sicht zu unterwerfen. Zu einer kritischen Prüfung der ganzen Arbeit glaube ich nemlich, nach der mir von der Akademie übertragenen Leitung derselben, um so mehr verpflichtet zu sein, als in dem vorliegenden Texte die Resultate so dargestellt sind, wie sie in den einzelnen Ausarbeitungen der drei Astronomen enthalten sind, und von Herrn Sabler als Redactor aus einer einfachen Verbindung der Theilarbeiten abgeleitet wurden.

II. Ueber die ausgeführten geodätischen Verbindungen, und deren Genauigkeit.

§ 5.

Die Operationslinie enthält zwischen den Hauptsignalen P^1 bis P^{123} eine Folge von Vierecken, die zwischen je zwei auf einander folgenden Signalen P^nP^{n+1}, Fig. 5, liegen und deren jedes durch eine nahezu auf der Mitte liegende Grundlinie A^nB^n in zwei Dreiecke getheilt ist. Die längeren Diagonalen dieser Vierecke geben die 122 Entfernungen der Hauptsignale, P^1P^2, P^2P^3, u. s. w. bis $P^{122}P^{123}$. Die letzte Entfernung $P^{123}P^{124}$ hat keine eigne Basis, sondern ist aus der vorhergehenden $A^{122}B^{122}$ auf gedoppelte Weise abgeleitet worden. Siehe Seite 219.

Addirt man alle 122 auf einander folgenden Entfernungen der P, so findet sich, nach der Zusammenstellung S. 195 — 219, deren Summe $= 34245610$ Zoll.*) Die Summe aller 122 gemessenen Grundlinien beträgt aber, nach S. 19 — 45, 1716311 Zoll. Es ist also die mittlere Länge

einer Grundlinie A^nB^n, $G = 14068$ Zoll $= 1172$ Fuss $= 0{,}3349$ Werst,
einer Hauptdiagonale P^nP^{n+1}, $E = 280702$ « $= 23392$ « $= 6{,}6834$ «, $E \sin 1'' = 1{,}360$ Zoll.
einer Dreiecksseite P^nA^n, $S = 140528$ « $= 11711$ « $= 3{,}3460$ «, $S \sin 1'' = 0{,}680$ «.

Folglich im Mittel

$$S = 9{,}989\,G; \quad E = 19{,}953\,G.$$

Hieraus ergibt sich, dass, im Mittel genommen, eine Grundlinie A^nB^n von den beiden zugehörigen Hauptpuncten P^n, P^{n+1} unter einem Winkel $w = 5^\circ\,44'\,44''$ gesehen wurde. Die in der Instruction vorgeschlagenen Grössen waren $E = 24500$ Fuss, $G = 1400$ Fuss, und folglich $w = 6^\circ\,32'$.

§ 6.

In jedem der 4 Winkelpuncte eines solchen Vierecks waren 3 zu beobachtende Richtungen, die zusammen 12 Richtungen oder 8 Winkel bildeten. Durch die Messung derselben war das Viereck überbestimmt, indem in jedem der beiden auf der Basis ruhenden Dreiecke, die wir ein für alle Mal die *spitzen Dreiecke* nennen wollen, deren Spitzen in P^n und P^{n+1} sind, je zwei Winkel zur Auflösung desselben und zur Berechnung der Diagonale P^nP^{n+1} genügten. Mit sehr wenigen Ausnahmen sind aber wirklich alle 12 Richtungen in jedem Vierecke beobachtet, wie sich aus der Zusammenstellung S. 19 — 45

*) Fügt man noch die letzte Linie $P^{123}P^{124} = 347350$ Zoll hinzu, so ergibt sich die Länge der durch die 124 Hauptsignale gehenden Operationslinie $= 34592960$ Zoll $= 2882747$ Fuss $= 823{,}6$ Werst $= 118$ geopraphische Meilen. Die im Texte des Werks p. 9, 318, 319, beiläufig gegebenen Längen dieser Linie sind nicht genau.

ergibt. In dieser finden wir auch, dass von jedem P^{n+1} aus die Richtung der Diagonalen der beiden benachbarten Vierecke, oder der Winkel zwischen P^n und P^{n+2}, beobachtet wurde, um die Verbindung der Vierecke unter einander zu bewerkstelligen. Ausserdem sind noch mehrere Richtungen nach benachbarten Kirchthürmen vorhanden, so wie sich endlich in einem besondern Anhange, S. 45—47, die Richtungsablesungen für die gesehenen Caucasusspitzen vorfinden. Alle im Texte gegebenen Ablesungen sind die schon centrirten, d. h. bei den Hauptpunkten P^n, P^{n+1}..... für den Abstand des Winkelmessers vom Centro des Signals verbesserten. An den Grundlinien A^nB^n sind nämlich alle horizontalen Winkel im Centro selbst gemessen worden, da die Signalmarken zu dem Ende weggenommen werden konnten.

Zur Horizontalwinkelmessung wurde gebraucht:

in den Hauptpuncten P, das grosse Universalinstrument Seite 2. 1), Beobachter Sabler;

in den Endpuncten der Grundlinien A, B, das kleine Universalinstrument Seite 2. 3), Beobachter Sawitsch.

Es ergibt sich hieraus, dass den gemessenen Winkeln des Vierecks eine sehr verschiedene Sicherheit zukommt, und dass daher die Ausgleichung der Winkel mit Rücksicht auf die relative Genauigkeit der beiden Instrumente geschehen musste. Unsere Beobachter nahmen an, dass die Genauigkeit der spitzen Viereckswinkel in P, sich zu der der Viereckswinkel an der Basis wie 3 : 1 verhält. Unter dieser Voraussetzung ist es ein leichtes, die wahrscheinlichen Fehler beiderlei Winkel zu finden.

Nach der ersten senkrechten Spalte der Zusammenstellung, Seite 195—219, sind nemlich unter den 122 Vierecken 116, in denen alle 4 Viereckswinkel beobachtet wurden, oder vollständig, und nur 6 Vierecke finden sich, in denen einer der spitzen Winkel mangelt. Wären in den vollständigen Vierecken alle 4 Winkel mit absoluter Genauigkeit gemessen, so hätte die Summe jedes Mal genau $360°0'0''$ sein müssen, indem der für ein mittleres Viereck nur $0'',012$ betragende sphärische Excess verschwindet. Aus der Abweichung der Winkelsumme finde ich aber:

den w. F. eines gemessenen Vierecks $= 6'',85$;

woraus unter Anwendung des Verhältnisses 3 : 1 folgt:

der w. F. eines beobachteten Winkels in P gleich $e = 1'',53$,

« « « « « « A u. B « $f = 4,59$.

Gleicht man nun die Winkel im Viereck zur genauen Summe $360°0'0''$ so aus, dass wenn $A^n + B^n + P^n + P^{n+1} = 360° - c$, die Verbesserung der beiden ersten $+\frac{3}{8}c$, der beiden letzten $\frac{1}{8}c$ beträgt: so hat man

den w. F. eines ausgeglichenen Winkels in P gleich $(e) = 1'',53\sqrt{\frac{3}{4}} = 1'',33$,

« « « « « « A u. B « $(f) = 4,59\sqrt{\frac{3}{4}} = 3,98$.

Dass das Verhältniss der Genauigkeiten 3 : 1 ein nahezu richtiges ist, bestätigt sich dadurch dass die Finnländische Gradmessung den w. F. eines in einem einzelnen Satze, ebenfalls in beiden Lagen, mit demselben grössern Instrumente gemessenen Horizontalwinkels $e = 1'',32$ gibt, etwas kleiner als der hier gefundene $1'',53$. Die ausgeglichenen Viereckswinkel, die wir mit (A^n), (B^n), (P^n) (P^{n+1}) bezeichnen wollen, sahen unsere Rechner als definitiv an, und hatten also nun noch die an den Basen in jedem der spitzen Dreiecke gemessenen partiellen Winkel auszugleichen, die wir mit a, a^1, b, b^1 bezeichnen wollen, so dass $a+a^1=A''$, $b+b^1=B''$. Diese Ausgleichung geschah dadurch dass, wenn

$$(P'')+a+b=180^0-k \text{ und } (P''^{+1})+a^1+b^1=180^0-k^1 \text{ war,}$$

die verbesserten Winkel

$$(a)=a+\tfrac{1}{2}\,k,\ (b)=b+\tfrac{1}{2}\,k;\ (a^1)=a^1+\tfrac{1}{2}\,k^1,\ (b)=(b^1+\tfrac{1}{2}\,k^1)$$

wurden, wodurch, da $k+k^1=\frac{3}{4}\,c$, zugleich, wie erforderlich,

$$(a)+(a^1)=a+a^1+\tfrac{1}{2}\ (k+k^1)=A+\tfrac{3}{8}\,c=(A)$$

$$(b)+(b^1)=b+b^1+\tfrac{1}{2}\ (k+k^1)=B+\tfrac{3}{8}\,c=(B) \text{ wird.}$$

Bei der Kürze der Grundlinie war es wahrscheinlich, dass die an den Endpuncten jeder Grundlinie in A u. B gemessenen Dreieckswinkel a, b, a^1, b^1 etwas ungenauer waren als ihre Summen $a+a^1=A''$, $b+b^1=B''$. Man findet auch wirklich, nach Seite 195—219, aus den Abweichungen der Summe der drei ein spitzes Dreieck bildenden, gemessenen Winkel von $180^0 0' 0''$ aus 238 verschiedenen Dreiecken, den w. F. eines Dreiecks $=8'',22$. Verbindet man dies mit dem obengefundenen w. F. des Signalwinkels $=1'',53$, so ergibt sich

der w. F eines gemessenen Dreieckswinkels an der Grundlinie $h=\sqrt{\frac{8,22^2-1,53^2}{2}}=5'',71$.

und nach der Ausgleichung $(h)=5,71\sqrt{\frac{2}{3}}=4'',66$.

§ 7.

Nachdem die w. F. der auf diese Weise ausgeglichenen Winkel gefunden sind, ist es ein leichtes die aus der Unvollkommenheit der Winkelmessung hervorgehende Unsicherheit des Abstands eines Signalpuncts von einem Basisende abzuleiten, der durch $S=G.\frac{\sin A}{\sin P}$ gefunden wird. Man hat nämlich, wenn wir die gefundenen Werthe $(e)=1'',33$ und $(h)=4'',66$ gebrauchen,

$$dS=S.\sin 1''.\sqrt{((h)^2\cot A^2+(e)^2\cot P^2)}=S.\sin 1.''\sqrt{(21,72\cot A^2+1,77\cot P^2)}$$

Legen wir die Normalform unserer Dreiecke zum Grunde, in welcher $A=87^0 8'$, $P=5^0 44'$ ist, so wird:

$$dS=S.\sin 1''\sqrt{(0,05+13,25^2)}=13,25.\sin 1''.S.$$

Da im Mittel $S=140528$ Zoll ist, so erhalten wir

den w. F. einer Seite S gleich 9,02 Zoll;

und hiermit sehr nahezu

den w. F einer Entfernung E zwischen 2 nächsten Signalen P'' und P''^{+1} gleich $9,02.\sqrt{2}=12,76$ Zoll.

Wenn sich die einzelnen Vierecke auch mitunter nicht unerheblich von der Normalform entfernen, indem die spitzen Winkel in den Hauptpuncten bald grösser, bald kleiner als der Mittelwerth $5^0 44'$ sind: so wird doch immer der gefundene w. F. den Mittelwerth sehr nahezu richtig darstellen, und die Grundlage der Bestimmung der Sicherheit grösserer Linien, die auf mehreren zusammenhängenden E beruhen, abgeben.

Es bedürfen aber diejenigen 6 Vierecke in welchen nicht alle 4 äusseren Winkel gemessen sind, sondern einer der spitzen Winkel fehlt, einer besondern Untersuchung, weil hier grössere Fehler der Entfernungen zu befürchten sind, und überdies die frühere Controle der Winkelsumme fehlt, um zu beweisen, dass kein Versehen sich eingeschlichen und unzuverlässige Seiten erzeugt hat. Es sind die Vierecke

1) zwischen P^{1} und P^{2}, in welchem der Winkel an $P^{1} = 24^{0}\ 3'$ fehlt,
2) « P^{11} und P^{12}, « « « « « $P^{11} = 6^{0}58'$ «
3) « P^{67} und P^{68}, « « « « « $P^{68} = 6^{0}22'$ «
4) « P^{68} und P^{69}, « « « « « $P^{69} = 40^{0}30'$ «
5) « P^{75} und P^{76}, « « « « « $P^{75} = 5^{0}22'$ «
6) « P^{76} und P^{77}, « « « « « $P^{76} = 4^{0}53'$ «

In den Vierecken 1) und 2) sind alle vorhandenen Winkel mit beiden Winkelmessern und von 2 Beobachtern gemessen. Die Uebereinstimmung bürgt dafür, dass kein Versehen vorgefallen ist. Der Berechnung liegen die vom grossen Universalinstrument erhaltenen Ablesungen zum Grunde, und es sind daher die Resultate für die Entfernungen in den 4 Dreiecken dieser beiden Vielecke den andern an Genauigkeit gewiss nicht nachstehend.

Im Vierecke 3) sind im ersten Dreiecke nach P^{67} alle 3 Winkel gemessen, und die Ausgleichung ist nach dem Verhältniss der Genauigkeiten 3 : 1 gemacht. Die Seiten dieses Dreiecks wären also ebenso genau, wie in andern, wenn nicht der auffallend kleine Gegenwinkel der Basis, von $2^{0}26'$, und die Abweichung von der Normalform, indem die Winkel an der Grundlinie $33^{0}12'$ und $144^{0}21'$ sind, hier einen grössern Fehler hervorriefen. Berechnet man für diesen Fall die Formel $\odot$, so findet sich

der w. F der Seite $P^{67}A^{67}$ gleich 31,9 Zoll } Mittel 30,8 Zoll.
« « « « « $P^{67}B^{67}$ « 29,6 Zoll }

Im andern Dreiecke nach P^{68} ist der Winkel $P^{68} = 6^{0}21'50''$ aus dem Unterschiede der Summe der beiden andern Winkel von $180^{0}0'0''$ abgeleitet, und unterliegt daher einem w. F von $5'',71\sqrt{2} = 8'',07$, der 6 Mal grösser als sonst ist. Die Unsicherheit der beiden Seiten $P^{68}A^{67}$ und $P^{68}B^{67}$ beträgt daher 68,6 Zoll. Dass in diesem Dreiecke kein Versehen vorhanden ist, wird durch die beiden in P^{67} beobachteten partiellen Winkel zwischen A^{67}, P^{68} und P^{68}, B^{67} bewiesen, die sehr genau den gefundenen Werthen der Gegenseiten entsprechen.

Im Vierecke 4) zwischen P^{68} und P^{69}, worin der Winkel in P^{69} fehlt, war dieser Punct so nahe bei der Grundlinie, dass die beiden Gesichtslinien von der Basis zu demselben sich unter einem Winkel von $40^{0}30'$ durchschnitten. Die Entfernungen $A^{68}P^{69}$ und $B^{68}P^{69}$ sind also reichlich genau, so wie gezeigt werden kann, dass in den Winkeln kein Versehen obwaltet. Den Beweis dafür liefern wiederum die beiden partiellen Winkel in P^{68}, wie ich durch Nachrechnung gefunden habe.

Im Vierecke 5) zwischen P^{75} und P^{76} fehlt der spitze Winkel von P^{75}. Für das nach P^{76} liegende Dreieck sind alle 3 Winkel gemessen, und gehörig ausgeglichen. Für das andere Dreieck nach P^{75} ist der w. F des abgeleiteten Winkels wiederum $8'',07$, und die Unsicherheit seiner beiden Seiten beträgt 40,0 Zoll. Auf gleiche Weise ist im Viereck 6) zwischen P^{76} und P^{77}, die Unsicherheit der Seiten des nach P^{76} hin liegenden Dreiecks gleich 88,4 Zoll. In beiden Vierecken 5) und 6) beweisen die partiellen Winkel an der andern Spitze, dass keine Versehen vorhanden sind. Ich hielt es für wichtig in den wenigen Fällen, wo ein Dreieck der Bestätigung durch die Winkelsumme entbehrt, diese Prüfungsrechnung vorzunehmen, um mich zu überzeugen, dass in den horizontalen Entfernungen nirgends eine

Unsicherheit obwaltet, wodurch ein Zweifel an der Richtigkeit der Operation entstände. Es findet sich noch ein einziges Dreieck, worin der Gegenwinkel der Grundlinie, 2°35′, kleiner als 3° ist, im Vierecke zwischen P^{17} und P^{18} nach P^{18} zu. Ich finde, dass für diesen Fall die Unsicherheit der Schenkel des Dreiecks 44,9 Zoll beträgt.

Nach der vorhergehenden Untersuchung können wir für die zwischen P^1 und P^{123} befindlichen 244 Dreiecke, in denen 122 Grundlinien gemessen sind, annehmen, dass bei derjenigen Ausgleichung der Winkel, die bei der Berechnung zum Grunde liegt,

für 239 Dreiecke der wahrsch. Fehler der Schenkel sich um einen Mittelwerth von 9,02 Zoll hält,

in 5 andern Dreiecken aber die Werthe 30,8; 68,6; 40,0; 88,4; 44,9 Zoll annimmt.

Verbinden wir alle diese Fehler, so ergibt sich für die zwischen P^1 und P^{123} liegende gebrochene Linie von 244 Seiten, die von einem Hauptsignal zum nächsten, jedesmal über einen der Basispuncte, geht, eine aus den zufälligen Fehlern der Winkelmessung hervorgehende Unsicherheit der Länge von

$$\sqrt{(9{,}^2 02 \,.\, 239 + 30{,}^2 8 + 68{,}^2 6 + 40{,}^2 0 + 88{,}^2 4 + 44{,}^2 9)} = 191{,}1 \text{ Zoll} = 15{,}92 \text{ Fuss (I)},$$

welche ebenfalls sehr nahezu die des zwischen den Hauptsignalen belegenen Polygons von 122 Seiten ist.

§ 8.

Es fragt sich aber, ob die von unsern Astronomen angewandte Ausgleichungsmethode, die keine strenge ist, auch wirklich eine der Natur der Winkelmessung entsprechende gewesen ist. Mir scheint es bedenklich, die an den Hauptsignalen mit einem sehr vollkommenen Winkelmesser, unter günstigeren äussern Umständen beobachteten Winkel irgend verbessern zu wollen durch die an den Basispuncten mit einem viel schwächeren Instrumente, gewöhnlich bei sehr unruhigen Bildern, gemessenen Winkel, bei deren Messung der Beobachter selbst die Ueberzeugung hatte, dass diese Winkel eigentlich, für die Berechnung der Seiten, nur auf Minuten genau bestimmt zu werden brauchten. Wenn trotz dieses Umstandes die Winkelsummen in den Vierecken und Dreiecken so genau stimmen, dass die w. F. derselben nur 6″,85 und 8″,22 betrugen: so zeigt dies wie gewissenhaft gearbeitet wurde; und beweist dass in den so wichtigen Winkeln an den Dreiecksspitzen nirgends Versehen vorhanden sind. Das von mir ausgesprochene Bedenken ist offenbar auch bei unsern Astronomen mitunter eingetreten. In den Fällen nemlich, wo die stärksten Abweichungen der Summe der Viereckswinkel vorkommen, in den Vierecken 18, 22, 38, 92, 96, 116, wo die Summe zu gross ist um 26″,1, 33″,4, 32″,0, 16″,7, 22″,6, 32″,2, haben sie es nicht gewagt, an die spitzen Winkel in P die diesen Ueberschüssen entsprechenden Correctionen von —3″,3, —4″,2, —4″,0, —2″,1, —2″,8 und —4″,0 anzubringen; sondern sie haben, mit Zuziehung der partiellen Winkel an den Hauptsignalen, einen oder den andern Viereckswinkel an der Basis corrigirt, und dann erst das Viereck ausgeglichen. Dass dies Verfahren willkührlich ist, leuchtet ein, indess zeugt es von Tact, weil dadurch eine grössere Beeinträchtigung der wichtigen Winkel in P vermieden worden ist. Dieselbe Beeinträchtigung wird sich aber ebenso wenig da ableugnen lassen, wo die Summe der Viereckswinkel weniger abweicht, als in diesen äussersten Fällen. Dass aber eine Beeinträchtigung der Pwinkel, durch die angewandte Ausgleichung, wirklich statt gefunden hat, ist mir dadurch klar geworden, dass in den meisten Fällen, durch die Ausgleichung, die Pwinkel eine negative Correction erhalten. Dies rührt daher, dass die Summen der Viereckswinkel vorherrschend einen positiven Ueberschuss gab, indem aus den 116 vollständigen Vierecken die Mittelsumme der Winkel $360^0 0' 4'',56$ war. Im Mittel genommen wäre also durch die angewandte Ausgleichung jeder *P*winkel um $\frac{4,56}{8} = 0'',57$ verkleinert worden, wenn dieselbe nicht bei den stärksten Abweichungen unterblieben wäre. Hierdurch ist die mittlere Verkleinerung auf $0'',45$ gekommen, wie sie sich ergibt wenn man, Seite 145—219, alle beobachteten *P*winkel der Vierecke mit denen vergleicht, die als verbesserte dabei stehen. Eine Veränderung der *P*winkel in einem bestimmten positiven oder negativen Sinne ist aber ganz unvereinbar mit der Natur des grössern Universalinstruments und der angewandten Beobachtungsmethode. Da der Mittelwerth der *P*winkel $5^0 44' 44''$ beträgt, wovon $0'',45$ nahezu der 45855ste Theil ist, so sind in jedem Dreiecke die Seiten um diesen Theil zu gross gefunden, also im Mittel um 3,07 Zoll. Dieser Fehler ist zwar gegen den zufälligen Fehler einer Dreiecksseite, der 9,02 Zoll beträgt, unerheblich; er bekommt aber seine Bedeutung, weil er auf alle Längen in demselben Sinne einwirkt; und wir folgern: dass alle in unserm Werke enthaltenen linearen Dimensionen um $\frac{1}{45855}$ verringert werden müssen. Auf die Länge der ganzen Linie von P^1 bis P^{123} beträgt die anzubringende Verbesserung -747 Zoll $= -62$ Fuss 3 Zoll (II).

§ 9.

Die Sicherheit der linearen Grössen wird aber noch besonders von der Genauigkeit der gemessenen Grundlinien bedingt. Sabler setzt, Seite 389, den wahrscheinlichen Fehler einer Basismessung auf 0,5 Zoll oder $\frac{1}{28000}$ der Länge. Hierunter ist nur derjenige zufällige Fehler verstanden, den die Operation selbst wenn mehrfach wiederholt zu erkennen gibt. Es wird also aus dieser Quelle eine Unsicherheit von 5 Zoll auf einen mittleren Dreiecksschenkel *S*, und von 10 Zoll auf die mittlere Entfernung *E* zweier Hauptsignale hervorgerufen, die für die ganze Linie von P^1 bis P^{123} einen w. F. von $10\sqrt{122} = 110,5$ Zoll erzeugt (III).

Das bei der Messung angewandte Grundmaass, eine eiserne Scale von $3^1/_2$ Fuss, war auf 0,01 Linie sicher. Ebensoviel kann bei der Abnahme desselben mit dem Stangenzirkel zur Uebertragung auf den 14füssigen hölzernen Maassstab gefehlt werden. Das von diesem angegebene Maass von 14 Fuss kann also einem Fehler von $0,04\sqrt{2} = 0,057$ Lin. unterworfen sein, oder nahezu $\frac{1}{35000}$ der Länge. Alle linearischen Grössen können also nicht sicherer als $\frac{1}{35000}$ ihres Betrages sein, woraus für das Polygon von P^1 bis P^{123} eine Unsicherheit von 978 Zoll oder 81,5 Fuss folgt (IV).

Jetzt sind wir im Stande alle Fehler, indem wir sie insgesammt als zufällige ansehen, zu vereinigen, und finden für die in unserm Werke gegebene Länge der ganzen Linie von P^1 bis P^{123}, den w. F $\sqrt{(191^2 + 747^2 + 110^2 + 978^2)} = 1250$ Zoll oder 104,2 Fuss. Wenn aber alle linearen Grössen um $\frac{1}{45855}$ verringert werden, wird der w. F der ganzen gebrochenen Linie von 34245610 Zoll nur 1002 Zoll $=$ 83,5 Fuss betragen, was nahezu $\frac{1}{34000}$ der Länge beträgt.

Wenn in der obigen Untersuchung einige zum Grunde gelegte Annahmen auch nicht ganz scharf sind, so glaube ich doch aus derselben zu folgendem Schlusse berechtigt zu sein:

die horizontalen auf der Operationslinie selbst genommenen Entfernungen zwischen zwei beliebigen Signalen können für innerhalb $\frac{1}{30000}$ genau angesehen werden. Da die Unsicherheit des Grundmaasses und seine Uebertragung allein eine Unsicherheit von $\frac{1}{35000}$ erzeugte, so ergibt sich dass die Unsicherheit der Entfernungen nur um ein geringes durch die Unvollkommenheit der Winkelmessung gesteigert worden ist. Dies ist dem Umstande zuzuschreiben, dass die ganze Linie aus einer grossen Zahl unabhängig gemessener Theile zusammengesetzt ist, wobei ein in einem Theile vorhandener Fehler gar keinen weitern Einfluss auf die andern Theile äussert.

Durch das vorstehende habe ich die in unserm Werke gegebenen horizontalen Lineargrössen gehörig gewürdigt und ihre ausgezeichnete Sicherheit bewiesen. Ich kann aber nicht zugeben, dass diese Grössen auf den Grad der Genauigkeit Anspruch machen dürfen, welchen ihnen Sabler, Seite 390, zuschreibt, indem er den w. F. der ganzen Länge der Linie P^1 bis P^{124} zu 12 Fuss ansetzt, oder zu $\frac{1}{240000}$ der Länge.

§ 10.

Die Genauigkeit einer geodätischen Operation hängt nicht allein von der Sicherheit der Entfernungen (E) zwischen den benachbarten Puncten der gebrochnen Operationslinie ab, sondern ebenfalls von der genauen Bestimmung des Winkels, welchen ein jeder Theil mit dem nächsten macht, oder in unserm Falle von der Schärfe des an jedem Hauptpuncte P^n gemessenen Winkels zwischen P^{n-1} und P^{n+1}, den wir mit Π^n bezeichnen wollen. Diese Winkel sind an 114 Hauptpuncten, von den 122 zwischen P^1 und P^{124} liegenden, gemessen worden, wie die Zusammenstellung der Richtungsablesungen Seite 19—45 ausweiset. Es fehlen überhaupt nur:

in P^2	die Richtungen	P^1 und P^3	in P^{14}	die Richtung	P^{15}
« P^3	« «	P^2 und P^4	« P^{39}	« «	P^{40}
« P^{11}	« «	P^{12}	« P^{70}	« «	P^{71}
« P^{12}	« «	P^{11}	« P^{104}	« «	P^{105}.

Es ist aber zu beachten, dass durch diese fehlenden Π die Verbindung keine Unterbrechung leidet, indem diese Verbindung ebenso vollständig durch den zwischen den vorhergehenden und nachfolgenden Basispuncten, von jedem P aus, beobachteten Winkel, nebst den Winkeln an den zugehörigen Basispuncten bewirkt wird. Nur ist die Verbindung durch die Winkel Π die sicherere, weil sie durch Linien von doppelter Länge geht, deren Richtungen alle mit dem grossen Instrumente gemessen wurden, während bei der andern Verbindung auch die an den Basispuncten minder genau beobachteten Winkel einwirken. Dass in den Richtungsablesungen, welche die Π geben, keine Versehen vorkommen, wird dadurch bewiesen, dass in allen Dreiecken $P^nA^nP^{n+1}$ und $P^nB^nP^{n+1}$, die wir die *flachen Dreiecke* nennen können, die Summe der 3 Winkel ebenfalls zu $180^0 0' 0''$ stimmt, und die partiellen spitzen Winkel an dem Signalpuncte P^n auf denselben Richtungsablesungen beruhen, welche den Winkel Π^n geben. Man sieht, dass die Winkel Π die eigentliche Grundlage der Verbindung der Theile der Operationslinie bilden, und dass es daher wichtig ist, die Genauigkeit dieser Winkel zu erwägen.

Dies ist um so nöthiger, da Sabler selbst, Seite 390, die Genauigkeit der Winkel Π gewissermaassen verdächtigt. Er erklärt nämlich die Unterschiede der an den 7 Hauptpuncten beobachteten Azimute, welche sich zeigen, wenn man das eine Azimut durch Zuziehung der Zwischenwinkel der trigonometrischen Operation auf das nächste reducirt, vorzugsweise aus der Unsicherheit der Winkel Π, ohne aber diese Unsicherheit einer numerischen Bestimmung zu unterwerfen. Ganz richtig weiset er die Quelle der Unsicherheit nach in der Unvollkommenheit der Centrirung der Winkel in den Hauptpuncten P^n, in Folge einer möglichen Abweichung der hohen Signalstangen von der Senkrechten, indem die Stellung des Instruments jedes Mal auf die Axe der Stange, in gleicher Höhe mit ihm, bezogen wurde. Es ist aber ersichtlich, wenn ein Centrirungsfehler z. B. in P^{n+1} vorhanden ist, dass dieser für die Richtungen A^n, B^n wegen der gleichen Entfernungen und der Kleinheit des zwischenliegenden Winkels sehr nahe gleich sein wird, und sich also für den Pwinkel des spitzen Dreiecks $A^n P^{n+1} B^n$ aufhebt. Sabler hält daher auch alle Winkel dieser Form für bis auf 0,″1 genau centrirt.

Anders ist es aber mit den spitzen Winkeln in den flachen Dreiecken zwischen P^n, A^n und P^{n+1}. Ist hier ein Centrirungsfehler z. B. in P^{n+1}, so wird er auf die beiden Richtungen $P^{n+1}A^n$, und $P^{n+1}P^n$ sehr nahezu so wirken, dass er für die erste doppelt so gross als für die letzte ist, also auf den Winkel selbst mit seinem einfachen Betrage für die Richtung $P^{n+1}P^n$ einwirkt. Dieser Umstand setzt uns in den Stand den wahrsch. Werth des Centrirungsfehlers für diese Richtung zu finden.

Es finden sich nemlich, in der Zusammenstellung Seite 195 bis 219, 220 flache Dreiecke in denen alle 3 Winkel gemessen sind, und wir finden, aus der Abweichung der Winkelsumme von 180°0′0″,

den wahrsch. Fehler eines gemessenen flachen Dreiecks = 5,″64, und $5{,}64^2 = 31{,}81$.

Seite x hatten wir aber erhalten

den wahrsch. Fehler eines gemessenen Vierecks = 6,″85, und $6{,}85^2 = 46{,}92$.

Wenn wir nun kennen

e den w. F eines mit dem grossen Universalinstrument in P^n beobachteten Winkels, abgesehen von dem Einfluss der Centrirung;

me den w. F eines in A^n oder B^n beobachteten Winkels zwischen P^n und P^{n+1}, für welchen kein Centrirungsfehler existirt;

endlich r den wahrscheinlichen Betrag, den die Unvollkommenheit der Centrirung auf die centrirte Richtung $P^n P^{n+1}$ ausübt:

so finden wir für obige beide Quadrate folgende Gleichungen

$$2\,(me)^2 + 2e^2 = 46{,}92$$

$$(me)^2 + 2e^2 + 2r^2 = 31{,}81.$$

Hieraus folgt sogleich:

$$e^2 + 2r^2 = 8{,}35;\quad r^2 = \frac{8{,}35 - e^2}{2};\quad r < 2{,}''04.$$

Nehmen wir den Seite x gegebenen kleinern Werth $e = 1{,}''32$, so erhalten wir den bestimmten Werth $r = 1{,}''82$. Betrachten wir nun den Winkel Π, so ist es klar, dass der Centrirungsfehler in P^{n+1} sowohl für die Richtung P^n als für die Richtung P^{n+2} dieselbe Grösse hat, aber in entgegengesetztem Sinne, so dass der Einfluss desselben auf den Unterschied der beiden Richtungen, oder den Winkel Π, gleich $2r$ sein wird. Ausserdem ist aber der Winkel Π noch dem w. F. e unterworfen, wie jeder mit dem grossen Universalinstrument gemessene Winkel. Bezeichnen wir daher den wahrscheinlichen Fehler des Winkels Π mit π: so haben wir

$$\pi^2 = 4r^2 + e^2 = 16{,}70 - e^2;\ \pi < 4''{,}09.$$

Es ist für den bestimmten Werth π fast gleichgültig, ob wir $e = 1''{,}32$ oder $1''{,}53$ annehmen, ersteres gibt $\pi = 3''{,}87$, letzteres $\pi = 3''{,}80$. Ich bleibe bei $\pi = 3''{,}87$, welcher Werth der Wahrheit sehr nahe kommen muss, da π gewiss kleiner als $4''{,}00$ ist. Dieses würde $e^2 = 0{,}70$ und $e = 0''{,}84$ voraussetzen. So genau ist ein in einem einzigen Satze, in beiden Lagen, mit dem Universalinstrument gemessener Winkel nicht.

Geht die Verbindung, wie einige Male vorkommt, durch einen Basispunct, so tritt der Winkel $P^n P^{n+1} A^{n+1}$ auf, den wir mit Π^1 bezeichnen wollen. Dieser wird einem grösseren w. F. π^1 unterworfen sein, und es ist, wie leicht zu übersehen,

$$(\pi^1)^2 = 9r^2 + e^2 = 37{,}58 - 3{,}5e^2 = 31{,}49, \text{ für } e = 1''{,}32;$$

folglich

$$\pi^1 = 5''{,}61.$$

Für den dann weiterführenden stumpfen Winkel an der Basis ist aber der w. F. oben schon $(f) = 3''{,}98$ ermittelt. Auf diesen folgt sodann wieder ein Winkel Π^1 mit dem w. F. $5''{,}61$, und hierauf treten die Winkel Π wieder an die Reihe.

Die vorstehende Untersuchung reicht hin die Sicherheit einer durch eine Anzahl Zwischenwinkel übertragenen Richtung in jedem vorkommenden Falle zu beurtheilen, und zeigt dass die ausgeführte Arbeit auch in dieser Hinsicht eine vorzügliche Genauigkeit gewährt.

III. Ueber die auf der Operationslinie erhaltenen geodätischen Höhenbestimmungen und deren Genauigkeit.

§ 11.

Bei der Untersuchung der Genauigkeit eines Messungsresultats, das durch eine zahlreiche Folge von Theilwerthen erkannt wird, hat man, neben der Ermittlung der Sicherheit dieser Theilwerthe aus der Betrachtung der obwaltenden Fehlerursachen, eine wichtige Prüfung, so wie mehrfache, von einander unabhängige Bestimmungen dieser Theilwerthe und des aus ihrer Vereinigung hervorgehenden Endergebnisses vorhanden sind. Wir haben oben, Seite III, gesehen, dass unsere Operation, wenn consequent durchgeführt, zu 5 unabhängigen Reihen von Höhenbestimmungen führen musste. Indess erkennen wir, dass diese Reihen nur in Bezug auf die Messung der Zenithdistanzen als gänzlich unabhängig von einander angesehen werden können, und dass, bei den aus den Zenithdistanzen abgeleiteten Höhenunterschieden, für alle 5 Reihen dieselben horizontalen Entfernungen zum Grunde liegen. Wir haben daher zuvörderst zu untersuchen: