, während die andern Beobachter mit Recht gar keine Sätze verwerfen zu müssen glaubten, sondern alle nach ihren Gewichten stimmen liessen. Ich habe folgende relative Gewichte angewandt:

Gewicht	Sawitsch	Fuss
8	ruhig	ruhig
4	fast ruhig, ziemlich ruhig, wenig unruhig	fast ruhig, etwas unruhig
2	etwas unruhig, schwach unruhig	unruhig
1	unruhig	stark unruhig
0,5	sehr unruhig	

War in einem Satz die Characteristik des einen Objectes z. B. bei Sawitsch *ruhig* und die des andern *etwas unruhig*, so war das gemeinschaftliche Gewicht $\frac{2 \cdot 8 \cdot 2}{8+2} = 3,2$. Die hier gegebenen relativen Gewichte sind die, mit denen auch Fuss seine Mittel gezogen hatte.

Addirt man nun in den verschiedenen Reihen die auf einander folgenden partiellen Höhenunterschiede der zwei von jedem Beobachtungspuncte nach beiden Seiten gesehenen correspondirenden Objecte zusammen: so kommt man, mit Zuziehung der unmittelbar gemessenen Höhe des Signals $P^1 = 146,0$ Zoll über dem Asowschen Meere, zu den absoluten Höhen aller in jeder Reihe beobachteten Puncte, wie sie aus der Messung von mittleren Stationen aus folgen. Diese Arbeit war leicht für die Reihen (F) und (S) ausgeführt, da in denselben kein Glied fehlte, und die Gleichzeitigkeit streng eingehalten war.

Bei der Bearbeitung der 3 Reihen von Sabler stiess ich auf die Schwierigkeit, dass an einigen Puncten die Beobachtungen nicht vollständig waren, indem ein oder das andere Object nicht beobachtet worden. Ich erkannte dabei, dass die beiden von Sabler selbst gegebenen Reihen, die eine aus den Basispuncten, die andere durch die Hauptsignale, nicht vollkommen unabhängig von einander waren, indem mitunter, wenn auch selten, eine Beobachtung der einen Reihe in der andern Reihe wieder benutzt war. In einem solchen Falle lässt sich bekanntlich für das Mittel aus 2 Resultaten nicht mehr der wahrsch. Fehler aus den w. F. der einzelnen einfach ableiten.

§ 23.

Eine genaue Durchsicht des ganzen Materials der Zenithdistanzen zeigte mir folgende noch zu berücksichtigende Umstände an:

1. Der Höhenunterschied $P^2 - P^1$ wurde am 3. Nov. 1836 durch gleichzeitige reciproke Beobachtungen bestimmt. Aus ihnen ergibt sich, mit Berücksichtigung der Biegungscoefficienten der 3 Instrumente, dieser Höhenunterschied zu 1169,6 Zoll mit dem w. F. 0,39 Zoll, oder für die Höhe von P^2 über dem Asowschen Meere $1169,6 + 146,0 = 1315,6$ Zoll. Diese Zahl dient als gemeinschaftlicher Ausgangspunct für die Reihen (F) (S) und die Sablersche Reihe durch die Basispuncte (Σ').
2. Die Reihe (F) geht unabhängig und von der Mitte aus nur bis P^{123} . Um sie ganz auf Fuss Beobachtungen bis P^{124} zu führen, muss noch $P^{124} - P^{123}$ aus den 4 Sätzen, die Fuss in P^{124} einseitig beobachtet hat, berechnet werden. Diese geben $P^{124} - P^{123}$ gleich $-294,7$, $-313,2$, $-309,2$ und $-309,3$ Zoll, mit den relativen Gewichten 8, 4, 4, 8 und folglich im Mittel $-305,1$ Zoll, wofür aus der Uebereinstimmung der 4 Bestimmungen der w. F. 2,91 Zoll ist.
3. Sabler's Beobachtungen sollten 3 Reihen geben, nemlich

die Reihe (Σ') durch die Basispuncte,

die Reihe (Σ'') " " Beobachtungen der ungeraden P , von den geraden als Standpuncten,

die Reihe (Σ''') " " " " geraden P , " " ungeraden " "

Es war nunmehr dafür zu sorgen, dass in keiner dieser 3 Reihen eine gemeinschaftliche Beobachtung zur Anwendung kam, damit sie als von einander völlig unabhängig angesehen werden können. Ich erlangte dies durch das einzig mögliche Mittel, dass ich nemlich in den wenigen Fällen, wo von einem Puncte aus die Beobachtungen desselben Objectes für (Σ') und (Σ'') oder für (Σ') und (Σ''') benutzt werden mussten, von den eigentlich zu (Σ') gehörigen Sätzen einen oder 2 für die andere Reihe abtheilte, so dass er für diese und nicht für (Σ') angewandt wurde. Hierbei war es Regel, den besseren Satz für (Σ'), die Hauptreihe, zu nehmen. Ganz zu Anfang der Operation war die Beobachtung von

Kagalnik Kirche von 3 Punkten aus, Seite 272, behülflich die Reihen (Σ'') und (Σ''') von einander und von Σ' unabhängig zu machen. Auf gleiche Weise half die Beobachtung der 3 geeigneten Visirpunkte an der Kirche der Stanitza bei P^{11} , die ich für die Reihe (Σ') wählte, mir die nöthigen unabhängigen Verbindungen für (Σ'') und (Σ'''), für den Endpunkt bei P^{11} am Schluss der Arbeit 1836 und bei der Wiederaufnahme 1837, zu gewinnen. Siehe Seite 272 — 274.

4. Da die unregelmässigen Verbindungen immer nur Ausnahmen waren, so ward, wie für die Reihe (Σ'), so auch für die beiden andern (Σ'') und (Σ''') das Princip der Gleichzeitigkeit so vollständig als möglich aufrecht erhalten, d. h. auch für diese Reihen wurden ausschliesslich die Sätze benutzt, in denen von einem P^n aus sowohl P^{n-1} als P^{n+1} beobachtet worden.
5. Die Reihe (Σ') geht nicht über den 1836 angesetzten Endpunkt, sondern über die drei vortrefflichen Visirpunkte an der Kirche bei der Stanitza, 1836 in b^{10} und 1837 in b^{11} beobachtet. Diese 3 Punkte K^1 , K^2 und K Knopf wurden beide Male zu einem Mittel (K) vereinigt. Im ganzen fernern Verlaufe dieser Reihe kommen nur zwei Fälle vor, wo die Messung aus der Mitte aufgegeben werden musste. In p^{68} war nemlich nur der nachfolgende Basispunkt β^{68} sichtbar gewesen, β^{67} der vorhergehende nicht. Um die Lücke auszufüllen, wurde in p^{67} , ausser $\beta^{67} - \beta^{66}$, auch noch $P^{68} - \beta^{67}$ aus dem dritten Satze genommen, und so $P^{68} - \beta^{67}$ erlangt. Zur Fortführung musste aber in p^{68} der einseitige Werth $\beta^{68} - P^{68}$ benutzt werden. Als darauf am 11. Juli die Operation auf 4 Wochen unterbrochen wurde, beobachtete Sabler in p^{71} an diesem Tage β^{70} , aber das entgegengesetzte β^{71} erst von demselben Standpunkte aus am 11. August. Hier ward also $\beta^{71} - \beta^{70}$ aus den beiden einseitigen Werthen $P^{71} - \beta^{70}$ und $\beta^{71} - P^{71}$ durch Summirung gefunden. Die Reihe geht sonst ganz regelmässig bis zur Bestimmung von $\beta^{122} - \beta^{121}$ aus p^{122} fort. Das letzte Intervall $P^{124} - \beta^{122}$ folgt aus einer gedoppelten Bestimmung. Die erste beruht auf p^{125} , 26. Oct. Satz II und III; die andere auf Belved. — β^{122} in Satz I des 26. Octobers, verbunden mit 2 Sätzen in p^{124} , die den Unterschied $P^{124} - \text{Belved.}$ einseitig geben.
6. Die Reihe (Σ''), an den graden Stationen beobachtet, hätte eigentlich aus 62 Gliedern bestehen müssen. Sie hat aber jetzt 66 Glieder, von denen 59 auf Messung aus der Mitte beruhen, und 7 einseitige Höhenbestimmungen sind. Diese letzten sind

$B^{11} - P^{11}$	beobachtet in	p^{11}
$P^{17} - P^{16}$	“	“ p^{16}
$P^{70} - P^{69}$	“	“ p^{70}
$\beta^{70} - P^{70}$	“	“ p^{70} , Satz III abgetheilt.
$P^{71} - \beta^{70}$	“	“ p^{71} , Satz II “
$P^{105} - \beta^{104}$	“	“ p^{105} , Satz I “
$P^{124} - P^{123}$	“	“ p^{124} .

Ausserdem sind in dieser Reihe noch zur Ausfüllung benutzt, und daher von der Reihe (Σ'') abgetrennt:

in p^{12} der Satz I, um $P^{13} - A^{11}$ zu erhalten,

in p^{104} der Satz I, um $\beta^{104} - P^{103}$ zu erhalten.

Beide gehören zu den Messungen aus der Mitte.

7. Die Reihe (Σ'''), an den ungraden Stationen beobachtet, hat statt 62 Glieder deren 68 erhalten. Sie beginnt mit der zwiefachen Bestimmung der Spitze des Kreuzes auf der Kirche in Kagalnik über P^1 , ein Mal von a^1 , das zweite Mal von b^1 aus, zu einem Werthe vereinigt. Im ganzen sind hier 7 Glieder einseitiger Höhenbestimmungen, nemlich

P^2	—	Kagaln. beobachtet in	p^2
P^{17}	—	"	" p^{17}
B^{17}	—	"	" p^{17} , Satz III abgetheilt.
P^{18}	—	"	" p^{18} , Satz II "
P^{39}	—	"	" p^{39}
β^{39}	—	"	" p^{39} , Satz II abgetheilt.
P^{40}	—	"	" p^{40} , Satz II "

Die übrigen 64 Glieder beruhen auf gleichzeitiger Messung von der Mitte aus. Der Schluss, d. h. der Höhenunterschied $P^{124} - P^{122}$, ist aus p^{125} , 28. Oct. Satz I und II gefunden.

8. In welcher Art die Höhe des ersten Signals P^1 über dem mittleren Stande des Asowschen Meeres = 146,0 Zoll gefunden ist, wird Seite 7 berichtet. Für die Höhe des Signals P^{124} über dem damaligen mittleren Stande des Caspischen Meeres, sind 3 Bestimmungen vorhanden, deren gemeinschaftliche Grundlage die Beobachtung des Wasserstandes an einem Zeiger während 6 Tagen abgibt. Siehe Seite 96. Der mittlere Meeresstand war bei 47,9 Zoll der Theilung, deren Nullpunct oberhalb des Wassers war. Die 3 Bestimmungen sind folgende:

26. Oct. Nachmittag.	P^{124} — Wasserfläche	=	279,1 Zoll nach Fuss, S. 171.
	Reduction auf den mittl. Stand des Wassers	<u>+2,9 "</u>	
			282,0 Zoll.
27. Oct. Nachmittag.	P^{124} — Wasserfläche	=	281,8 " nach Sabler, S. 317.
	Reduction	<u>+0,1 "</u>	
			281,9 Zoll.
28. Oct. Nachmittag		=	281,6 " nach Sawitsch, S. 136 und 342
	Im Mittel ist P^{124} — mittl. Wasserstand	<u>281,8 Zoll.</u>	

9. In allen unsern Reihen wird die Höhe = H eines beliebigen Punctes über dem Anfangspuncte der Operation, aus der Summirung aller bis zu ihm bestimmten partiellen Höhenunterschiede = u , der an den einzelnen Standörtern beobachteten correspondirenden Marken abgeleitet. Die Genauigkeit einer Höhe H hängt demnach von der Sicherheit ab, mit welcher die einzelnen u , die zu seinem Werthe führten, bestimmt worden sind, und es ist klar dass, je weiter ein Punct vom Anfangspuncte abliegt, die Genauigkeit seines H desto geringer, sein w. F. desto grösser werden muss. Um diesen w. F. beurtheilen zu können, ist es unerlässlich, in allen Reihen die w. F. der einzelnen u zu ermitteln. Dies kann entweder durch Vergleichung der in den verschiedenen Reihen vorkommenden identischen u geschehen, oder dadurch dass man für jedes einzelne u den w. F. aus den seiner Bestimmung zum Grunde liegenden Bedingungen ableitet. Diese vollständig durchgeführte Untersuchung lehrt nicht nur

den Werth der Arbeit in allen Einzelheiten kennen, sondern sie zeigt uns die einzelnen schwächeren Theile an, und kann Veranlassung geben, wenn erforderlich, nachzuforschen ob nicht irgendwo ein Irrthum vorgefallen sei. Ich erwähne hier schon, dass ich *nirgends* ein Beobachtungsversehen habe auffinden können.

§ 24.

Ich gebe zunächst in Tafel I eine Zusammenstellung der von Sabler beobachteten Reihe (Σ'), welche die Höhen der Basispunkte enthält. Neben jeder Höhe steht der w. F. des Höhenunterschiedes u zwischen diesem und dem nächsten Punkte. So ist 2,3 Zoll der w. F. in der Bestimmung des Höhenunterschiedes $u = B^5 - P^2 = 1159,4$ Zoll. Wie die w. F. der u in dieser und den andern Reihen gefunden sind, werde ich weiter unten auseinandersetzen.

Die Höhen der Reihe Σ' lassen sich nicht unmittelbar mit den weiter unten folgenden der andern Reihen vergleichen, weil in diesen nicht die Basispunkte, sondern die Hauptpunkte P bestimmt sind. Indess lässt sich diese Vergleichung auf einfache Weise herbeiführen, wenn an die ursprünglichen Zahlen in (Σ') die aus den reciproken Beobachtungen abgeleiteten Höhenunterschiede der benachbarten Haupt- und Basispunkte angebracht werden, die Seite 222 bis 248 gegeben sind. Wir haben z. B.

in Tafel I aus der Reihe Σ' :	$B^{14} = 2150,8$	$B^{15} = 3522,3$
nach S. 227 aus den recipr. Beob.	$P^{15} - B^{14} = +1076,0$	$P^{15} - B^{15} = -296,0$
Hieraus	$P^{15} = 3226,8$	$P^{15} = 3226,3$ Mittel 3226,5 Zoll.

Die so nach einander gefundenen Höhen der P können an Genauigkeit den ursprünglichen Höhen der Basispunkte in (Σ') kaum nachstehen, und bewirken die gewünschte Vergleichbarkeit der Reihe (Σ') mit den andern 4 Reihen, ohne dass die angewandte Ableitung auf die Höhe des Endsignals P^{124} irgend einwirkt, da dieses in (Σ') direct vorhanden ist.

In Tafel II werden darauf die Höhen der Hauptpunkte P nach allen 5 Reihen zusammengestellt. Von den schmalen senkrechten Spalten dieser Tafel enthält die erste durch $u'' - u'$ die Vergleichung des Höhenunterschiedes zweier benachbarter Punkte $= u''$ nach Sawitsch und $= u'$ nach Fuss. So ist $P^5 - P^2$ gleich $+519,8 = u''$ nach (S), gleich $524,4 = u'$ nach (F), folglich $u'' - u' = -4,6$. Diese $u'' - u'$ führen zur Kenntniss der w. F. der in beiden Reihen gebrauchten u , und geben diesen $= 2,40$ Zoll. In den 3 letzten Spalten sind die w. F. der einzelnen u für jede der Reihen (Σ'), (Σ'') und (Σ''') angegeben, in jedem einzelnen Falle aus den Elementen der Bestimmung besonders abgeleitet. Die für (Σ') gegebenen w. F. sind dieselben, wie in Tafel I, und hier nur der Vollständigkeit wegen wiederholt. In den andern beiden Reihen ist z. B. für den Unterschied $P^5 - P^1$ der Werth $u = 1691,6$ aus (Σ'') mit dem w. F. 1,8 Zoll behaftet, und in (Σ''') für $P^4 - P^2$ hat der Werth $u = -155,8$ den w. F. 5,0 Zoll.

Am Schluss der Tafel habe ich noch die w. F. für die 5 Endwerthe K der Tiefe des Caspischen Meeres unter dem Asowschen gegeben, wie sie aus dem Complexe aller einzeln angegebenen w. F. der fünferlei u abgeleitet werden.

TAFEL I. Höhen der Basispunkte über dem Asowschen Meere, nach Sabler's Messungen, Reihe (Σ').

(Alle Höhen beziehen sich auf die Mitten der Visirmarken.)

Punct	Höhe in engl. Zollen	w. F. des Unter- schiedes	Punct	Höhe in engl. Zollen	w. F. des Unter- schiedes	Punct	Höhe in engl. Zollen	w. F. des Unter- schiedes	Punct	Höhe in engl. Zollen	w. F. des Unter- schiedes
P^1	146,0		β^{32}	2039,6	1,5	β^{64}	12096,3	2,1	β^{95}	3892,7	1,7
P^2	1315,6	2,3	β^{33}	2183,1	2,0	β^{65}	9374,2	1,5	β^{96}	3693,0	1,5
B^3	156,2	3,2	β^{34}	2432,3	2,3	β^{66}	11958,6	2,2	β^{97}	3946,7	1,3
B^4	1105,1	1,9	β^{35}	3464,7	2,2	β^{67}	10314,0	5,0	α^{98}	3554,0	2,8
B^5	791,7	2,1	β^{36}	4417,2	1,9	P^{68}	13847,3	1,5	β^{99}	3649,6	1,0
B^6	497,2	2,4	β^{37}	4487,7	2,6	β^{68}	13647,4	2,9	α^{100}	3536,0	1,2
B^7	866,9	6,1	α^{38}	5913,4	2,4	β^{69}	14552,2	1,8	α^{101}	3174,8	2,9
B^8	971,1	2,6	β^{39}	7005,4	1,6	β^{70}	13959,1	3,2	β^{102}	2732,2	1,7
B^9	833,1	3,0	α^{40}	6644,9	2,4	β^{71}	9784,0	1,5	α^{103}	2745,9	1,2
B^{10}	2105,9	1,4	β^{41}	7266,6	1,3	α^{72}	10760,4	2,8	β^{104}	2322,7	1,7
(K)	1750,8	0,6	β^{42}	10276,8	1,3	β^{73}	12042,8	3,2	β^{105}	1920,8	1,1
B^{11}	1925,9	1,0	β^{43}	14063,5	1,3	α^{74}	12877,8	3,1	β^{106}	1831,3	1,2
A^{12}	2754,0	1,4	β^{44}	13730,6	2,7	β^{75}	12505,3	2,5	α^{107}	1386,0	0,9
B^{13}	3165,1	1,8	α^{45}	17490,2	1,9	β^{76}	11937,4	2,6	α^{108}	999,9	1,6
B^{14}	2150,8	1,4	β^{46}	20428,1	1,0	α^{77}	10824,7	1,1	β^{109}	630,8	1,5
B^{15}	3522,3	1,1	β^{47}	19174,1	1,2	β^{78}	10293,7	1,8	β^{110}	168,8	1,4
B^{16}	3684,7	1,5	β^{48}	19644,1	2,2	β^{79}	9511,4	1,3	β^{111}	-34,9	3,0
B^{17}	3847,2	4,0	α^{49}	13689,4	1,4	β^{80}	8747,1	1,3	β^{112}	-188,2	1,6
B^{18}	3933,5	1,9	α^{50}	10645,0	0,7	β^{81}	7817,5	1,6	β^{113}	-251,4	1,6
B^{19}	4074,7	1,7	α^{51}	12274,3	1,7	β^{82}	7226,0	1,4	β^{114}	-346,6	2,7
B^{20}	4254,9	1,5	β^{52}	12183,7	1,3	β^{83}	6963,0	1,6	α^{115}	-385,5	3,5
β^{21}	4196,9	1,4	α^{53}	16860,8	2,2	β^{84}	6724,6	2,0	β^{116}	-459,8	2,0
β^{22}	3864,2	1,2	β^{54}	13578,4	1,6	β^{85}	6414,1	1,7	β^{117}	-531,3	1,2
β^{23}	3110,7	2,4	β^{55}	11550,0	1,5	β^{86}	6058,0	2,1	α^{118}	-595,2	1,5
β^{24}	2701,2	1,5	α^{56}	12462,9	1,5	α^{87}	5477,7	1,5	β^{119}	-614,3	1,8
β^{25}	3281,4	1,1	β^{57}	11944,6	1,8	β^{88}	5352,0	1,6	β^{120}	-659,1	2,1
β^{26}	4241,9	2,1	α^{58}	14802,9	2,9	β^{89}	5186,3	1,9	β^{121}	-559,6	1,6
β^{27}	3789,8	2,1	β^{59}	20343,7	1,6	β^{90}	5151,5	0,8	β^{122}	-826,6	2,9
β^{28}	2809,0	1,4	β^{60}	18097,2	1,7	β^{91}	4810,6	1,4	P^{124}	-728,1	
β^{29}	1844,4	1,0	β^{61}	13921,8	1,1	β^{92}	4656,1	1,8			
β^{30}	2431,4	1,3	β^{62}	15777,3	2,3	β^{93}	4448,3	2,3			
β^{31}	2139,5	1,1	β^{63}	15846,3	2,3	β^{94}	4083,4	1,5			

§ 25.

TAFEL II. Zusammenstellung der in englischen Zollen ausgedrückten Höhen über dem Asowschen Meere für alle Hauptpunkte P^1 bis P^{31} zwischen beiden Meeren, nach den 5 unabhängigen Reihen der 3 Beobachter.

(Alle Höhen beziehen sich auf die Mitten der Visirmarken.)

	F	S	Σ'	Σ''	Σ'''	Aus (F) und (S); $u'' - u'$	Wahrsch. Fehler der u		
							für Σ'	für Σ''	für Σ'''
Asow. Meer.	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0				
P^1	146,0	146,0	146,0	146,0	146,0		1,8	1,3	
P^2	1315,6	1315,6	1315,6		1314,1	-4,6	2,3		5,0
P^3	1840,1	1835,4	1836,1	1837,6		+4,0	3,2	6,0	
P^4	1261,2	1260,5	1251,6		1258,3	-3,4	1,9		4,3
P^5	1685,9	1681,8	1677,3	1670,2		+0,9	2,1	4,3	
P^6	857,8	854,6	855,3		854,7	-2,9	2,4		5,7
P^7	1670,5	1664,4	1672,9	1658,2		-4,7	6,1	16,1	
P^8	922,6	911,8	923,5		915,6	+6,9	2,6		6,4
P^9	1160,0	1156,1	1159,1	1149,9		-6,1	3,0	5,2	
P^{10}	3241,8	3231,8	3230,3		3223,8	+0,3	1,4		1,7
Endpunkt 1836	1218,3	1208,6	1206,9	1195,1	1198,9	-2,2	0,6	3,9	1,0
P^{12}	2641,0	2629,1	2628,7		2619,6	+1,8	1,0		5,9
P^{13}	3284,7	3274,5	3270,1	3258,3		+8,3	1,4	8,7	
P^{14}	3239,9	3238,0	3225,1		3212,9	-7,5	1,8		3,4
P^{15}	3248,8	3239,5	3226,5			-0,2	1,4		
P^{15}	4080,9	4071,4	4058,5	4041,9	4049,6	-5,0	1,1	2,3	2,5
P^{17}	3916,6	3902,1	3887,7	3868,9	3877,6	+8,9	1,5	5,4	8,3
P^{18}	4049,2	4043,6	4019,1		401,8	-0,4	4,0		4,7
P^{19}	4196,7	4190,7	4154,5	4136,3		+2,6	1,9	3,6	
P^{20}	4227,8	4224,4	4177,9		4181,4	+1,8	1,7		5,1
P^{21}	4621,2	4619,6	4564,4	4548,2		-4,7	1,5	3,0	
P^{22}	4316,5	4310,2	4258,9		4280,4	-4,1	1,4		5,5
P^{23}	3830,9	3820,5	3772,1	3762,3		+7,3	1,2	5,2	
P^{24}	2894,6	2891,5	2837,7		2849,8	-3,1	2,4		3,6
P^{25}	3417,4	3411,2	3354,9	3334,3		-1,5	1,5	3,4	
P^{26}	3843,6	3835,9	3782,1		3790,2	+2,3	1,1		4,9
P^{27}	4976,1	4970,7	4913,1	4903,5		+5,2	2,1	5,5	
P^{28}	3497,9	3497,7	3439,3		3442,0	-6,9	2,1		3,3
P^{29}	2957,0	2949,9	2902,1	2893,7		+0,5	1,4	3,3	
P^{30}	2602,8	2596,2	2543,1		2537,6	+3,6	1,0		2,7
P^{31}	2356,9	2353,9	2299,2	2297,1		+3,7	1,3	3,1	

TAFEL II. Höhen der Hauptpunkte nach den 5 Reihen; Fortsetzung.

	F	S	Σ'	Σ''	Σ'''	Aus (F) und (S) $u'' - u'$	Wahrsch. Fehler der u		
							für Σ'	für Σ''	für Σ'''
P^{52}	2332,9	2333,6	2277,5		2276,2	+ 1,8	1,1		3,5
P^{55}	2396,9	2399,4	2348,3	2343,0		+ 0,3	1,5	4,1	
P^{54}	2503,3	2506,1	2462,2		2455,0	+ 0,2	2,0		4,7
P^{55}	2862,6	2865,6	2822,1	2811,8		+ 2,3	2,3	5,4	
P^{56}	5390,7	5396,0	5348,3		5328,8	- 5,4	2,2		8,2
P^{57}	4950,8	4950,7	4918,3	4913,4		- 4,7	1,9	5,4	
P^{58}	5716,8	5712,0	5682,1		5661,8	+ 9,1	2,6		6,0
P^{59}	7032,4	7036,7	7009,1	7008,6	6990,9	- 1,9	2,4	3,5	1,8
P^{40}	6981,1	6983,5	6956,7		6938,8	+ 3,2	1,6		4,6
P^{41}	6891,1	6896,7	6869,9	6866,8		+ 5,2	2,4	3,6	
P^{42}	9990,3	10001,1	9972,6		9955,8	- 1,0	1,3		3,3
P^{43}	13551,9	13561,7	13532,9	13540,5		+ 5,1	1,3	5,0	
P^{44}	14789,7	14804,6	14767,9		14751,4	0,0	1,3		6,3
P^{45}	15446,3	15461,2	15423,4	15432,5		- 4,5	2,7	7,9	
P^{46}	18784,1	18794,5	18758,1		18741,1	- 8,0	1,9		3,7
P^{47}	21465,2	21467,6	21438,3	21455,7		+ 1,6	1,0	2,7	
P^{48}	22281,0	22285,0	22255,5		22238,0	- 5,3	1,2		3,8
P^{49}	18350,4	18349,1	18322,7	18338,0		+ 4,5	2,2	3,7	
P^{50}	12238,3	12241,5	12208,2		12182,1	+ 3,6	1,4		2,9
P^{51}	12929,5	12936,3	12899,9	12918,1		+ 2,3	0,7	4,2	
P^{52}	13302,4	13311,5	13273,0		13250,9	- 4,0	1,7		3,3
P^{53}	16853,2	16858,3	16825,9	16840,0		+ 2,0	1,3	5,7	
P^{54}	18361,7	18368,8	18336,1		18311,2	+ 8,2	2,2		4,0
P^{55}	12093,1	12108,4	12069,8	12073,1		+11,4	1,6	4,8	
P^{56}	12464,8	12491,5	12447,9		12421,9	+ 9,0	1,5		4,3
P^{57}	11669,0	11704,7	11655,3	11664,4		- 0,8	1,5	7,6	
P^{58}	13504,4	13539,3	13492,9		13477,1	+ 0,3	1,8		5,2
P^{59}	21959,4	21994,6	21951,1	21956,6		+ 2,5	2,9	5,5	
P^{60}	21683,0	21720,7	21675,9		21662,8	+ 0,7	1,6		4,4
P^{61}	20404,3	20442,7	20398,3	20410,0		+ 4,2	1,7	2,7	
P^{62}	13355,6	13398,2	13353,2		13341,3	- 0,3	1,1		4,3
P^{53}	16244,6	16286,9	16238,3	16254,7		- 2,0	2,3	5,2	
P^{64}	16127,1	16167,4	16117,2		16105,9	- 7,6	2,3		5,1
P^{65}	11811,2	11843,9	11794,3	11815,0		+ 2,3	2,1	4,1	
P^{66}	11675,0	11710,0	11663,7		11654,3	- 0,8	1,5		4,9

TAFEL II. Höhen der Hauptpunkte nach den 5 Reihen; Fortsetzung.

	F	S	Σ'	Σ''	Σ'''	Aus (F) und (S); $u''-u'$	Wahrsch. Fehler der u		
							für Σ'	für Σ''	für Σ'''
P^{67}	12414,2	12448,4	12403,6	12427,2		— 4,1	2,2	3,3	
P^{68}	13858,3	13888,4	13847,3		13839,9		5,2		3,3
P^{69}	13990,5	14018,9	13982,2	14002,6		— 2,9	2,9	4,1	
P^{70}	15438,5	15464,0	15423,3	15450,1	15412,3	— 5,2	1,8	3,4	6,2
P^{71}	10254,1	10274,4	10236,3	10259,5		+ 0,8	3,2	5,1	
P^{72}	11364,1	11385,2	11345,5		11328,5	—14,9	1,5		7,3
P^{73}	12294,5	12300,5	12273,3	12294,2		+ 7,6	2,8	9,2	
P^{74}	13339,1	13352,6	13319,3		13297,4	—16,9	3,2		5,3
P^{75}	12865,9	12862,5	12840,2	12868,4		— 5,1	3,1	11,6	
P^{76}	12974,6	12966,1	12964,1		12942,7	+ 7,2	2,5		9,2
P^{77}	11141,3	11140,0	11152,8	11183,0		— 6,5	2,6	3,6	
P^{78}	10746,4	10738,6	10760,3		10717,5	— 3,6	1,1		4,4
P^{79}	10106,6	10095,3	10118,5	10150,5		— 3,6	1,8	5,5	
P^{80}	9196,2	9181,3	9207,5		9163,5	— 1,4	1,3		4,4
P^{81}	8530,1	8513,8	8539,1	8565,6		— 6,4	1,3	4,9	
P^{82}	7661,2	7638,5	7666,1		7625,2	+ 3,5	1,6		3,4
P^{83}	7234,5	7215,3	7241,3	7282,8		— 6,6	1,4	7,9	
P^{84}	6932,3	6906,5	6939,7		6900,1	+ 3,5	1,6		8,4
P^{85}	6550,9	6528,6	6559,5	6614,2		+11,0	2,0	4,8	
P^{86}	6281,6	6270,3	6297,3		6260,7	0,0	1,7		7,4
P^{87}	5945,2	5933,9	5965,9	6015,4		— 3,3	2,1	4,8	
P^{88}	5446,7	5402,1	5443,9		5403,2	— 1,9	1,5		4,5
P^{89}	5647,2	5630,7	5679,1	5727,8		+ 9,3	1,6	5,5	
P^{90}	5079,4	5072,2	5107,5		5054,0	+ 5,2	1,9		1,8
P^{91}	5209,1	5207,1	5239,1	5283,8		+ 2,1	0,8	3,5	
P^{92}	5248,9	5249,0	5280,9		5229,5	+ 5,8	1,4		5,2
P^{93}	4826,8	4832,7	4855,2	4904,2		+ 4,1	1,8	6,2	
P^{94}	4541,2	4551,2	4578,3		4533,3	+ 2,1	2,3		3,7
P^{95}	4162,1	4174,2	4202,2	4245,9		— 0,3	1,5	4,0	
P^{96}	3781,3	3793,1	3827,5		3781,6	+ 4,1	1,7		3,9
P^{97}	3842,5	3858,4	3894,1	3934,0		+ 3,6	1,5	2,8	
P^{98}	4005,4	4024,9	4060,5		4022,8	— 0,4	1,3		6,0
P^{99}	3965,8	3984,9	4018,9	4063,2		— 3,2	2,8	3,4	
P^{100}	3548,2	3564,1	3597,5		3553,3	+ 1,0	1,0		2,7

TAFEL II. Höhen der Hauptpunkte nach den 5 Reihen; Schluss.

	F	S	Σ'	Σ''	Σ'''	Aus (F) und (S); u''-u'	Wahrsch. Fehler der u		
							für Σ'	für Σ''	für Σ'''
P ¹⁰¹	3513,4	3530,3	3562,5	3606,6		0,0	1,2	6,7	
P ¹⁰²	3439,3	3456,2	3487,3		3446,8	- 1,3	2,9		9,1
P ¹⁰³	2831,5	2847,1	2868,5	2907,5		+ 0,5	1,7	5,3	
P ¹⁰⁴	2734,2	2750,3	2769,0		2731,8	- 2,7	1,2		3,2
P ¹⁰⁵	2253,3	2266,7	2290,6	2327,3		+ 3,5	1,7	2,6	
P ¹⁰⁶	2146,6	2163,5	2185,5		2147,8	+ 1,0	1,1		2,8
P ¹⁰⁷	1609,0	1626,9	1649,7	1683,2		+ 3,2	1,2	2,8	
P ¹⁰⁸	1060,1	1081,2	1102,1		1067,9	- 1,6	0,9		3,0
P ¹⁰⁹	1059,2	1078,7	1105,7	1133,5		- 1,5	1,6	3,6	
P ¹¹⁰	472,6	490,6	519,9		481,9	- 0,1	1,5		4,2
P ¹¹¹	181,9	199,8	228,7	259,2		+ 2,1	1,4	7,5	
P ¹¹²	- 12,1	7,9	33,1		- 8,5	- 4,8	3,0		7,0
P ¹¹³	- 172,6	- 157,4	- 126,5	- 89,0		+ 0,2	1,6	5,1	
P ¹¹⁴	- 263,3	- 247,9	- 216,0		- 250,1	+ 7,7	1,6		6,2
P ¹¹⁵	- 253,0	- 229,9	- 203,2	- 168,8		- 0,7	2,7	11,5	
P ¹¹⁶	- 330,2	- 307,8	- 278,9		- 321,7	- 5,7	3,5		5,6
P ¹¹⁷	- 522,4	- 505,7	- 476,5	- 435,6		- 7,2	2,0	4,5	
P ¹¹⁸	- 438,4	- 428,9	- 396,3		- 436,8	+ 0,5	1,2		5,0
P ¹¹⁹	- 469,5	- 459,5	- 428,0	- 386,7		+ 3,0	1,5	5,8	
P ¹²⁰	- 590,4	- 577,4	- 549,7		- 590,5	- 1,6	1,8		4,4
P ¹²¹	- 464,2	- 452,8	- 420,1	- 379,2		- 14,8	2,1	4,8	
P ¹²²	- 461,3	- 464,7	- 423,5		- 461,4	+ 3,8	1,6		4,5
P ¹²³	- 465,8	- 465,4	- 423,3	- 374,2			2,9	3,5	
P ¹²⁴	- 770,9	- 770,4	- 728,1	- 678,8	- 770,3				
K	- 1052,7	- 1052,2	- 1009,9	- 960,6	- 1052,1	engl. Zoll			
	(87,72)	(87,68)	(84,16)	(80,05)	(87,68)	« Fuss			
Wahrsch. Fehler der K	26,51	26,51	22,67	44,32	40,16	« Zoll			
	(2,21)	(2,21)	(1,89)	(3,69)	(3,35)	« Fuss			

§ 26.

Ich habe noch den Weg anzugeben, wie ich zur Angabe über die Genauigkeit der in den einzelnen der 5 Reihen gegebenen Zahlen, d. h. zur Bestimmung der w. F. derselben gelangt bin. Die beiden Reihen (F) und (S) beruhen auf Beobachtungen an denselben Standörtern so angestellt, dass Sawitsch in der Regel auf jedem derselben die Zenithdistanzen, der nach beiden Seiten hin in nahezu gleicher Entfernung liegenden

Hauptsignale, um genau einen Tag später als Fuss beobachtete. Beide Beobachter arbeiteten mit gleichgebauten und gleich genau getheilten Instrumenten, und gleicher Sorgfalt. Die Zahlen dieser Reihen eignen sich also vor allen zu einer Vergleichung, und diese ist von mir durch die Angabe der $u''-u'$ der Tafel II ausgeführt.

Da alle Werthe $u''-u'$ gleich Null hätten sein müssen, wenn alle Messungen absolut genau gewesen wären, so dienen die gefundenen ($u''-u'$) unmittelbar zur Auffindung der w. F. von $u''-u'$. Es ist nemlich die Summe der Quadrate der 120 verschiedenen $u''-u'$ gleich 3053. Dies gibt den w. F. eines $u''-u' = 3,40$ Zoll, und unter Voraussetzung gleicher Sicherheit in beiden Reihen (F) und (S), für ein beliebiges u jeder Reihe den w. F. = 2,40 Zoll.

Vergleichen wir die 120 gefundenen Fehler $u''-u'$, ihrer Grösse nach, mit der Theorie, so liegen:

	nach der Theorie,	nach der Erfahrung
zwischen 0 und 3,40 Zoll	60	60
3,40 " 6,80 "	39	39
6,80 " 10,20 "	16	16
10,20 " ∞ "	5	5

Hier stellt sich uns eine merkwürdige Uebereinstimmung der Erfahrung mit der Theorie dar. Die 5 Fehler, welche das dreifache des w. F., d. h. 10,20, übersteigen, sind folgende:

für $P^{56}-P^{55}$ ist $u''-u' = +11,4$ Zoll,	
" $P^{73}-P^{72}$	- 14,9 "
" $P^{75}-P^{74}$	- 16,9 "
" $P^{86}-P^{85}$	+ 11,0 "
" $P^{122}-P^{121}$	- 14,8 "

Obgleich das Vorkommen dieser 5 stärkeren Fehler nichts auffallendes darbietet, so habe ich dennoch diese Fälle einzeln untersucht, und mich überzeugt, dass nirgends eine Unzuverlässigkeit in den Beobachtungen oder ein Rechnungsfehler vorkommt. Drei derselben fallen auf den Augustmonat, der seines in der Regel grellen Sonnenscheins wegen im allgemeinen der für die Beobachtungen ungünstigste war. Bei dem stärksten Unterschiede für $P^{75}-P^{74}$ waren die Entfernungen nach beiden Seiten sehr ungleich, und Sawitsch erhielt nur 3 sehr unruhige Sätze, deren Gewicht sehr klein ist, Fuss drei bessere.

Für ein beliebiges P^n in einer der beiden Reihen (F) und (S) ist, dem so eben gesagten zufolge, der w. F. der in der Tafel angegebenen Höhe über dem Meere gleich $2,40 \cdot \sqrt{(n-2)}$ Zoll. Hiermit ergibt sich für die Bestimmung von K der w. F. $2,40\sqrt{122} = 26,51$ Zoll. Sawitsch hat, S. 346, seinem Endresultat einen w. F. von 5,2 Fuss = 62,4 Zoll zugeschrieben, also einen 2,4 Mal grösseren als der von mir aus der Uebereinstimmung beider Reihen abgeleitete. Die Ursache des grossen Unterschiedes der beiden Bestimmungen ist vorzugsweise darin zu suchen, dass Sawitsch einen zu grossen Werth der Unsicherheit der Refractionsconstante für jede Bestimmung annimmt, nemlich $A\rho = 0,032C$, wenn C die in Bogentheilen ausgedrückte Entfernung des Objects vom Standort bezeichnet. Ausserdem aber liegt es in dem Princip

der Messung aus einem mittleren Standorte, dass der Höhenunterschied zweier in nahezu gleicher Entfernung gesehenen Objecte bedeutend genauer wird, als die einzelnen Höhen in Bezug auf den Standort. Der von mir gegebene w. F. berücksichtigt diesen Umstand von selbst, während er bei Sawitsch's Bestimmung vernachlässigt ist.

Das gegenseitige Verhalten der beiden Reihen (F) und (S) übersieht man am besten, wenn man aus je 10 benachbarten Höhen jeder Reihe das Mittel nimmt, und hieraus Mittelwerthe ($S-F$) ableitet. So bin ich zu folgenden Zahlen gekommen :

aus P^5 bis P^{12}	für P^8	($S-F$)	Wahrsch. Werth
		— 6,5 Zoll	— 8,0 Zoll
P^{15} „ P^{22}	„ P^{18}	— 6,8 „	13,4 „
P^{25} „ P^{32}	„ P^{28}	— 4,9 „	17,2 „
P^{35} „ P^{42}	„ P^{38}	+ 3,2 „	20,3 „
P^{45} „ P^{52}	„ P^{48}	+ 7,4 „	22,9 „
P^{55} „ P^{62}	„ P^{58}	+ 27,9 „	25,3 „
P^{65} „ P^{72}	„ P^{68}	+ 30,9 „	27,5 „
P^{75} „ P^{82}	„ P^{78}	— 6,7 „	29,5 „
P^{85} „ P^{92}	„ P^{88}	— 13,0 „	31,2 „
P^{95} „ P^{102}	„ P^{98}	+ 14,3 „	33,2 „
P^{105} „ P^{112}	„ P^{108}	+ 17,6 „	34,8 „
P^{115} „ P^{125}	„ P^{118}	+ 12,2 „	36,6 „
	„ P^{124}	+ 0,2 „	37,7 „

Es sind demnach die beobachteten ($S-F$) in diesen Mitteln 11 Mal kleiner und nur 2 Mal grösser als ihre wahrscheinlichen Werthe. Die beiden Reihen bieten also in ihrem ganzen Verlaufe eine sehr befriedigende Uebereinstimmung dar, und nirgends ist eine ungewöhnliche Häufung der Fehler angedeutet. Der verhältnissmässig starke Sprung in ($S-F$) von P^{68} bis P^{78} fällt der erwähnten Ungunst des Augustmonats zur Last.

§ 27.

In seiner Untersuchung der Strahlenbrechung, Seite 271, hat Sabler den w. F. einer bei *sehr ruhigem* Zustande der Bilder beobachteten Zenithdistanz, die Unsicherheit der Strahlenbrechung mitgerechnet, gegeben, und zwar

$$\begin{aligned} \epsilon &= 2,06 \text{ für einen beobachteten Basispunkt, } \text{Log } \epsilon = 0,3139, \\ \epsilon &= 2,40 \text{ „ „ „ „ Signalpunkt, } \text{Log } \epsilon = 0,3802. \end{aligned}$$

Wenden wir diese Werthe an, so wird, wenn D die Entfernung des Objects vom Beobachter ist :

der w. F. der Höhe gleich $\epsilon \cdot D \cdot \sin 1''$, für einen Satz bei ruhigem Bilde oder mit dem Gewicht 1.

Die relativen Gewichte der Sätze, nach den verschiedenen Zuständen der Bilder, finden sich ebendasselbst. Mit diesen Hilfsmitteln ist es nun ein leichtes für jeden einseitigen Höhenunterschied, der in der Zu-

sammenstellung Seite 272 u. f. vorkommt, den w. F. zu ermitteln. Wählen wir als Beispiel die Beobachtungen in p^{21} , vom 21. April 1837, S. 279. Von den 4 Objecten sind B^{20} und β^{21} in 3 Sätzen, welche die Bezeichnung I *fast ruhig*, I *fast ruhig* und II *ruhig* haben, beobachtet. Für das Mittel wird hier das Gewicht = $0,5 + 0,5 + 0,9 = 1,90$ gefunden. Mit Anwendung der im Texte gegebenen Log $D. \sin 1''$ haben wir :

$$\text{Log. } d\beta^{21} = (0,3139 + 9,8535 - \text{Log. } \sqrt{1,90}) = 0,0867; d\beta^{21} = 1,07 \text{ Zoll.}$$

$$\text{Log. } dB^{20} = (0,3139 + 9,8500 - \text{Log. } \sqrt{1,90}) = 0,0832; dB^{20} = 1,06 \text{ «}$$

$$\text{Folglich } d(\beta^{21} - B^{20}) = \sqrt{(1,07^2 + 1,06^2)} = 1,50 \text{ Zoll} = f.$$

Auf gleichem Wege findet sich für die in 2 Sätzen vorkommenden P^{22} und P^{20}

$$d(P^{22} - P^{20}) = 5,1 \text{ Zoll} = f.$$

Die erste Zahl 1,50 steht als w. F. in Tafel I, Seite xxxviii, neben B^{20} , die andere 5,1 neben P^{20} in Tafel II, Reihe (Σ'''), Seite xxxix. Auf ähnliche Weise sind alle in diesen beiden Tafeln gegebenen w. F. der drei Reihen (Σ'), (Σ'') und (Σ''') berechnet worden. Diese Bestimmung der w. F. für alle einzelnen Glieder jeder Kette gewährt den grossen Vortheil, dass man eine vollständige Einsicht der Zuverlässigkeit der Reihe in allen ihren Theilen erhält. So bietet namentlich die Reihe (Σ') der Tafel I eine merkwürdige Sicherheit in allen ihren Gliedern dar. Im Mittel genommen finden wir den w. F. eines der 122 Intervalle gleich 1,886 Zoll, und es kommen nur 3 Fälle vor, wo der besondere w. F. das doppelte dieses Mittelwerths übersteigt, für $B^8 - B^7$, $B^{18} - B^{17}$ und $\beta^{68} - \beta^{67}$, bei welchen die w. F. 6,1, 4,0 und 5,0 Zoll befunden werden. Der w. F. einer jeden absoluten Höhe über dem Meere, in dieser Reihe, findet sich nun ganz einfach durch $\sqrt{(\Sigma f^2)}$, indem das Summenzeichen sich auf alle f bis zu diesem Punkte bezieht. Für den Endwerth $K = -1009,9$ Zoll ist von mir $\Sigma f^2 = 513,9$ gefunden, woraus dessen in Tafel II angegebener w. F. = 22,67 Zoll sich ergibt. Wollten wir ihn aus dem Mittelwerth für ein einzelnes Intervall, der sich = 1,886 Zoll findet, ableiten: so käme $1,886 \cdot \sqrt{122} = 20,82$ Zoll heraus. Aber ein auf diese letzte Weise gefundener Fehler wird immer zu klein, weil $(a+x)^2 + (a-x)^2 = 2a^2 + 2x^2 > 2a^2$, und überhaupt, für n Fehler, $(a+x)^2 + (a+y)^2 + \dots + (a-x-y\dots)^2$ immer um die Summe der $n-1$ Quadrate von x, y, \dots grösser als na^2 wird, wie auch die Vorzeichen von x und y sein mögen. Sabler hat, S. 318, aus dieser Ursache auch seinen zu kleinen Fehler 19,60 Zoll erhalten.

Die wahrscheinlichen Fehler der Intervalle in den Reihen (Σ'') und (Σ''') mussten aus dreifachem Grunde bedeutend grösser sein als die in (Σ'): weil die Entfernungen doppelt so gross sind, weil einer Zenithdistanz in einem Normalsatz mit dem Gewichte 1 der w. F. $2''40 > 2''06$ zukommt, endlich weil in der Regel weniger Sätze der Hauptsignale beobachtet worden sind. Dafür ist aber die Anzahl der Glieder dieser Reihen (Σ'') und (Σ''') nur halb so gross, als für (Σ'). Der Mittelwerth des w. F. für ein einzelnes Intervall findet sich für (Σ'') gleich 4,991, für (Σ''') gleich 4,667 Zoll, und hieraus leiten sich, für's Endresultat K , die w. F. 39,92 und 37,34 Zoll ab, beide nothwendig etwas zu klein. Durch die Summirung der Quadrate der besondern w. F. ergibt sich genauer: der w. F. für K gleich 44,32 Zoll in (Σ''), und gleich 40,16 Zoll in (Σ'''), wie sie in Tafel II angegeben sind.

§ 28.

Um eine bessere Einsicht von dem gegenseitigen Verhalten aller 5 Reihen zu bekommen, werde ich die Zahlen derselben, mit den aus ihrer Vereinigung späterhin abgeleiteten letzten Werthen Q vergleichen und wiederum, wie früher, die Unterschiede zu 14 Mitteln vereinigen, aus welchen die zufälligen Unregelmässigkeiten fast gänzlich verschwunden sein müssen. Auf diesem Wege habe ich folgende Zahlen erhalten :

	$F-Q$	$S-Q$	$\Sigma'-Q$	$\Sigma''-Q$	$\Sigma'''-Q$
für P^1	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0 Zoll
P^8	+ 6,8	+ 0,2	+ 1,0	- 7,3	- 3,0 "
P^{18}	+26,1	+19,3	- 7,9	-23,5	-10,1 "
P^{28}	+41,1	+36,2	-17,8	-27,7	-14,8 "
P^{38}	+26,5	+29,7	- 6,1	-11,5	-22,0 "
P^{48}	+18,0	+25,4	- 7,9	+ 6,1	-28,2 "
P^{58}	+ 7,4	+35,3	- 6,8	+ 1,9	-25,1 "
P^{68}	+ 2,8	+33,8	- 9,8	+12,1	-21,0 "
P^{78}	+ 6,2	- 0,5	+ 4,7	+30,4	-27,6 "
P^{88}	- 5,7	-18,7	+15,2	+62,8	-29,0 "
P^{98}	-26,8	-12,5	+19,0	+62,8	-23,2 "
P^{108}	-24,7	- 7,0	+17,0	+50,8	-21,1 "
P^{118}	-26,7	-14,5	+17,8	+58,5	-21,4 "
P^{124}	-26,0	-25,5	+16,8	+66,1	-25,4 "

In jeder Reihe dieser Zahlen spricht sich ein regelmässiger Gang aus. Die einzigen zwei etwas auffallenden Sprünge sind in $S-Q$ zwischen P^{68} und P^{78} und in $\Sigma''-Q$ zwischen P^{78} und P^{88} . Beide fallen auf den, wie schon erwähnt, ungünstigsten Augustmonat. Die beiden letzten Reihen für (Σ'') und (Σ''') gehen dagegen, von P^{48} an, nach entgegengesetzten Seiten vom Mittel aus einander, und deuten dadurch entschieden darauf hin, dass sie sich als reciproke Reihen gegenseitig compensiren.

§ 29.

Die am Schluss der Tafel II gegebenen Werthe für den Unterschied der beiden Meere K

aus der Reihe (F), $K = -1052,7$ Zoll mit dem w. F. 26,51 Zoll,

" " " (S) = -1052,2 " " " " " 26,51 "

" " " (Σ') = -1009,9 " " " " " 22,67 "

" " " (Σ'') = - 960,6 " " " " " 44,32 "

" " " (Σ''') = -1051,1 " " " " " 40,16 "

geben, nach ihren w. F. vereinigt, einen Mittelwerth

$$A = 1030,55 \text{ Zoll mit dem w. F. } 12,90 \text{ Zoll.}$$

Dieser w. F. = 12,90 Zoll ist aus den w. F. der 5 ihm zum Grunde liegenden Bestimmungen gefunden. Wenn wir diese w. F. der einzelnen Bestimmungen aber nur zur Angabe ihrer relativen Gewichte an-

wenden, und dann den w. F. des Resultats A aus den Abweichungen der einzelnen 5 Werthe vom Resultate ableiten, so findet sich dieser w. F. 9,96 Zoll, also kleiner; und es ergibt sich, dass die 5 einzelnen unabhängigen Bestimmungen genauer übereinstimmen als nach ihren individuellen w. F. zu erwarten war.

§ 30.

Es ist aber leicht einzusehen, dass die obige Verbindung der 5 Werthe nicht diejenige ist, die zum zuverlässigsten Resultate führt. Es sind nemlich die in der Reihe (Σ') erhaltenen Beobachtungen genau die reciproken der in den beiden Reihen (F) und (S) benutzten, und zwar so, dass sie für die Hälfte sogar gleichzeitig waren, für die andere Hälfte ebenfalls reciprok, aber um einen Tag in der Beobachtungszeit abliegend, wobei auch in dieser Hälfte fast ganz genau dieselbe Tagesstunde der beiderseitigen Beobachtungen obwaltet. Dasselbe gilt für die beiden Reihen Σ'' und Σ''' ; sie sind reciprok um genau einen Tag von einander abstehend. Diese Reciprocität darf nicht vernachlässigt werden. Hierauf begründet sich folgendes Verfahren.

1. Die Reihen (S) und (F) sind zu einem einzigen Resultate zu vereinigen. Dieses wird

$$\frac{F+S}{2} = M = -1052,45 \text{ Zoll, mit dem w. F. } \frac{26,51}{\sqrt{2}} = 18,75 \text{ Zoll.}$$

2. Dies M ist mit dem ihm reciproken Werthe aus Σ' so zu vereinigen, dass wir daraus einen Endwerth erhalten:

$$B = \frac{M+\Sigma'}{2} = -1031,17 \text{ Zoll, mit dem w. F. } = \frac{1}{2} \sqrt{(18,75^2 + 22,67^2)} = 14,71 \text{ Zoll.}$$

3. Ebenso sind die Reihen Σ'' und Σ''' zu combiniren, und aus ihnen findet sich:

$$C = \frac{\Sigma''+\Sigma'''}{2} = -1006,35 \text{ Zoll, mit dem w. F. } = \frac{1}{2} \sqrt{(44,32^2 + 40,16^2)} = 29,90 \text{ Zoll.}$$

Diese beiden Werthe sind also, der erste B das Ergebniss aus der Gesamtheit der durch die kürzeren Abstände gehenden Messungen dreier Beobachter, der zweite C dasjenige, welches auf den von Sabler allein ausgeführten Messungen aus der doppelten Entfernung beruht. Werden B und C zu einem Werthe, nach den w. F., vereinigt, so erhält man als Endwerth:

$$D = -1026,33 \text{ Zoll, mit dem w. F. } 13,18 \text{ Zoll.}$$

Der w. F. = 13,18 Zoll dieses D ist grösser als 12,90 Zoll, der des früheren Werthes A in § 29. Dies erklärt sich dadurch, dass, bei der Ableitung des w. F. für D , der Vortheil, den das erst bei ihm angewandte Princip der Reciprocität für die Genauigkeit des Resultats gewährt haben muss, noch nicht in Betracht gezogen ist.

§ 31.

Auch abgesehen von der Wirkung der Reciprocität, sind schon allein in Betracht der fast durchweg angewandten Messung aus der Mitte die in Tafel II angegebenen w. F. der Reihen (Σ' , (Σ'') und (Σ''')) zu gross. Diese sind nemlich aus den w. F. der isolirten Zenithdistanzen abgeleitet, ohne die Verminderung zu berücksichtigen, welche in Folge der Messung aus der Mitte für den Höhenunterschied der correspondirenden Objecte bei diesen Reihen, eben sowohl als bei den Reihen (F) und (S), eintreten musste. Wie bedeutend aber die Messung aus der Mitte auf die Genauigkeit eingewirkt hat, lässt sich bei diesen beiden Reihen genau numerisch entwickeln.

Es sind oben von mir die aus der Vergleichung der beiden Reihen folgenden 120 verschiedenen $u'' - u'$ gegeben worden. Schliesst man die ersten 11 aus, bei welchen die von P^{12} an befolgte Anordnung, dass Sawitsch genau an demselben Punkte einen Tag später beobachtete als Fuss, noch nicht stattfand, indem beide bis dahin die Endpunkte derselben Basis gleichzeitig zu Standpunkten hatten, so bleiben ihrer 109, für welche nicht nur die u'' und u' , sondern auch die isolirten Höhen der einzelnen Reihen vergleichbar sind, so dass deren Unterschiede, $h'' - h'$ für das eine Object, und $i'' - i'$ für das andere, gefunden werden können, wobei $(u'' - u') = (i'' - i') - (h'' - h')$ ist.

Wir finden z. B. nach Seite 351 und 324, dass in b^{13} im Mittel gefunden ist

am 8. April von Fuss	$h' = + 98,1$	$i' = + 53,3$	$u' = - 44,9$ Zoll.
« 9. « « Sawitsch	$h'' = + 100,7$	$i'' = + 64,2$	$u'' = - 36,5$ «
folglich	$h'' - h' = + 2,6$	$i'' - i' = + 10,9$	$u'' - u' = + 8,3$ «

Die 108 Mal so gefundenen Grössen führten zu folgenden Ergebnissen :

1. Die $\Sigma (h'' - h')$ ist $+ 386,0$ Zoll, die $\Sigma (i'' - i')$ ist $+ 397,4$ Zoll. Dies zeigt an, dass Sawitsch durchschnittlich die isolirten Höhen grösser erhielt als Fuss um $\frac{+ 386,0}{109} = + 3,54$ Zoll nach den hintern, um $\frac{+ 397,4}{109} = + 3,65$ Zoll nach den vordern Objecten, im Mittel aus 218 Bestimmungen um $k = + 3,60$ Zoll. Ein solcher constanter Unterschied muss statt finden, wenn die beiden angewandten Instrumente verschiedene Biegungscoefficienten haben, und es ergibt sich hieraus $b'' - b' = - 3,60 : 0,68 = - 5,29$. Aus einer ganz andern Untersuchung haben wir oben, Seite xxviii, $b'' - b' = - 3,58$ gefunden. Diese beiden Werthe lassen über das Zeichen von $b'' - b'$ keinen Zweifel nach, und geben im Mittel $b'' - b' = - 4,44$, der bis auf etwa eine Secunde sicher sein mögte. Der Unterschied der beiden gefundenen Werthe erklärt sich nemlich, bei dem ersten, aus der Unsicherheit, die in der Bestimmung des Höhenunterschiedes $P^{14} - P^{124}$ sein kann, und bei dem zweiten daraus, dass in den 3,60 Zoll die Wirkung einer von Fuss im allgemeinen etwas stärkeren, bei der Berechnung der einzelnen Höhen angewandten Refraction enthalten ist, indem seine Beurtheilung namentlich des Zustandes der Ruhe der Bilder etwas von der, die Sawitsch hatte, verschieden war. Wäre dieser Umstand nicht, so gebührte dem $b'' - b' = - 5,29$ entschieden der Vorzug, da der constante Unterschied von 3,6 Zoll nur einem w. F. von 0,27 Zoll unterliegt, dem ein w. F. von 0,40 in $b'' - b'$ entspricht.
2. Zieht man von allen $h'' - h'$ und $i'' - i'$ den constanten Werth $+ 3,60$ ab, so ergeben sich neue Werthe, die ich mit p und q bezeichnen will. Nun fand ich $\Sigma(p^2) = 3893$, $\Sigma(q^2) = 3757$, und endlich $\Sigma(u'' - u')^2 = 2880$. Hätte die Messung aus der Mitte keine Compensation der Höhenbestimmungen nach beiden Seiten hervorgebracht, so würde $\Sigma(p^2) + \Sigma(q^2) = \Sigma(u'' - u')^2$ sein. Jetzt ist aber gefunden $\Sigma(p^2) + \Sigma(q^2) = 7650$, $\Sigma(u'' - u')^2 = 2880$, welche beide Zahlen sich wie 8,0 : 3,012 verhalten. Es ergibt sich hieraus, dass die Messung aus der Mitte das Gewicht der Höhenunterschiede u im Verhältniss $1 : 2\frac{2}{3}$, in den beiden Reihen (F) und (S), oder die Genauigkeit im Verhältniss $1 : 1,633$ gesteigert hat. Diese Steigerung ist einzig einer Elimination der Unsicherheit der bei der Berechnung ange-

wandten Refraction zuzuschreiben, indem diese Unsicherheit für die 2 nahezu gleich weit entfernten Objecte sich desto vollständiger aufhebt, je gleicher die Verhältnisse sind, unter denen der Lichtstrahl sich, auf seinem Wege von beiden Objecten zum Instrumente, gegen den Boden befindet.

§ 32.

Wir sind daher berechtigt anzunehmen, dass eine ähnliche Compensation auch für die 3 Reihen Sabler's statt gefunden hat. Sie ist aber bestimmt kleiner gewesen, weil Sabler zu einer genaueren Kenntniss der Refraction gelangt war, als die beiden andern Mitarbeiter, und daher jedesmal richtigere Coefficienten anwandte. Ich entschied mich daher die Genauigkeit des Resultats aus der Reihe (Σ') nicht im Verhältniss $1 : \sqrt{2} \frac{2}{3}$, sondern wie $1 : \sqrt{1,5}$, die der beiden Reihen Σ'' und Σ''' wie $1 : \sqrt{2}$ zu steigern, oder die w. F. der dritten unter den 5 Reihen mit $\sqrt{1,5}$, und der 4ten und 5ten mit $\sqrt{2}$ zu dividiren. Hiedurch habe ich eine verhältnissmässig stärkere Compensation, durch die Beobachtung aus der Mitte, bei den Hauptsignalen als bei den Basispuncten für Sabler angenommen, weil die Strahlenbrechung in den höheren über dem Erdboden laufenden Gesichtslinien geringeren Unregelmässigkeiten unterworfen ist. Dass ich damit eher zu wenig als zu viel gethan habe, bin ich fest überzeugt, und werde es nachher noch näher erörtern. Ich lege also jetzt der folgenden Berechnung nachstehende Zahlenwerthe zum Grunde :

aus der Reihe (F),	$K = -1052,7$	Zoll,	mit dem w. F.	26,51	Zoll,
“ “ “ (S),	$= -1052,2$	“ “ “ “	“ “ “ “	26,51	“
“ “ “ (Σ'),	$= -1009,9$	“ “ “ “	“ “ “ “	18,94	“
“ “ “ (Σ''),	$= -960,6$	“ “ “ “	“ “ “ “	31,34	“
“ “ “ (Σ'''),	$= -1052,1$	“ “ “ “	“ “ “ “	28,40	“

Hiermit ergibt sich wieder, indem nur die Gewichte von B und C sich gegen früher ändern :

$$B = 1031,17, \text{ mit dem w. F. } 13,32 \text{ Zoll,}$$

$$C = 1006,35, \text{ “ “ “ “ } 21,15 \text{ “ ;}$$

und aus der Verbindung von B und C jetzt

$$D' = -1024,12 \text{ Zoll, mit dem w. F. } = 11,27 \text{ Zoll.}$$

Die beiden gänzlich unabhängigen Werthe B und C stimmen auch hier genauer überein, als die w. F. anzeigen. Wenn wir nemlich wiederum aus der Uebereinstimmung der beiden Werthe B und C den w. F. für D' ableiten, so findet sich dieser nur 7,46 Zoll. Dies war zu erwarten, da in den zuletzt gegebenen w. F. der 5 Reihen zwar nunmehr die durch die Messung aus der Mitte bewirkte Compensation berücksichtigt wurde, dagegen die von der Reciprocität zwischen (M) und (Σ') und zwischen (Σ'') und (Σ''') herrührende nicht mit in Rechnung gezogen ist.

§ 33.

Es lässt sich hier aber die Bemerkung machen, dass die Uebereinstimmung der beiden Hauptwerthe B und C am Schluss der ganzen Arbeit eine zufällige sein kann; und es fragt sich, ob eine gleich genügende Annäherung solcher Werthe $B = \frac{\frac{1}{2}(F+S) + \Sigma'}{2}$, und $C = \frac{\Sigma'' + \Sigma'''}{2}$ auch während des ganzen Verlaufs der Operation statt findet. Um hierüber zu entscheiden habe ich die ganze Operationslinie zwischen P^1 und P^{121} in 24 Theile zerlegt, deren jeder 5 Stationen fasst und im Mittel einem horizontalen Abstand

von 33,4 Werst entspricht; und suche nunmehr nach einander die Höhen der Punkte P^1 , P^6 , Endpunkt 1836, P^{16} u. s. w. bis P^{121} , sowohl nach B als nach C . Die Ableitung der C geschah hier folgender Weise. Für P^6 z. B. fand sich der Werth Σ''' direct gegeben = 854,7; aber nicht der Werth Σ'' . Dieser ist dagegen für P^5 und P^7 vorhanden. Nun findet sich für P^5 , $\Sigma'' = Q - 7,1$, für P^7 aber $\Sigma'' = Q - 10,7$, wo Q wieder, wie in § 28, den definitiven Werth der Höhe des Punctes nach Tafel III. § 38 bedeutet. Hiervon ist das Mittel $\Sigma'' = Q - 8,9$ für P^6 , folglich $\Sigma'' = 852,4 - 8,9 = 843,5$; und für P^6 wird endlich $C = \frac{1}{2}(854,7 + 843,5) = 849,1$. Die ersten Columnen der nachstehenden Uebersicht geben die B und C . Dann folgen die aus denselben abgeleiteten U und U' , und $U' - U$. Die letzte Columne gibt endlich das Quadrat des w. F., φ^2 , der jedem $U' - U$ zukommt, das dadurch gebildet ist, dass $\varphi^2 = f^2 + f'^2$, wenn f und f' die in den Reihen B und C dem U und U' zugehörigen w. F. sind, nachdem die Reduction derselben durch die Division mit $\sqrt{1,5}$ für (Σ') und mit $\sqrt{2}$ für (Σ'') und (Σ''') vorgenommen war.

	$B =$	$C =$	$U =$	$U' =$	$U' - U$	Quadrat des w. F. von $U' - U$
					Zoll.	$\varphi^2 =$
P^1	146,0	146,0				
P^6	855,8	849,1	+ 709,8	+ 703,1	- 6,7	19,33
Endp. 1836	1210,2	1197,0	+ 354,4	+ 347,9	- 6,5	58,38
P^{16}	4067,3	4045,7	+ 2857,1	+ 2848,7	- 8,4	21,07
P^{21}	4592,4	4563,0	+ 525,1	+ 517,3	- 7,8	27,76
P^{26}	3810,9	3778,1	- 781,5	- 784,9	- 3,4	17,94
P^{31}	2327,3	2297,1	- 1483,6	- 1481,0	+ 2,6	16,48
P^{36}	5370,8	5335,6	+ 3043,5	+ 3038,5	- 5,0	16,05
P^{41}	6881,9	6859,0	+ 1511,1	+ 1523,4	+12,3	29,25
P^{46}	18773,7	18756,8	+11891,8	+11897,8	+ 6,0	22,61
P^{51}	12916,4	12897,2	- 5857,3	- 5859,6	- 2,3	15,97
P^{56}	12463,0	12437,7	- 453,4	- 459,5	- 6,1	17,25
P^{61}	20410,9	20397,2	+ 7947,9	+ 7959,5	+11,6	26,10
P^{66}	11678,1	11669,1	- 8732,8	- 8728,1	+ 4,7	18,77
P^{71}	10250,3	10240,1	- 1427,8	- 1429,0	- 1,2	24,76
P^{76}	12967,2	12965,9	+ 2716,9	+ 2725,8	+ 8,9	44,72
P^{81}	8530,5	8531,2	- 4436,7	- 4434,7	+ 2,0	34,40
P^{86}	6286,6	6305,3	- 2243,9	- 2225,9	+18,0	29,42
P^{91}	5223,6	5236,2	- 1063,0	- 1069,1	- 6,1	23,67
P^{96}	3807,4	3825,2	- 1416,2	- 1411,0	+ 5,2	18,68
P^{101}	3542,2	3563,2	- 265,2	- 262,0	+ 3,2	16,51
P^{106}	2170,2	2184,9	- 1372,0	- 1378,3	- 6,3	28,20
P^{111}	209,8	223,8	- 1960,4	- 1961,1	- 0,7	11,21
P^{116}	-299,0	-282,0	- 508,8	- 505,8	+ 3,0	38,89
P^{121}	-439,3	-420,4	- 140,3	- 138,4	+ 1,9	30,14

Berechnet man nun für jede horizontale Linie

$$\lambda^2 = (0,6745 \cdot (U' - U))^2 : \varphi^2,$$

so erhält man $\Sigma \lambda^2 = 21,04$, folglich als Mittelwerth $\lambda^2 = 21,04 : 24 = 0,877$. Es ergibt sich also, dass die gegebenen 24 Werthe B und C , nach dieser Untersuchung, im Mittel bedeutend genauer übereinstimmen, als die schon reducirten w. F. $= \varphi$ anzeigen. Hierdurch ist der Beweis geführt, dass in Folge der oben angeführten Reduction, durch die Division mit $\sqrt{1,5}$ für (Σ') , und durch die mit $\sqrt{2}$ für (Σ'') und (Σ''') , die w. F. nicht zu klein geworden sind, dass sie vielmehr entschieden noch zu gross, und um der Uebereinstimmung beider Reihen zu entsprechen, noch mit dem Coefficienten $\lambda = \sqrt{0,887} = 0,942$ zu multipliciren sind. Geschieht dies, so wird der Endwerth unserer bisherigen Untersuchung

$$K = -1024,1 \text{ Zoll mit dem w. F. } 11,27 \cdot 0,942 = 10,62 \text{ Zoll.}$$

§ 34.

Der im vorigen § 33 gegebene Werth für K ist indess noch nicht der eigentliche Endwerth, den unsere Arbeit liefert. Es ist nemlich leicht einzusehen, dass durch die bis zum Ende getrennte Fortführung der 5 Reihen ein Verlust an Genauigkeit hervorgerufen wird, der vermieden werden kann und muss. Wäre die Operation so geführt, dass jeder Beobachter, zwar von denselben Standpuncten aus, aber nach besonderen Höhenmarken gezielt hätte, ohne für jeden Punct die zur verticalen Centrirung erforderlichen Grössen gemessen zu haben: so würde kein anderer Weg, als der bisherige, zur Erlangung des Resultats zu wählen sein. Jetzt aber, wo die verschiedenen Reihen durch dieselben Zielpuncte gehen, kann das zuverlässigste Resultat nur dadurch erhalten werden, dass jeder Theilwerth $V^n = P^{n+1} - P^n$ aus der sofortigen Vereinigung aller ihn bestimmenden Operationen abgeleitet, und der gesuchte Werth von $P^{124} - P^1$ durch eine einzige Reihe

$$U = V^1 + V^2 + \dots + V^{122} + V^{123}$$

ermittelt werde, wobei der w. F. von U aus der Verbindung der den einzelnen V zugehörigen w. F. folgt. Die Richtigkeit dieser Behauptung ergibt sich aus folgender einfachen Betrachtung. Gesetzt wir hätten in 2 unabhängigen Reihen bestimmt:

in I	in II
$x = a$, mit dem (w. F.) ² = α ,	$x = c$, mit dem (w. F.) ² = γ ,
$y = b$, " " " " = β ,	$y = d$, " " " " = δ :

so findet sich

aus I,	$x + y = a + b$, mit dem (w. F.) ² = $\alpha + \beta$,
aus II,	$x + y = c + d$, " " " " = $\gamma + \delta$;

und durch deren Vereinigung

$$X = x + y = \frac{(a+b)(\gamma+\delta) + (c+d)(\alpha+\beta)}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}, \text{ mit dem (w. F.)}^2 = \frac{(a+\beta) \cdot (\gamma+\delta)}{\alpha+\beta+\gamma+\delta} = \varphi^2.$$

Vereinigt man aber sofort beide Werthe von x , und ebenso die von y , so erhält man

aus I und II	$x = \frac{a\gamma + ca}{\alpha + \gamma}$, mit dem (w. F.) ² = $\frac{\alpha\gamma}{\alpha + \gamma}$,
" " " "	$y = \frac{b\delta + d\beta}{\beta + \delta}$, " " " " = $\frac{\beta\delta}{\beta + \delta}$;

deren Vereinigung gibt:

$$X' = x + y = \frac{a\gamma + ca}{a + \gamma} + \frac{b\delta - d\beta}{\beta + \delta}, \text{ mit dem (w. F.)}^2 = \frac{a\gamma}{a + \gamma} + \frac{\beta\delta}{\beta + \delta} = \varphi'^2.$$

Die beiden Werthe X und X' , so wie die ihnen entsprechenden (w. F.)², φ^2 und φ'^2 , sind aber verschieden, denn es findet sich

$$X - X' = \frac{((a - c)(\beta + \delta) - (b - d)(a + \gamma)) \cdot (\alpha\delta - \beta\gamma)}{(\alpha + \beta + \gamma + \delta)(\alpha + \gamma) \cdot (\beta + \delta)},$$

$$\varphi^2 - \varphi'^2 = \frac{(\alpha\delta - \beta\gamma)^2}{(\alpha + \beta + \gamma + \delta) \cdot (\alpha + \gamma) \cdot (\beta + \delta)}.$$

$X - X'$ wird null, wenn $a = c$ und $b = d$, aber auch wenn $\alpha\delta = \beta\gamma$. In diesem einzigen Falle ist auch $\varphi^2 - \varphi'^2 = 0$, welcher Unterschied sonst immer positiv bleibt, woraus folgt dass $\varphi^2 > \varphi'^2$. Man übersieht, dass dieser Satz sich auf jede Zahl von Reihen und Gliedern ausdehnen lässt.

Der Vorzug des zweiten Verfahrens besteht offenbar darin, dass wenn in einer Reihe ein schwaches Glied ist, d. h. ein solches, das mit einem grossen w. F. behaftet ist, dieser grosse Fehler nicht auf alle nachfolgenden Werthe seinen ganzen Einfluss bleibend äussert, sondern sofort durch die Verbindung mit dem entsprechenden Werthe aus den andern Reihen so zu sagen verbessert wird. Ja es wird das zweite Verfahren das einzig mögliche, wenn in einer der Reihen ein Glied ganz fehlte.

§ 35.

Es bleibt mir also noch übrig dies vorzüglichere Verfahren auf die Data, die unsern 5 Reihen zum Grunde liegen, anzuwenden, wobei aber so gerechnet werden muss, dass die beiden Principe der Messung aus der Mitte und der Reciprocität streng beibehalten werden, d. h. dass man für jeden Theilwerth $P^{n+1} - P^n$ erst F und S zu einem Mittelwerth $= M$ vereinigt, dann $B = \frac{M + \Sigma'}{2}$ sucht, darauf $C = \frac{\Sigma'' + \Sigma'''}{2}$, und nun B und C vereinigt. Ich stelle hier folgende Punkte, die mein Verfahren genau kennen lehren, zusammen.

1. Zuvörderst ist noch zu beachten, dass ich bisher $M = \frac{F + S}{2}$ gesetzt habe, jetzt aber F und S zu einem Mittel mit Berücksichtigung der Gewichte beider Bestimmungen vereinigen werde, was genauer ist, so wie die Gewichte der beiden Bestimmungen ungleich sind. Es ist z. B. $P^{24} - P^{25}$ von Fuss $= -936,3$ Zoll aus 3 Sätzen gefunden, denen zusammen das relative Gewicht 16 zukommt; von Sawitsch $= -929,0$ Zoll, auch in 3 Sätzen bei ungünstigeren Bildern, die nur ein Gewicht $= 7,0$ geben. Das arithmetische Mittel wäre hier $-932,6$, wofür jetzt nach den Gewichten $-934,1$ folgt. Es fand sich indess, dass die Gewichte bei Fuss im allgemeinen gegen Sawitsch etwas zu gross angegeben sind, indem bei ersteren die Characteristik des Bildes *ruhig* offenbar einen weiteren Umfang hatte. Eine sorgfältige Untersuchung führte dahin, die Gewichte nach Fuss Angaben, so wie mehr als ein einziger ruhiger Satz beobachtet war, um $\frac{1}{8}$ zu verkleinern. In unserm Beispiele wird daher aus 16 jetzt 13, und das Mittel $-933,7$ mit dem relativen Gewichte $= 20$, oder so gut als beruhend auf $g = 20 : 8 = 2,5$ Normalsätzen, deren jedem das relative Gewicht 8 zukommt.

Diese Berücksichtigung der Gewichte in den Reihen (F) und (S) führte zu einer schärfern Untersuchung der Genauigkeit dieser Reihen, indem nunmehr die Gewichte zugezogen wurden, bei welcher

wieder von den in Tafel II, Seite xxxix, gegebenen $u'' - u'$ ausgegangen werden musste. Es ergab sich dass, für die mittlere Entfernung, in einem Normalsatz, dem das relative Gewicht 8 zukommt, der w. F. des durch ihn bestimmten u gleich 2,80 Zoll ist. Da ferner durchschnittlich jedes u von den einzelnen Beobachtern so gut bestimmt war, als wenn es auf 1,606 Normalsätzen beruhte, so folgt der w. F. eines u in jeder der beiden Reihen $= 2,80 : \sqrt{1,606} = 2,21$ Zoll. (Wir hatten oben, Seite XLIII, ohne die Gewichte zu berücksichtigen, dafür 2,40 Zoll gefunden). Dem jetzigen w. F. von 2,80 für ein aus einem einzigen Normalsatze abgeleitetes u , der sich auf den mittleren Abstand der Objecte bezieht, entspricht ein w. F. von 2,90 in der aus einem Normalsatz gefolgerten Zenithdistanz. Da nun, nach Seite xx, der w. F. der Messung selbst beim Theodoliten 1,60 beträgt: so bleibt für die Refraction $\sqrt{(2,90^2 - 1,60^2)} = 2,42$ übrig. So viel beträgt also der von der Strahlenbrechung herführende w. F. einer von Fuss oder Sawitsch aus der Mitte in einem Normalsatz beobachteten Zenithdistanz eines der beiden Objecte. Vergleiche § 16. Durch die Kenntniss des Winkelwerths 2,90 sind wir nunmehr auch im Stande bei der Bestimmung der w. F. in jedem einzelnen Falle die Entfernungen der Objecte vom Standpuncte zu berücksichtigen. Ist nemlich durch die Vereinigung der beiden Reihen (F) und (S) ein M mit dem absoluten Gewichte g gegeben, und sind die beiden Entfernungen D und D' ; so ist für das eine Object der w. F. der Höhe $f = D \cdot \sin 2,90 : \sqrt{g}$, für das andere $f' = D' \cdot \sin 2,90 : \sqrt{g}$, und für M daraus $\varphi = \sqrt{(f^2 + f'^2)}$. In unserm Beispiel $P^{24} - P^{25}$ findet sich $f = 0,99$, $f' = 2,09$, $\varphi = 2,26$ Zoll, oder $\varphi^2 = 5,09$.

2. Wegen der durch die Messung aus der Mitte herbeigeführten Compensation sind auch jetzt, in den Reihen Σ' , Σ'' und Σ''' , die ursprünglichen (w. F.)² respective mit 1,5 und 2,0 dividirt worden, nach § 32, Seite XLIX. Wir finden aber unter den 121 Intervallen von P^2 bis P^{125} , dass in 8 derselben eine oder die andere Beobachtung zur strengen Vollständigkeit fehlt. In einem solchen Falle ist die Messung aus der Mitte partiell nicht vorhanden, und auch die Reciprocität nicht vollständig. Aus dem ersten Grunde sind denn auch in allen diesen Fällen die ursprünglichen w. F. beibehalten worden, ohne die angezeigte Reduction zuzulassen. Man sieht dass in einem solchen V sich, wie gebührt, ein etwas grösserer w. F. herausstellt.
3. Das regelmässige Verfahren der Vereinigung der aus den verschiedenen Reihen entnommenen Grössen zu einem Werthe V , wie es für die 143 vollständigen Intervalle angewandt wurde, stellt sich in unserm Beispiel folgendermaassen dar :

Nach 1) ist, aus (F) und (S), $P^{24} - P^{25} = -933,7$ Zoll, mit dem (w. F.)² = 5,09.

Nach S. 280 ist aus Reihe $\frac{25}{2}(\Sigma')$:

aus p^{25} , $B^{25} - P^{23} = -661,6$ Zoll, mit dem Gewichte 1,00; w. F. = 1,07, (w. F.)² = 1,15

aus p^{24} , $P^{24} - B^{23} = -274,4$ " " " " 1,76; " " = 1,99, " " = 3,96

Also $P^{24} - P^{25} = -936,0$ "	2,26	5,11
	1,85	3,41 reducirt.

Ebendasselbst ergibt sich aus (Σ'') und (Σ''') :

aus p^{23} , $P^{24} - P^{23} = -936,8$ Zoll, mit dem Gewichte 0,60; w. F. = 4,97, (w. F.) ² = 24,73	} reciprok.
aus p^{24} , $= -934,0$ " " " " 1,17; " " = 3,56, " " = 12,69	
Mittel = $-935,4$ " " " " 3,06, " " = 9,36	
	2,16, " " = 4,68 reducirt.

Wir haben demnach für $P^{24} - P^{23}$

$M = -933,7$ Zoll, mit dem (w. F.) ² = 5,09	} reciprok.
$\Sigma' = -936,0$ " " " " " " = 3,41	
Mittel $B = -934,85$ " " " " " " 2,12	
$C = -935,4$ " " " " " " 4,68	
Endwerth $V^{23} = -935,0$ " " " " " " = 1,46	
w. F. = 1,21 " ;	

wobei die Vereinigung von B und C zum Endwerth V^{23} nach den ihnen zugehörigen angegebenen (w. F.)² geschah.

4. Bei diesem Rechnungsverfahren scheint es zuerst, als wenn das Princip der Messung von der Mitte aus, nur für den Werth M in Anwendung gebracht sei, weil die beiden hier für Σ' und für C aus (Σ'') und (Σ''') benutzten Grössen nicht von der Mitte aus correspondirend sind. Es ist aber zu beachten, dass die correspondirenden Grössen in den benachbarten Intervallen, in unserm Beispiel in V^{22} und V^{24} , so in Anwendung kommen, dass das Princip der Messung aus der Mitte bis zur Ableitung der B und C ganz streng erhalten ist, und nur in sehr geringem Maasse bei der Vereinigung von B und C zu V gestört wird, in dem Fall dass die (w. F.)² für B und C in den benachbarten V nicht dasselbe Verhältniss unter sich darbieten. Dieses kleine Opfer war aber bei der Vereinigung zu einem einzigen Theilwerth V für jedes $P^{n+1} - P^n$ ein unvermeidliches, und es lässt sich nachweisen dass es die Sicherheit der Resultate nur ganz unwesentlich gestört haben kann.

§ 36.

Das erste und letzte Intervall der ganzen Operation beruhen auf reciproken gleichzeitigen Beobachtungen verschiedener Beobachter. Für die Bestimmung von $V^1 = P^2 - P^1$, beobachteten Fuss und Sawitsch am 3. Nov. 1836, an 2 verschiedenen Standpuncten, die etwa 400 und 550 Fuss von P^1 ablagen, die Zenithdistanz von P^2 , während Sabler mit seinem Instrumente von p^2 aus die von P^1 nahm. Jeder machte 3 Sätze. Aus diesem Material hat Sabler $P^2 - P^1 = 1168,0$ Zoll, Seite 223, abgeleitet. Es ist aber klar, dass diese Zahl noch mit dem Einfluss der Biegungscoefficienten der 3 Instrumente behaftet ist. Diese zu bestimmen benutzte ich zunächst die von Sabler und Sawitsch an mehreren Puncten beobachteten Polhöhen. Da nemlich beide sowohl den Polarstern, als südliche Sterne beobachtet hatten, so musste sich der Biegungscoefficient in diesen Polhöhen aussprechen, und, unter Annahme dass die Biegung dem $\sin z$ proportional ist, bestimmen lassen. Bei den, Seite 379—381, von Sabler und, Seite 187—189, von Sawitsch berechneten Polhöhen sind die Königsberger Declinationen der südlichen Sterne benutzt worden. Statt ihrer wandte ich die auch durch die neuesten Untersuchungen als genauer erkannten Dorpater De-

clinationen dieser Sterne an, während der Ort des Polarsterns aus den Berliner Ephemeriden genommen keiner Verbesserung bedurfte.

Biegungscoefficient b des von SABLER gebrauchten gr. Universalinstruments.

Die angezeigten Beobachtungen geben zur Bestimmung von *b* folgende Gleichungen :

$$\begin{aligned} 0 &= +1,70 - 1,30 b, & \text{mit dem Gewicht } 3,2 \\ 0 &= +0,49 - 1,20 b, & \text{ " " " } 1,7 \\ 0 &= -0,83 - 1,20 b, & \text{ " " " } 1,2 \\ 0 &= +1,72 - 1,58 b, & \text{ " " " } 7,2 \end{aligned}$$

Hieraus findet sich nach der Methode der kl. Quadr.

$$b = +1,05, \text{ mit dem w. F. } 0,30.$$

Biegungscoefficient b' des von SAWITSCH gebrauchten Theodoliten.

Hierfür erhielt ich folgende Gleichungen :

$$\begin{aligned} 0 &= -3,26 - 1,27 b', & \text{mit dem Gewichte } 4,4 \\ 0 &= -4,19 - 1,22 b', & \text{ " " " } 1,6 \\ 0 &= +4,00 - 1,22 b', & \text{ " " " } 0,7 \\ 0 &= -0,92 - 1,26 b', & \text{ " " " } 0,7 \\ 0 &= +3,75 - 1,26 b', & \text{ " " " } 0,7 \\ 0 &= -4,91 - 1,39 b', & \text{ " " " } 2,7. \end{aligned}$$

Und hieraus

$$b' = -2,18, \text{ mit dem w. F. } 0,62.$$

Es verdient hervorgehoben zu werden, dass sich in den zwei gleichnamigen Polhöhen, nach Anbringung der gefundenen Biegung, eine treffliche Uebereinstimmung der beiden Beobachter darbietet. Es ist nemlich

	für Nowotscherkask, St. Nicolai-Kirche,	für Nicolajewka, Kirche
nach Sabler	$\varphi = 47^{\circ} 24' 35,3$	$46^{\circ} 58' 38,0$
nach Sawitsch	34,9	37,4

Biegungscoefficient b'' des von Fuss gebrauchten Theodoliten.

Für die Bestimmung dieses Coefficienten finden sich keine Polhöhenbeobachtungen. Aber Seite XLVIII ist mit grosser Sicherheit $b'' - b' = -4,44$ gefunden worden, woraus, mit $b' = -2,18$, sich $b'' = -6,62$ findet.

Wenden wir nun diese Biegungscoefficienten auf die Seite 223 gegebenen Zenithdistanzen, die schon auf die Signalmarken P^1 und P^2 centrirt sind, an, so erhalten wir folgendes :

	in P^1		in P^2		im Mittel	$P^2 - P^1 =$
	nach Sawitsch	nach Fuss	nach Sabler	$\frac{(z' - z)}{2} =$		
$3^h 7^m 5$	$z = 89^{\circ} 34' 45,7$	$z = 89^{\circ} 34' 43,1$	$z' = 90^{\circ} 26' 58,0$	$+26' 6,8$	1169,2 Zoll	
37,5	40,4	37,8	54,8	7,8	1169,9 "	
4 7,5	35,3	33,3	52,0	8,8	1170,7 "	
	Mittel 40,5	38,1	54,9	7,8	1169,9 "	

Der w. F. dieses Mittels ist, aus den w. F. der z respective = $1,6$ und $1,1$ abgeleitet, gleich $0,39$ Zoll. Wir müssen aber noch eine kleine Unsicherheit der 3 Biegungscoefficienten gestatten. Gewiss ist diese aber reichlich gross angenommen, wenn wir für b und b' den w. F. = $1,0$, für b'' aber $2''$ voraussetzen. Mit dieser Annahme unterläge der Mittelwerth von $\frac{z'-z}{2} = 26'7,8$ einem w. F. von $0,75$, und $P^2 - P^1$ einem neuen w. F. von $0,56$ Zoll. Dieser, mit dem obigen von $0,39$ Zoll vereinigt, gibt für $P^2 - P^1$ den wahrsch. Gesamtfehler = $0,68$ Zoll. Ergibt sich schon hieraus dass V^1 mit ausgezeichneter Sicherheit bestimmt ist, so haben wir noch eine willkommene Bestätigung in folgendem erhalten. Sabler hat nemlich überschüssig von a^1 und b^1 , durch Beobachtungen aus der Mitte, Kagalnik — P^1 bestimmt, und von P^2 aus einseitig das nahe Kagalnik beobachtet. Diese Messungen stellen sich so dar:

$$\begin{array}{r} \text{Kag.} - P^1 = +1979,9 \text{ Zoll, mit dem (w. F.)}^2 = 0,21 \\ P^2 - \text{Kag.} = -811,7 \text{ " " " " " " } = 2,72 \\ \hline \text{folglich } P^2 - P^1 = +1168,2 \text{ Zoll, mit dem (w. F.)}^2 = 2,93, \end{array}$$

welcher Werth mit dem obigen $+1169,9$ " " " " " " = $0,68$ innerhalb der Wahrscheinlichkeit übereinstimmt, und mit ihm vereinigt, seines verhältnissmässig kleinen Gewichts wegen, nur eine kleine Aenderung hervorbringt, indem nun $V^1 = +1169,7$ Zoll mit dem (w. F.)² = $0,40$ oder mit dem w. F. $0,63$ Zoll wird.

Noch vortheilhafter ist die Bestimmung des letzten Intervalls $V^{123} = P^{124} - P^{123}$ dadurch, dass für dasselbe reciproke gleichzeitige Beobachtungen vom 27. und 28. Oct. 1837 vorhanden sind, so dass am 27. Oct. Sawitsch sich in P^{123} und Sabler sich in P^{124} befand, am nächsten Tage aber die Beobachter nebst Instrumenten den Standpunct gewechselt hatten. In einem solchen Falle werden die Biegungscoefficienten der Instrumente vollständig eliminirt. Die Berechnung der 5 an beiden Tagen beobachteten reciproken Sätze gibt $P^{124} - P^{123} = -305,5$ Zoll, frei von der Biegung, mit dem w. F. = $1,47$ Zoll. Auch dieser Werth hat seine Controlle in der von Sabler am 26. Oct. in P^{123} angestellten Beobachtung, an welchem Tage er von der Mitte aus $P^{124} - P^{122} = -306,5$ Zoll erhielt. Da nun $P^{123} - P^{122}$ aus dem Complexe der Beobachtungen = $-0,8$ Zoll ist, so ergibt sich hiermit $P^{124} - P^{123} = -305,7$ Zoll, welches mit dem obigen Werth auf $0,2$ Zoll übereinstimmt. Der w. F. dieser zweiten Bestimmung ist $3,55$ Zoll, und das Hinzukommen derselben ändert nichts im Resultate $V^{123} = -305,5$ Zoll, bringt aber dessen w. F. von $1,47$ auf $1,37$ Zoll herab.

§ 37.

Nach dem im vorigen aus einander gesetzten Verfahren bin ich zur Kenntniss der 123 Werthe V^1 bis V^{123} gelangt und habe zugleich jedem sein zugehöriges (w. F.)² bestimmt. Ehe ich nun zur Summirung der V schritt, um die absoluten Höhen der Hauptsignale über dem Asowschen Meere und deren Genauigkeit zu erhalten, hielt ich es für nothwendig eine allgemeine Prüfung der den einzelnen V beigelegten (w. F.)² vorzunehmen, da ich bei deren Ableitung mir eine scheinbar willkührliche Reduction, Seite XLIX, erlaubt hatte. Das Mittel hierzu boten mir die 113 auf vollständigen Beobachtungen beruhenden V dar, deren jedes aus der Vereinigung eines B und C entstanden war. Die den B und C getrennt zukommenden

(w. F.)² waren von mir als β^2 und γ^2 berechnet, und wenn sie gehörig bestimmt waren, so mussten sie den Unterschieden $\Delta = B - C$, dieser beiden unabhängigen Grössen, im Mittel auf eine gewisse Art entsprechen. Ich suchte daher für alle 113 Fälle einen Coefficienten λ^2 durch Berechnung des Ausdrucks

$$\lambda^2 = \frac{0,6745^2 \cdot \Delta^2}{\beta^2 + \gamma^2}$$

Entsprachen die β und γ den $\Delta = B - C$, so musste im Mittel $\lambda^2 = 1$ werden. Das Resultat der Rechnung war, im Mittel aus 113 Bestimmungen $\lambda^2 = 1,0365$, $\lambda = 1,0180$.

Es ist also aus der Uebereinstimmung der Werthe B und C gefunden, dass der Gewichteinheit, für die ein w. F. der Höhe von 1,0 Zoll vorausgesetzt ist, genauer ein w. F. von 1,018 Zoll zukommt, so dass alle w. F. um $0,018 = \frac{1}{55}$, alle (w. F.)² um $0,036 = \frac{1}{28}$ zu vermehren sind.

Wenn wir nun aber betrachten, dass für unsere B und C , wie sie jetzt berechnet sind, zwar die Reciprocität gehörig wirksam war, dass aber die Compensation durch die Beobachtung aus der Mitte erst durch die benachbarten Δ , also z. B. für Δ^{25} , durch Δ^{22} und Δ^{24} herbeigeführt wird, so ersieht man, dass wir noch einen Factor μ^2 zu bestimmen haben, der kleiner als 1 sein muss, durch dessen Anwendung wir erst zu den richtigen (w. F.)² gelangen, die nunmehr $\beta^2 \cdot \lambda^2 \cdot \mu^2$ und $\gamma^2 \cdot \lambda^2 \cdot \mu^2$ werden. Nehmen wir 2 benachbarte $B - C$, die wir durch Δ und Δ' bezeichnen wollen, so gilt der Wahrscheinlichkeit nach zwischen ihnen die Bedingung, dass $(\Delta^2 + \Delta'^2) = (\Delta + \Delta')^2$, so wie keine Compensation statt findet. Ergibt sich aber, dass vorherrschend $(\Delta^2 + \Delta'^2) > (\Delta + \Delta')^2$, so ist dadurch das Vorhandensein einer noch nicht berücksichtigten Compensation ausgesprochen, welche bei $(\Delta^2 + \Delta'^2)$ doppelt so gross gewesen sein muss als bei $(\Delta + \Delta')^2$. Hieraus entsteht folgende Gleichung für den einzelnen Fall:

$$(\Delta^2 + \Delta'^2) - 2\omega^2 = (\Delta + \Delta')^2 - \omega^2 \text{ und } \omega^2 = (\Delta^2 + \Delta'^2) - (\Delta + \Delta')^2.$$

Ich konnte 110 Mal aus meinem Material die Grösse ω^2 bestimmen, und fand ein so entschiedenes Vorwalten eines positiven Werthes, dass sich $\Sigma \omega^2 = +424,2$ fand, während die $\Sigma \Delta^2$ sich auf 1279,2 belief. Hiermit erhalten wir als Mittelwerth

$$\mu^2 = \frac{1279,2 - 424,2}{1279,2} = \frac{855,0}{1279,2} = 0,6685; \mu = 0,8177.$$

Wir sehen hieraus dass, um der Compensation durch die benachbarten Intervalle zu genügen, die (w. F.)² mit fast genau $\frac{2}{3}$ zu multipliciren sind. Verbinden wir nunmehr beide Coefficienten λ^2 und μ^2 , so findet sich

$$\pi^2 = \lambda^2 \cdot \mu^2 = 1,0365 \cdot 0,6685 = 0,6928; \pi = 0,8326 = \frac{5}{6}.$$

Mit diesem Coefficienten $\pi^2 = 0,693 = 0,7 (1 - \frac{1}{100})$ habe ich alle diejenigen Fehlerquadrate multiplicirt, wo diese Compensation vorhanden ist.

§ 38.

In der nachfolgenden Tafel III stelle ich nun die allendlichen Werthe der Höhen über dem Asowschen Meere, für die 124 Signalmarken P^1 bis P^{124} zusammen. Auf der Horizontallinie mit jeder absoluten Höhe Q ist zur Beurtheilung ihrer Genauigkeit der w. F. derselben angegeben. So ist für P^{36} die Höhe 5358,5 Zoll mit dem w. F. = 5,18 Zoll. Der Unterschied zweier benachbarten absoluten Höhen gibt den Werth des Höhenunterschiedes V der beiden Signale, z. B. $V^{36} = P^{37} - P^{36} = -435,1$ Zoll. Der (w. F.)² des V steht zwischen den beiden Horizontalen der zugehörigen Höhen.

TAFEL III. Zusammenstellung der definitiven Werthe Q , der in englischen Zollen ausgedrückten Höhen über dem Asowschen Meere, für alle Hauptpuncte P^1 bis P^{124} .

(Alle Höhen beziehen sich auf die Mitten der Visirmarken.)

	Höhe Q	(w. F.) ² der V	w. F. der Q		Höhe Q	(w. F.) ² der V	w. F. der Q
P^1	146,0			P^{51}	2318,3	0,35	4,93
P^2	1315,7	0,40	0,63	P^{52}	2295,5	0,17	4,95
P^3	1838,4	0,10	0,71	P^{53}	2363,3	0,33	4,98
P^4	1257,6	1,85	1,48	P^{54}	2471,6	0,48	5,03
P^5	1677,5	0,60	1,72	P^{55}	2833,8	0,40	5,07
P^6	852,6	0,51	1,86	P^{56}	5358,5	1,15	5,18
P^7	1669,1	0,65	2,03	P^{57}	4923,4	0,84	5,26
P^8	917,3	3,18	2,70	P^{58}	5689,1	1,02	5,36
P^9	1156,9	3,35	3,26	P^{59}	7013,7	1,25	5,47
P^{10}	3230,4	1,48	3,48	P^{60}	6960,4	0,48	5,51
1836 P^{11}	1331,8	0,33	3,53	P^{61}	6872,2	0,66	5,57
Endpunct 1836	1206,8		3,53	P^{62}	9976,4	0,52	5,62
1837 P^{11}	1330,5		3,53	P^{63}	13539,7	0,22	5,64
P^{12}	2627,3	0,25	3,56	P^{64}	14775,7	0,32	5,67
P^{13}	3271,1	0,26	3,60	P^{65}	15431,7	0,85	5,74
P^{14}	3226,0	0,82	3,71	P^{66}	18767,7	0,96	5,82
P^{15}	3228,9	0,81	3,82	P^{67}	21446,7	0,79	5,89
P^{16}	4062,1	0,23	3,85	P^{68}	22265,1	0,28	5,92
P^{17}	3891,8	0,49	3,91	P^{69}	18331,2	0,22	5,93
P^{18}	4023,6	2,38	4,22	P^{70}	12216,4	0,67	5,99
P^{19}	4165,2	0,75	4,29	P^{71}	12910,4	0,16	6,00
P^{20}	4194,2	0,12	4,31	P^{72}	13284,7	0,36	6,03
P^{21}	4585,5	0,72	4,39	P^{73}	16834,1	0,63	6,09
P^{22}	4282,8	0,41	4,45	P^{74}	18343,7	0,02	6,09
P^{23}	3792,9	0,23	4,46	P^{75}	12077,6	0,85	6,16
P^{24}	2857,9	1,01	4,57	P^{76}	12455,5	0,71	6,21
P^{25}	3374,0	0,67	4,65	P^{77}	11663,8	0,41	6,25
P^{26}	3801,3	0,29	4,68	P^{78}	13500,8	0,62	6,30
P^{27}	4934,4	0,34	4,72	P^{79}	21959,1	0,97	6,37
P^{28}	3460,2	0,58	4,78	P^{80}	21683,4	0,59	6,42
P^{29}	2915,5	0,85	4,86	P^{81}	20404,9	0,59	6,47
P^{30}	2560,8	0,28	4,89	P^{82}	13361,6	0,27	6,49

TAFEL III. *Definitive Höhen der Hauptpunkte über dem Meere.*

	Höhe Q	(w. F.) ² der V	w. F. der Q		Höhe Q	(w. F.) ² der V	w. F. der Q		Höhe Q	(w. F.) ² der V	w. F. der Q
P^{53}	16249,6	0,28	6,51	P^{84}	6932,0	0,53	7,74	P^{105}	2275,6	0,79	8,53
P^{64}	16130,2	0,73	6,56	P^{85}	6550,2	0,71	7,79	P^{106}	2171,5	0,18	8,54
P^{65}	11807,3	1,08	6,65	P^{86}	6287,0	0,51	7,82	P^{107}	1634,2	0,30	8,55
P^{66}	11674,7	0,46	6,68	P^{87}	5953,4	0,84	7,88	P^{108}	1086,9	0,18	8,56
P^{67}	12416,4	0,08	6,69	P^{88}	5428,4	0,69	7,92	P^{109}	1088,3	0,33	8,58
P^{68}	13857,1	1,20	6,77	P^{89}	5657,6	0,48	7,95	P^{110}	502,3	0,37	8,61
P^{69}	13989,9	0,45	6,81	P^{90}	5087,6	0,87	8,00	P^{111}	210,6	0,34	8,62
P^{70}	15434,1	1,27	6,90	P^{91}	5222,3	0,15	8,01	P^{112}	15,4	1,10	8,69
P^{71}	10245,0	1,23	7,00	P^{92}	5263,5	0,20	8,03	P^{113}	-143,1	1,13	8,75
P^{72}	11355,1	0,26	7,01	P^{93}	4841,1	0,64	8,07	P^{114}	-233,8	0,35	8,77
P^{73}	12278,3	1,14	7,09	P^{94}	4560,4	0,78	8,11	P^{115}	-221,5	1,41	8,86
P^{74}	13325,9	2,34	7,25	P^{95}	4188,5	0,80	8,16	P^{116}	-297,6	0,84	8,90
P^{75}	12854,1	1,88	7,38	P^{96}	3809,2	0,43	8,19	P^{117}	-493,6	1,56	8,99
P^{76}	12963,5	0,40	7,41	P^{97}	3872,3	0,39	8,21	P^{118}	-413,8	0,76	9,03
P^{77}	11146,2	1,77	7,52	P^{98}	4041,1	0,45	8,24	P^{119}	-443,9	0,29	9,05
P^{78}	10748,3	0,73	7,57	P^{99}	3999,5	0,23	8,25	P^{120}	-564,2	0,64	9,08
P^{79}	10108,1	0,35	7,60	P^{100}	3578,7	0,84	8,31	P^{121}	-436,3	0,82	9,13
P^{80}	9196,4	0,51	7,63	P^{101}	3544,3	0,34	8,33	P^{122}	-437,3	0,88	9,17
P^{81}	8528,9	0,35	7,65	P^{102}	3470,3	0,25	8,34	P^{123}	-438,1	0,38	9,20
P^{82}	7656,4	0,48	7,69	P^{103}	2854,0	2,17	8,47	P^{124}	-743,6	1,86	9,29
P^{83}	7232,3	0,38	7,71	P^{104}	2756,6	0,16	8,48				

Die Summe der Quadrate der w. F. der Höhenbestimmung zwischen P^1 und P^{124} ist in der vorigen Tafel = 86,41, deren Quadratwurzel 9,29 Zoll den w. F. von $P^{124} - P^1$ ausdrückt, in so weit er von der Messung im verticalen Sinne abhängt. Hierzu haben wir noch, nach Seite xix, den aus der Unsicherheit der horizontalen Entfernungen hervorgehenden w. F. des Höhenunterschiedes derselben beiden Signale zu verbinden. Er ist dort = 2,46 Zoll angegeben, eine Grösse, die sich eigentlich auf die Höhenbestimmungen durch die kürzeren Entfernungen (Reihe B) bezieht, und für die Q aus der Verbindung von B und C entschieden noch etwas kleiner ist.

Es ist demnach zu 86,41 noch $(2,46)^2 = 6,05$ hinzuzufügen. So ergibt sich, für $P^{124} - P^1 = -889,6$ Zoll, der $(w. F.)^2 = 92,46$ und also der w. F. = 9,62 Zoll. Dieser w. F. begreift alle Fehlerquellen in sich, die bei dieser Operation haben einen Einfluss äussern können, so dass keine einzige übersehen, und jede gehörig gewürdigt worden. Vertheilen wir 92,46 auf die 123 Intervalle, so folgt im Mittel, für ein einzelnes $V^n = P^{n+1} - P^n$, der $(w. F.)^2 = 0,752$, und der w. F. = 0,87 Zoll. Dies ist also der w. F., dem ein aus

dem Complexe der 5 Reihen abgeleiteter Höhenunterschied zweier benachbarter Hauptsignale, die 7 Werst von einander abstehen, unterworfen ist.

§ 39.

Fügen wir zu P^{124} — Asow. Meer = —743,6 noch den Höhenunterschied zwischen dem Signal P^{124} und dem mittleren Wasserstande des Caspischen Meeres hinzu, so ergibt sich $K = -743,6 - 281,8 = -1025,4$ Zoll. Der w. F. dieser Zahl ist noch mit der geringen Unsicherheit über den mittleren Stand des Wassers in beiden Meeren zu beschweren. Nach Seite 7, 9, 96, ist für den mittleren Stand des Asowschen Meeres etwa 2 Zoll als w. F. anzunehmen, und für den des Caspischen eher weniger als mehr. Setzen wir diesen also = 1,5 Zoll. Es ist demnach zu $92,46$ noch $4,0 + 2,25 = 6,25$ hinzuzufügen, wodurch wir $98,71$ erhalten, wovon die Quadratwurzel = $9,94$ ist. Somit sind wir endlich zum Schlussergebniss für den Hauptzweck der ausgeführten Operation gekommen.

Es lag im Jahre 1837,8 die Oberfläche des Caspischen Meeres, bei seinem mittleren Wasserstande, um 1025,4 englische Zoll tiefer als der mittlere Wasserstand des Asowschen Meeres, und dieser Werth ist einem wahrscheinlichen Fehler von nur 9,94 Zoll unterworfen. Wir haben folglich nach verschiedenen Maasseinheiten :

$$\begin{aligned}
 K &= -1025,4 \text{ engl. Zoll, mit dem w. F.} = 9,9 \text{ Zoll,} \\
 &— 85,45 \text{ engl. Fuss, " " " " = 0,83 Fuss,} \\
 &— 12,207 \text{ Saschen, " " " " = 0,118 Saschen,} \\
 &— 80,18 \text{ franz. Fuss, " " " " = 0,78 Fuss,} \\
 &— 26,045 \text{ Mètres, " " " " = 0,252 Mètre.}
 \end{aligned}$$

Die Genauigkeit dieses Resultats, die durch den kleinen w. F. von 9,9 Zoll angegeben wird, ist gewiss eine merkwürdige Thatsache, wenn man bedenkt, dass dasselbe auf einer Arbeit beruht, deren Operationslinie eine Länge von 823 Werst oder 118 geographische Meilen hat.

Aus der getrennten Behandlung der 5 Reihen (F), (S), (Σ'), (Σ''), (Σ''') war oben, Seite XLIX, der Werth $K = -1024,1$ Zoll $\mp 11,3$ Zoll gefunden worden. Die definitive in §§ 35 bis 39 durchgeführte Rechnung hat $K = -1025,4 \mp 9,9$ Zoll gegeben. Die beiden Werthe von K sind auf 1,3 Zoll einander gleich; dem zweiten gebührt aber, der strengeren Ableitung wegen, entschieden der Vorzug, auch ist er einem kleineren w. F. unterworfen, obgleich bei ihm Fehlerquellen mit zugezogen sind, die bei dem frühern noch ausser Acht gelassen waren. Die von Sabler, Seite 371, gegebene Tiefe des Caspischen Meeres = $1004,0$ Zoll mit dem w. F. $14,8$ Zoll weicht um $21,4$ Zoll vom jetzt gefundenen Endwerthe ab.

§ 40.

Der Vollständigkeit wegen gebe ich jetzt in der nachstehenden Tafel IV die definitiven Höhen aller Basispunkte über dem Asowschen Meere, in englischen Zollen ausgedrückt. Sie sind aus der Tafel III mit Zuziehung der reciproken Höhenunterschiede (Seite 222 bis 248) abgeleitet worden. Für jedes β^n ergab sich eine doppelte Bestimmung, einmal aus der Höhe von P^n mit dem reciproken Unterschiede $\beta^n - P^n$ verbunden, das zweite Mal aus der Höhe von P^{n+1} mit dem Werthe $P^{n+1} - \beta^n$ vereinigt. Aus

beiden Werthen wurde das Mittel genommen. Die Uebereinstimmung dieser beiden Werthe zeigte, dass die auf diese Weise in Tafel IV gegebenen definitiven Höhen der Basissignale denen der Hauptsignale an Genauigkeit kaum nachstehen, und es wurde ihnen daher ein w. F. in der Tafel beigelegt, der ein Mittel aus den w. F. der jedesmal benachbarten beiden P ist.

Um die Höhen in Tafel IV, die sich alle auf die Visirmarken beziehen, auf die des Erdbodens zu verwandeln, sind an dieselben von B^1 bis B^{20} die Reductionen -62 Zoll, von β^{21} bis β^{122} dagegen -144 Zoll anzubringen. Ich bemerke hiebei dass, nach Anbringung dieser Reduction, Tafel IV ein genaueres Bild des Terrainprofils geben wird, als Tafel III, für welche die Reduction auf den Boden ebenfalls -144 Zoll beträgt, weil zu den Basen immer die allgemeine Fläche gewählt wurde, während die Hauptsignale meist auf künstlichen Erhöhungen, den Kurganen, sich befanden.

TAFEL IV. *Definitive Höhen der Basispunkte über dem Meere, in engl. Zollen.*

(Alle Höhen beziehen sich auf die Mitten der Visirmarken.)

		w. F.			w. F.			w. F.			w. F.
B^1	109,7	0,00	β^{25}	3300,2	4,67	α^{49}	13696,2	5,96	β^{75}	12051,2	7,17
B^2	1458,8	0,67	β^{26}	4260,4	4,70	α^{50}	10654,7	6,00	α^{74}	12892,6	7,32
B^3	160,9	1,10	β^{27}	3808,9	4,75	α^{51}	12284,9	6,02	β^{75}	12507,7	7,40
B^4	1107,6	1,60	β^{28}	2824,1	4,82	β^{52}	12192,2	6,06	β^{76}	11931,3	7,47
B^5	790,5	1,79	B^{29}	1860,3	4,88	α^{53}	16868,7	6,09	α^{77}	10812,9	7,55
B^6	493,8	1,94	β^{30}	2448,5	4,91	β^{54}	13585,0	6,13	β^{78}	10282,3	7,59
B^7	861,3	2,36	β^{31}	2156,6	4,94	β^{55}	11556,2	6,19	β^{79}	9497,1	7,62
B^8	967,6	2,98	β^{32}	2054,7	4,97	α^{56}	12471,0	6,23	β^{80}	8737,6	7,64
B^9	832,7	3,35	β^{33}	2195,5	5,01	β^{57}	11951,6	6,28	β^{81}	7808,3	7,67
B^{10}	2104,7	3,48	β^{34}	2438,9	5,05	α^{58}	14809,6	6,34	β^{82}	7214,0	7,70
B^{11}	1923,8	3,55	β^{35}	3476,7	5,13	β^{59}	20348,2	6,40	β^{83}	6951,5	7,73
A^{12}	2755,6	3,58	β^{36}	4423,5	5,22	β^{60}	18103,2	6,45	β^{84}	6716,6	7,77
B^{13}	3163,9	3,66	β^{37}	4495,2	5,31	β^{61}	13927,7	6,48	β^{85}	6402,6	7,81
B^{14}	2151,8	3,77	α^{38}	5915,9	5,42	β^{62}	15784,5	6,50	β^{86}	6045,4	7,85
B^{15}	3523,1	3,84	β^{39}	7009,9	5,49	β^{63}	15853,7	6,54	α^{37}	5462,5	7,90
B^{16}	3686,3	3,88	α^{40}	6646,9	5,54	β^{64}	12107,3	6,61	β^{88}	5330,3	7,94
B^{17}	3850,5	4,07	β^{41}	7266,8	5,60	β^{65}	9384,5	6,67	β^{89}	5162,2	7,98
B^{18}	3938,7	4,26	β^{42}	10282,8	5,63	β^{66}	11970,0	6,69	β^{90}	5134,7	8,01
B^{19}	4085,8	4,30	β^{43}	14069,4	5,66	β^{67}	10324,4	6,73	β^{91}	4793,5	8,02
B^{20}	4274,0	4,35	β^{44}	13738,3	5,71	β^{68}	13653,1	6,79	β^{92}	4643,5	8,05
β^{21}	4217,4	4,42	α^{45}	17497,4	5,78	β^{69}	14557,9	6,86	β^{93}	4428,4	8,09
β^{22}	3885,3	4,46	β^{46}	20435,3	5,86	β^{70}	13970,0	6,95	β^{94}	4069,0	8,14
β^{23}	3128,3	4,52	β^{47}	19182,8	5,91	β^{71}	9792,0	7,01	β^{95}	3874,5	8,18
β^{24}	2718,7	4,61	β^{48}	19652,5	5,93	α^{72}	10769,4	7,05	β^{96}	3672,8	8,20

TAFEL IV. *Definitive Höhen der Basispunkte über dem Meere.*

		w. F.			w. F.			w. F.			w. F.
β^{97}	3924,8	8,23	β^{104}	2308,7	8,51	β^{111}	— 52,6	8,66	α^{118}	—612,2	9,04
α^{98}	3533,8	8,25	β^{105}	1905,6	8,54	β^{112}	—208,6	8,72	β^{119}	—631,4	9,07
β^{99}	3628,6	8,28	β^{106}	1815,5	8,55	β^{113}	—269,5	8,76	β^{120}	—676,2	9,11
α^{100}	3515,8	8,32	α^{107}	1369,6	8,56	β^{114}	—368,3	8,82	β^{121}	—577,7	9,15
α^{101}	3155,2	8,34	α^{108}	983,6	8,57	α^{115}	—404,3	8,88	β^{122}	—842,2	9,19
β^{102}	2714,1	8,41	β^{109}	612,9	8,60	β^{116}	—482,0	8,95			
α^{103}	2731,7	8,48	β^{110}	150,3	8,62	β^{117}	—551,0	9,01			

§ 41.

In der nachfolgenden Tafel V sind endlich die definitiven Höhen der gelegentlich beobachteten festen Punkte über dem Niveau des Asowschen Meeres zusammengestellt. Diese waren in der Regel bestimmt erkenntliche Zielpunkte an den Kirchen, bei denen die Operationslinie vorbeiführte. Bei der Ableitung derselben aus den Höhen der Haupt- und Basispunkte wurde das Princip der Messung aus der Mitte möglichst berücksichtigt, und aus den mehrfachen Bestimmungen der verschiedenen Beobachter das Mittel genommen. Für die w. F. der Höhen in Tafel V sind die Mittel der w. F. der gebrauchten Vergleichspunkte gesetzt worden.

Nur vier Mal beziehen sich die Höhen in Tafel V auf den Erdboden selbst 1) beim Niveau des Kagalnikflusses in Kagalnitzkaja Stanitza, 2) bei der Schwelle der Kathedrale in Stawropol, 3) beim Niveau des Tereks auf dem Wege nach Kisljar, 4) bei Tschernoi-Rynok. Die Beobachter bedauern, dass der Mangel an Zeit, bei der nothwendigen raschen Förderung der Hauptoperation, ihnen nicht öfter gestattete die grade bei den Visirpunkten an den Kirchen wünschenswerthe Reduction der Höhe auf den Erdboden durch besondere kleine Operationen auszuführen, und sie verhinderte häufiger als 2 Mal die Höhen der Wasserflächen, in deren Nähe ihre Arbeit vorbeiging, zu ermitteln.

TAFEL V. *Definitive Höhen der gelegentlich beobachteten festen Punkte über dem Asowschen Meere, in engl. Zollen.*

Bezeichnung.	Höhe über dem Meere	Vergleichspunct	Beobachter	w. F.
Kagalnik, Kirche, Kuppel, Kreuzspitze	—2126,6	P^1	Σ, S, F	0,00
Nowo-Nicolajewka, Kirche, Kuppel, Kreuzspitze	1884,8	P^6, B^5, P^5	Σ, F	1,79
Nowo-Bataisk, Kirche, Kuppel, Kreuzspitze	1402,7	B^7, P^7	Σ, F	2,20
„ „ „ Knopf	1268,6	B^7	Σ	2,36
Kagalnitzkaja-Stanitza, Kirche, Kuppel, Kreuzspitze	1857,8	P^{10}	Σ, S, F	3,43
„ „ „ „ Knopf	1791,3	P^{10}	Σ	3,43
„ „ „ Glockenth., Kreuzspitze,	1612,2	P^{10}	Σ, S	3,43
Niveau des Kagalnik-Flusses bei Kagalnitzkaja-Stanitza	750,2	Gl. Th. Spitze	S	3,43
Nowo-Jegorlik, Kirche, Kuppel, Knopf	4345,1	B^{19}, P^{21}	Σ, F	4,35

TAFEL V. *Definitive Höhen der gelegentlich beobachteten festen Punkte über dem Asowschen Meere, in engl. Zollen.*

Bezeichnung.	Höhe über dem Meere	Vergleichungspunct	Beobachter	w. F.
<i>Sredni-Jegorlik</i> , Kirche, Kuppel, Knopf.....	2956,1	β^{24}	Σ	4,61
<i>Pestschanokopsk</i> , Kirche, Glockenthurm, Kugel.....	3854,0	P^{23}	<i>F</i>	4,78
<i>Letnützkoje</i> , Kirche, Kuppel, Kugel.....	2378,7	β^{31}	Σ	4,94
" " Glockenth., Kugel, unterer Rand	2456,9	P^{32}	<i>F</i>	4,95
<i>Nowotroitzk</i> , Kirche, Kuppel, Knopf.....	6335,1	β^{41}	Σ	5,60
" " " Kugel.....	6294,1	P^{41}	<i>F</i>	5,57
<i>Stawropol</i> , Cathedrale, Kuppel, Knopf.....	21553,7	P^{48}	Σ	5,92
" " " Kreuzspitze.....	21640,0	P^{48}	Σ	5,92
" " Glockenthurm, Spitze.....	21560,3	P^{48}	Σ	5,92
" " Schwelle der Hauptthür.....	20254	P^{48}	Σ	5,92
<i>Beschpagir</i> , Kirche, Kuppel, Kugel.....	14261,8	P^{53}	<i>F</i>	6,09
<i>Alexandrow</i> , Kirche, Kuppel, Kugel.....	12566,9	β^{61}, P^{63}	Σ, F	6,50
<i>Alexandria</i> , Kirche, Kuppel, Kreuzmitte.....	10750,0	β^{71}	Σ	7,01
" " " Querstange des Kreuzes	10800,6	β^{70}	<i>F</i>	6,95
<i>Georgiewsk</i> , Cathedrale, Kuppel, Kugel.....	11954,3	α^{72}	Σ	7,05
<i>Jekaterinograd</i> , Kirche, Kuppel, Fuss des Kreuzes..	7686,6	P^{84}	<i>F</i>	7,74
<i>Mosdok</i> , Cathedrale, Kuppel, Knopf.....	5693,6	P^{89}	<i>F</i>	7,95
<i>Naur</i> , Kirche, Kuppel, Kugel.....	3954,6	P^{97}	Σ, F	8,21
<i>Niveau des Terek</i> bei der ersten Ueberfahrt nach Kisljar	— 349,0	P^{114}	Σ	8,77
<i>Kisljar</i> , Armenische Kirche, Glockenthurm, Knopf..	+1254,7	P^{112}	Σ	8,69
" " " " Kugel..	+1333,0	P^{115}	<i>F</i>	8,86
<i>Tschernoi Rynok</i> , Belvedere, Dach.....	— 306,5	P^{123}	Σ, F	9,20
" " Gesimse des ersten Stocks.....	— 761,9	P^{123}	Σ	9,20
" " Erdboden am Hause.....	— 882	P^{123}	Σ, F	9,20

IV. Ueber die von verschiedenen Punkten der Operationslinie erhaltenen Höhenbestimmungen der Hauptspitzen des Caucasus über der Meeresfläche.

§ 42.

Seite 372 bis 378 des Textes sind die Berechnungen der Höhen der Bergspitzen des Caucasus zusammengestellt. Die Bestimmung der Höhe des Beschtau bot geringe Schwierigkeiten dar, da die Operationslinie in sehr mässiger Entfernung von demselben vorbeiging, und wurde durch gleichzeitige Beobachtungen von dem Hauptpuncte P^{70} und den beiden Hülfspuncten Q und D , die von der Spitze des