

BERICHT AN DIE AKADEMIE

VON

W. STRUVE.

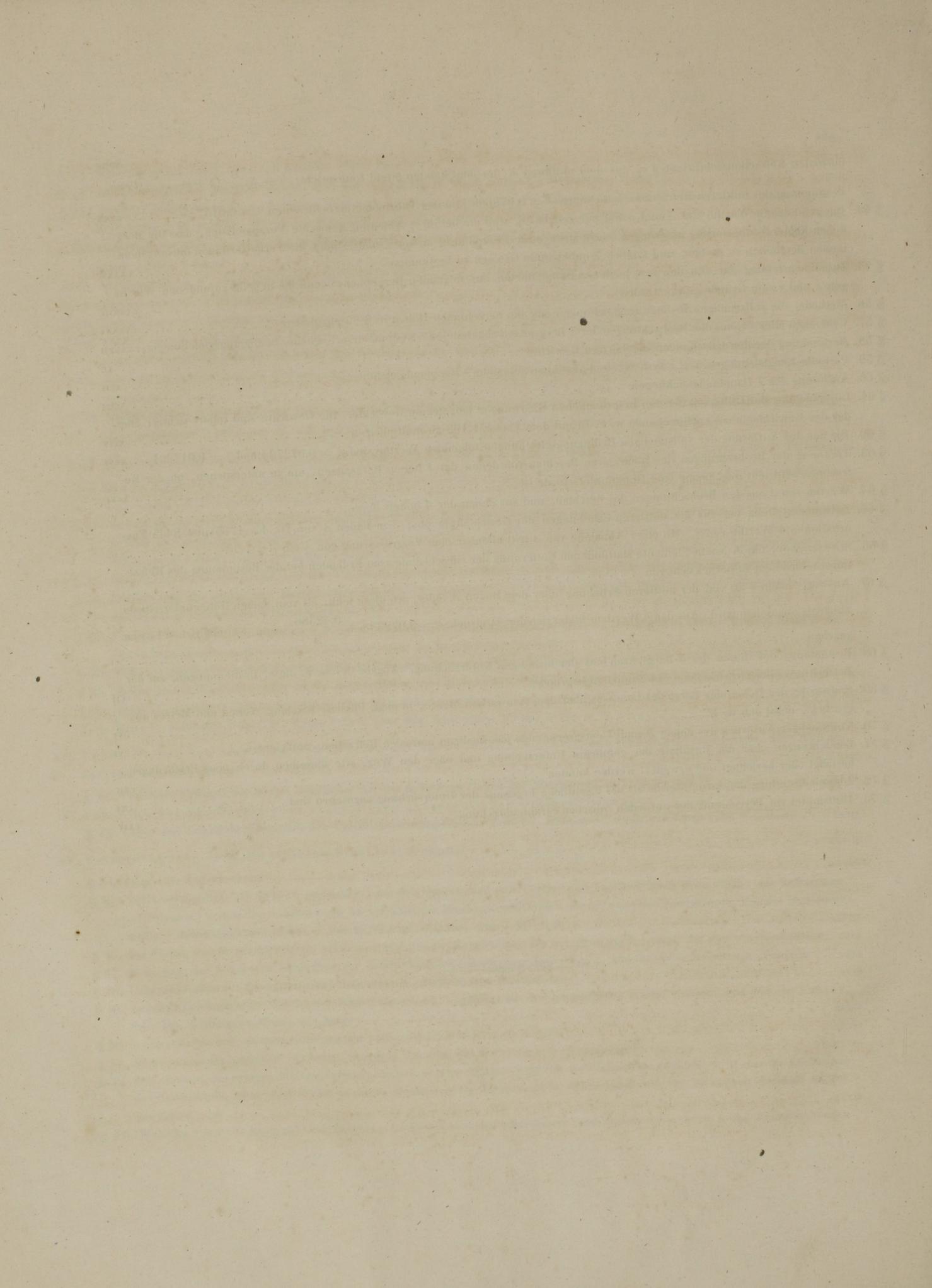
Uebersicht des Berichts.

I. Allgemeines.	Seite
§ 1. Plan der Expedition. Bestimmungen der akademischen Commission	I
§ 2. Wahl der Beobachter. Probearbeit. Instruction	V
§ 3. Uebersicht der Arbeit. Charte	VI
§ 4. Veröffentlichung der vorläufigen Resultate. Bearbeitung der vollständigen Beschreibung. Zweck des Berichts des Herausgebers.	VII
II. Ueber die ausgeführten horizontalen geodätischen Verbindungen und deren Genauigkeit.	IX
§ 5. Die Operationslinie ihren Theilen nach. Mittlere Dimensionen derselben	IX
§ 6. Die Winkelmessung in den einzelnen Vierecken und Dreiecken. Wahrsch. Fehler der Winkel. Ausgleichung derselben	X
§ 7. Aus der Winkelmessung hervorgehende w. F. der Seiten der Dreiecke und der Diagonalen, mit Berücksichtigung der Fälle, wo nicht alle Winkel gemessen sind	XI
§ 8. Kritik der von den Berechnern gewählten Ausgleichung	XIII
§ 9. Einfluss der Grundlinien auf die Genauigkeit der Entfernungen. Allgemeines Resultat für die Sicherheit der horizontalen Abstände.	XIV
§ 10. Untersuchung der Richtungswinkel zwischen den benachbarten Vierecksdiagonalen	XV
III. Ueber die auf der Operationslinie erhaltenen geodätischen Höhenbestimmungen und deren Genauigkeit.	XVII
§ 11. Einfluss der Fehler der horizontalen Abstände auf die einzelnen Höhenunterschiede h und auf den Höhenunterschied der beiden Meere = K	XVII
§ 12. Grenzwert der für K zu erreichenden Sicherheit. Ursachen, die es verhindern, dass dieser Grenzwert erreicht werde	XIX
§ 13. Unzuverlässigkeit des aus den reciproken Beobachtungen direct abgeleiteten Werthes von K , wegen der Biegungscoefficienten der Instrumente. Bestimmung des Unterschiedes $b'' - b'$ der Biegungscoefficienten der beiden Theodoliten	XXI
§ 14. Strahlenbrechung, und deren Abhängigkeit von der Ruhe oder Unruhe der Bilder, nach Sabler's Untersuchung. Negative und positive Unruhe. Charakteristik der Bilder.	XXIII
§ 15. Werth der Strahlenbrechung bei den verschiedenen Zuständen der Bilder, sowohl für die näheren Basispunkte, als für die doppelt entfernten Hauptsignale. Beim normalen Zustande, d. h. bei völlig ruhigen Bildern, ist der Refractionscoefficient unter allen Umständen nahezu derselbe	XXV
§ 16. W. F. der in einem Satze bestimmten Zenithdistanzen, mit Einschluss der Unsicherheit der Refraction. Relative Gewichte der Sätze nach den verschiedenen Bezeichnungen der Bilder. Berechnung der partiellen Höhenunterschiede, nach Sabler, Sawitsch und Fuss	XXVII
§ 17. Ableitung der Reihen (F) und (S) aus den Beobachtungen von Fuss und Sawitsch, so wie der Reihen (Σ) und (P) aus den Beobachtungen von Sabler. Endwerth, den Sabler aus der Verbindung dieser 4 Reihen für den Unterschied des Asowschen und Caspischen Meeres = K findet	XXVIII
§ 18. Beweggründe für eine neue Ableitung von K , aus dem Complexe aller Beobachtungen, nach 5 getrennten Reihen (F), (S), (Σ'), (Σ''), (Σ''')	XXIX
§ 19. Prüfung der jedesmal angewandten Refractionen, und Umrechnung für einige partielle Höhenbestimmungen von Sabler	XXIX
§ 20. Verbesserung einiger partiellen Höhenbestimmungen von Sawitsch	XXX
§ 21. Verbesserungen einiger partiellen Höhenbestimmungen von Fuss. Ungewöhnliche Refraction auf einer Gesichtslinie $P^{28} B^{28}$, ohne dass ein ähnliches Phänomen auf den benachbarten Linien stattfindet	XXXI
§ 22. Allgemeines Verfahren bei der Ableitung der Zahlenwerthe der 5 Reihen aus dem vorhandenen Material	XXXII

	Seite
§ 23. Besondere, bei dieser Ableitung berücksichtigte Punkte	XXXIV
§ 24. Tafel I. Höhen der Basispunkte über dem Asowschen Meere, nach Sabler's Messungen. Reihe (Σ').	XXXVII
§ 25. Tafel II. Zusammenstellung der Höhen über dem Asowschen Meere, für alle Hauptpunkte P^1 bis P^{124} nach den 5 unabhängigen Reihen der 3 Beobachter. Werth des Höhenunterschiedes K nach den 5 Reihen	XXXIX
§ 26. Untersuchung über die w. F. der in den Reihen (F) und (S) erhaltenen Zahlenwerthe. Vergleichung dieser beiden Reihen in ihrem ganzen Verlaufe	XLII
§ 27. Ableitung der w. F. der in den Reihen (Σ'), (Σ''), (Σ''') enthaltenen Zahlenwerthe	XLIV
§ 28. Vergleichung der 5 Reihen in ihrem ganzen Verlaufe	XLVI
§ 29. Verbindung der 5 Werthe von K zu einem Mittelwerth A , nach den w. F. der einzelnen K	XLVI
§ 30. Vortheilhaftere Vereinigung der 5 Reihen, durch Berücksichtigung der zwischen den Werthen in (F) und (S) einerseits und (Σ') andererseits, so wie ebenfalls zwischen den Werthen in (Σ'') und (Σ''') obwaltenden Reciprocität der Beobachtungen	XLVII
§ 31. Numerische Bestimmung des Gewinns an Genauigkeit, der durch die Messung aus der Mitte in den Reihen (F) und (S) erzeugt worden ist.	XLVII
§ 32. Berücksichtigung der durch die Messung aus der Mitte bewirkten Compensation bei den w. F. der durch die Reihen (Σ'), (Σ''), (Σ''') gegebenen Werthe von K , und hierauf begründete neue Vereinigung aller 5 Werthe zu einem Mittel	XLIX
§ 33. Vergleichung der beiden unabhängigen vereinten Reihen $B = \frac{\frac{1}{2}(F+S) + \Sigma'}{2}$ und $C = \frac{\Sigma'' + \Sigma'''}{2}$ in ihrem ganzen Verlaufe, und darauf begründete Bestimmung des w. F. des aus der so ausgeführten Verbindung der 5 unabhängigen Reihen abgeleiteten Endwerthes des Höhenunterschiedes beider Meere	XLIX
§ 34. Beweis des Satzes, dass die Ableitung des Endwerthes für K , aus den 5 in ihrem ganzen Verlaufe gesonderten Reihen, mit einem Verlust an Genauigkeit verbunden ist. Es ist daher ein jedes $p^n = p^{n+1} - p^n$ sofort aus der Verbindung aller diese Grösse bestimmenden Operationen, die in den 5 Reihen vorhanden sind, abzuleiten, und K muss aus der Summe $\Sigma(\nu)$ gefunden werden.	LI
§ 35. Punkte, die zu beachten sind, um dies Verfahren für unsere Operation in Anwendung zu bringen. Allgemeine Vorschriften	LII
§ 36. Bestimmung des ersten und letzten Intervalls $P^2 - P^1$ und $P^{124} - P^{123}$ aus reciproken Zenithdistanzen. Untersuchung der Biegungscoefficienten der 3 Instrumente hiefür	LIV
§ 37. Prüfung der für die ν angegebenen w. F. durch die Uebereinstimmung der getrennten Werthe B und C , für alle Punkte. Einführung der in benachbarten ν obwaltenden Compensation in die Bestimmung der w. F.	LVI
§ 38. Tafel III. Definitive Höhen der Hauptpunkte über dem Asowschen Meere; deren w. F.	LVI
§ 39. Endwerth des Höhenunterschiedes der beiden Meere, und dessen aus der Berücksichtigung aller Fehlerquellen abgeleiteter w. F.	LX
§ 40. Tafel IV. Definitive Höhen der Basispunkte über dem Asowschen Meere; deren w. F.	LX
§ 41. Tafel V. Definitive Höhen der festen Punkte über dem Asowschen Meere; deren w. F.	LXII
IV. Ueber die von den verschiedenen Punkten der Operationslinie erhaltenen Höhenbestimmungen der Hauptspitzen des Caucasus	LXII
§ 42. Verbesserte Höhen der Berge, begründet auf den definitiven Höhen der Standpunkte in Tafel III und IV.	LXIII
V. Ueber die aus den Operationen abgeleiteten geographischen Ortsbestimmungen	LXVI
§ 43. Länge von Nowotscherkask nach den Chronometerexpeditionen. Tafel IV. Definitive Breiten und Längen der Fixpunkte	LXVII
VI. Untersuchungen über die irdische Strahlenbrechung	LXVIII
§ 44. Zweck der Untersuchung.	LXVIII
§ 45. Verbesserung der von Sabler gegebenen, auf den Operationen des Nivellements begründeten 2 Mittelwerthe der Refractionscoefficienten, wegen der von ihm nicht berücksichtigten Biegungscoefficienten der angewandten Instrumente. Hieraus abgeleitete mittlere Refractionscoefficienten λ , für 29,00 engl. Zoll Bar. und $+16^0,0$ R.	LXVIII
§ 46. Die Curve, welche der Lichtstrahl bei den nicht normalen Refractionen des Nivellements durchlief, war eine unsymmetrische.	LXIX
§ 47. Benutzung der bekannten Berghöhen zur Ermittlung der jedesmaligen Refraction ρ , und ihres Coefficienten μ . Formeln	LXXI
§ 48. Uebersicht aller zur Berechnung der Refractionen erforderlichen Hilfsgrossen	LXXI
§ 49. Zusammenstellung aller Werthe der Strahlenbrechung, abgeleitet aus den beobachteten Zenithdistanzen, und den von Sabler, Seite LXV, bestimmten Höhen der Berge	LXXIII
§ 50. Anmerkungen zur Zusammenstellung der beobachteten Refractionen in § 49	LXXVI
§ 51. Bezeichnung der gestellten vierfachen Aufgabe. Theilung des Materials in 3 Hauptgruppen	LXXVIII
§ 52. Der normale, bei ruhigen Bildern stattfindende Refractionscoefficient wird von der Temperatur geändert; es ist aber die Aenderung des Coefficienten mehr als drei Mal so gross, als die von der Temperatur bewirkte Aenderung der Dichtigkeit der Luft am Ort des Beobachters	LXXIX
§ 53. Wahl der Form des Ausdrucks zur Ableitung des dem jedesmaligen Barometer- und Thermometerstande B und T entsprechenden	

normalen Refractionscoefficienten μ , aus dem mittleren λ , der den Ständen b und t entspricht: $\mu = \lambda \cdot \frac{B}{b} \cdot (1 + \gamma)^{t-T}$. Erste	
Bestimmung des mittleren Refractionscoefficienten $\lambda = 0,073689$ und des Thermometercoefficienten $\gamma = 0,015725$	LXXX
§ 54. Die gefundenen Werthe von λ und γ sind nur genäherte, weil die bei ihrer Ableitung gemachte Voraussetzung, dass die Berghöhen keiner Verbesserung unterliegen, nicht strenge ist. Es sind also, ausser λ und γ , noch die Verbesserungen der angenommenen Berghöhen zu suchen, und folglich 7 unbekannte Grössen zu bestimmen	LXXXII
§ 55. Zusammenstellung der von den verschiedenen Standpuncten aus folgenden Berghöhen, wenn die in § 53 gefundenen Werthe von λ und γ zum Grunde gelegt werden	LXXXIII
§ 56. Methode, die vollständigen Bedingungsgleichungen aus den berechneten Höhen in § 55 abzuleiten	LXXXVI
§ 57. Uebersicht aller 71, aus den Beobachtungen der 5 Bergspitzen abgeleiteten 5 Systeme ursprünglicher Bedingungsgleichungen.	LXXXVII
§ 58. Bestimmung der den Gleichungen zugehörigen Gewichte	XC
§ 59. Partielle Endgleichungen der 5 Systeme, und aus ihnen folgende 7 Hauptendgleichungen	XCII
§ 60. Auflösung der 7 Hauptendgleichungen	XCIII
§ 61. Untersuchung der Gültigkeit der den ursprünglichen Gleichungen beigelegten Gewichte. Die Gewichte sind relativ richtig, aber der der Gewichtseinheit entsprechende w. F. ist mit dem Factor 1,103 zu multipliciren	XCIV
§ 62. Die aus der Auflösung der vollständigen Bedingungsgleichungen folgenden Werthe sind $\lambda = 0,072734$ und $\gamma = 0,014261$	XCVI
§ 63. Trennung der Beobachtungen des niedrigeren Beschtau von denen der 4 hohen Bergspitzen, um zu untersuchen, ob der Refractionscoefficient unabhängig vom Höhenunterschiede ist	XCVI
§ 64. Werthe von λ aus den Beobachtungen des Beschtau, und aus denen der 4 hohen Berge.	IC
§ 65. Zusammenstellung der für die mittleren Erhöhungen der Gesichtslinie über dem Boden A von 16, 42, 1765 und 8435 Fuss erhaltenen 4 Werthe von λ . Mit einer Abnahme von A tritt offenbar eine Vergrößerung von λ ein	IC
§ 66. Schwierigkeit, die in jedem Elemente stattfindende Entfernung der Gesichtslinie vom Erdboden bei der Bestimmung des Refractionscoefficienten zu berücksichtigen	C
§ 67. Ausweg, indem λ als von der mittleren Erhebung über dem Boden A , oder, wo diese fehlt, als vom halben Höhenunterschiede abhängig angesehen wird. Aus den 4 Werthen findet sich der Ausdruck $\lambda = 0,072383 + \frac{0,42586}{A}$, wenn A in englischen Fussen gegeben	CI
§ 68. Bestimmung der Höhen der 5 Bergspitzen aus der bisherigen Untersuchung. Angabe der w. F. dieser Bestimmungen, auf der Betrachtung aller einwirkenden Fehlerquellen begründet	CII
§ 69. Endwerthe der Höhen der Berge des Caucasus über dem Asowschen Meere, in engl. Fussen, Saschen, Toisen und Mètres ausgedrückt, nebst den w. F.	CVI
§ 70. Vollständiger Ausdruck des einem B und T entsprechenden jedesmaligen normalen Refractionscoefficienten	CVI
§ 71. Betrachtungen über die Resultate der geführten Untersuchung und über den Weg, wie dieselben durch neue Erfahrungen bestätigt oder berichtigt und erweitert werden können	CVII
§ 72. Zusammenstellung der Sätze, welche als das eigentliche Ergebniss der Untersuchung anzusehen sind	CXI
§ 73. Hilfsmittel zur Berechnung der normalen irdischen Strahlenbrechung	CXIV





I. Allgemeines.

§ 1.

Im April 1836 überreichten die Akademiker Parrot, Lenz und Struve der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften einen Vorschlag zur Ausführung einer genauen geodätischen Bestimmung des Höhenunterschiedes des Schwarzen und Caspischen Meeres. Der in Erwägung gezogene und gutgehiessene Plan ward von der Akademie zur Kenntniss des Präsidenten und Ministers des öffentlichen Unterrichts, Hrn. von Ouvaroff gebracht, und erhielt auf dessen Verwendung, nach Beistimmung des damaligen Finanzministers Grafen Cancrin, die Allerhöchste Bestätigung Sr. Majestät des Kaisers, nebst Bewilligung einer Summe von 14236 Silber-Rubeln aus dem Reichsschatze zur Bestreitung der Kosten.

Die Akademie ernannte hierauf eine aus den Herren Collins, Parrot, Ostrogradsky, Lenz und mir zusammengesetzte Commission um den Plan genauer durchzuarbeiten.

Die Bestimmung des Höhenunterschiedes zwischen zwei entfernten Punkten kann auf geodätischem Wege, im Gegensatz zum barometrischen genommen, entweder nach der *geometrischen* oder nach der *trigonometrischen* Methode ausgeführt werden. Bei der ersten, dem gewöhnlichen Nivellement, werden nach einander die Höhenunterschiede der einzelnen horizontalen Gesichtslinien durch unmittelbare Ausmessung an senkrechten Maasstäben ermittelt. Bei der trigonometrischen werden die einzelnen Höhenunterschiede der auf einander folgenden Standörter aus deren Entfernungen und den beobachteten Zenithdistanzen abgeleitet.

Die Commission entschied für die Anwendung der zweiten, wissenschaftlicheren Methode, der trigonometrischen, weil sie, wenn gut angeordnet, sehr scharfe Prüfungen der Resultate darbieten musste, vorzüglich aber weil sie Mittel gewährte mit der Höhenbestimmung eine geodätische Aufnahme der ganzen Operationslinie zu verbinden, und so durch Hinzuziehung der erforderlichen astronomischen Beobachtungen genaue Grundlagen der Geographie jener Gegenden zu liefern versprach, die sich bis auf die

Ortsbestimmung einzelner sichtbarer Hauptpunkte des Hochgebirges erstrecken konnten, abgesehen von der Ermittlung der Höhen dieser Gipfel über der Meeresfläche. Die trigonometrische Aufnahme musste, dem Hauptzwecke der Arbeit gemäss, nach einer eigenthümlichen Methode ausgeführt werden. Vielfache Erfahrungen hatten gelehrt, dass in einem Flachlande, wie das worüber die Operationslinie gehen sollte, die irdische Strahlenbrechung, nach verschiedenen Richtungen von einem Standpunkte aus, sich sehr regelmässig ändert, und dass daher von einem mittleren Standpunkte aus der Höhenunterschied zweier nahezu gleich entfernter Gegenstände sich fast unabhängig von der Strahlenbrechung, aus den nach beiden Seiten gleichzeitig beobachteten Höhenwinkeln, ergibt. Wir konnten daher auf mehrfache unabhängige Bestimmungen der partiellen Höhenunterschiede, so wie des Endresultats rechnen, wenn von mehreren Beobachtern zugleich auf verschiedenen Standpunkten gemessen wurde, indem jeder Punkt als der mittlere zwischen zwei andern und als ein correspondirender zu den beiden nächsten angesehen werden durfte.

Eine zunächst zu entscheidende Frage war die, ob ein zusammenhängendes Dreiecksnetz, in dem jeder neue Punkt durch die Richtungen von den beiden vorhergehenden bestimmt wird, ausgeführt werden sollte. Für dieses Netz wären dann zwei Grundlinien, eine am Anfang, eine gegen das Ende zu messen gewesen. Die Commission war gegen diese Anordnung, weil sie theils Mangel an geeigneten Standpunkten, und Schwierigkeiten bei der Errichtung einer Menge bleibender grösserer Signale fürchtete, theils einen Zeitverlust voraussah bei der Messung so vieler Horizontalwinkel auf Punkten, die sich über eine breite Fläche ausdehnten; endlich vorzüglich weil es schien, dass die Bedingung der Sichtbarkeit eines jeden Punktes von den zwei nächstvorhergehenden hindernd werden würde gegen eine Auswahl von möglichst gleichweit entfernten Standpunkten, zwischen welchen die Höhenbestimmung die vortheilhafteste ist. Statt der gewöhnlichen Dreiecksmessung wurde daher ein Verfahren gewählt, das sich folgendermaassen darstellt.

Man denke sich die zu vermessende Linie abgetheilt, so genau es die Umstände erlauben, in gleiche Strecken von etwa 7 Werst Länge, durch eine fortlaufende Reihe von Haupt-Signalpunkten P, P^1, P^2, \dots . Zwischen je zwei zunächst gelegenen Signalen P^n und P^{n+1} , Fig. 5, wird nahezu auf der Mitte eine kleine gegen dieselben symmetrisch gelegene Basis $A^n B^n$ gemessen. Aus ihr finden sich, durch die in den Punkten A^n, B^n, P^n und P^{n+1} gemessenen Horizontalwinkel, die Seiten des zwischen P^n und P^{n+1} belegenen Vierecks, so wie dessen grosse Diagonale. Wird ebenso zwischen P^{n+1} und P^{n+2} verfahren, mit Messung einer neuen Grundlinie $A^{n+1} B^{n+1}$, so bieten die beiden Diagonalen $P^n P^{n+1}$ und $P^{n+1} P^{n+2}$ eine geodätische Verbindung dar, so wie der in P^{n+1} gemessene Winkel zwischen P^n und P^{n+2} hinzukommt. Man ersieht, dass auf diese Weise eine Folge von Linien $P^1 P^2, P^2 P^3$ u. s. w. erhalten wird, die in vollständiger Verbindung stehen und für die Ableitung jedes geodätischen Resultats geeignet sind, so wie an irgend einem der Punkte P^n (oder an mehreren) die Polhöhe desselben und das Azimuth der Linie $P^n P^{n+1}$ bestimmt sind.

Nehmen wir nun an dass für die Höhenbestimmungen drei Beobachter gleichzeitig in B^{n+1}, P^{n+1} und B^n die Zenithdistanzen der zunächst gelegenen Punkte messen, und zwar so dass

der vorangehende Beobachter I, am Basispunkte B^{n+1} , die der Objecte P^{n+1} und P^{n+2} ,
 « mittlere « II, am Hauptsignal P^{n+1} , « « « P^n, B^n, B^{n+1} und P^{n+2} ,
 « nachfolgende « III, am Basispunkte B^n , « « « P^n und P^{n+1}
 erhält: so ergeben sich hieraus folgende vier unabhängige Höhenbestimmungen von einer mittleren Station aus:

- durch den Beobachter I, zwischen den Hauptsignalen P^{n+1} und P^{n+2} ,
- « « « II, zwischen den Hauptsignalen P^n und P^{n+2} ,
 und zwischen den Basispunkten B^n und B^{n+1} ,
- « « « III, zwischen den Hauptsignalen P^n und P^{n+1} .

Ausserdem aber lassen sich auch die gleichzeitigen reciproken Zenithdistanzen zur Bestimmung
 erstens des Höhenunterschiedes zwischen B^n und P^{n+1} ,
 zweitens « « « P^{n+1} und B^{n+1} ,
 folglich zur Ermittlung des Höhenunterschiedes zweier auf einander folgender Basispunkte B^n, B^{n+1}
 verbinden.

Rücken nun die Beobachter gemeinschaftlich, von einem Tage zum andern, um eine Entfernung der Hauptsignale vor, so dass sie sich das nächste Mal gleichzeitig

$$I \text{ in } B^{n+2}, \quad II \text{ in } P^{n+2}, \quad III \text{ in } B^{n+1}$$

befinden; so wird durch dies Verfahren eine ähnliche neue Gruppe von Höhenunterschieden erhalten. Wenn dieses Verfahren demnach auf der ganzen Operationslinie regelmässig fortgesetzt wird, so ist leicht einzusehen, dass es zu fünf unter einander unabhängigen Reihen von Höhenbestimmungen, von mittleren Stationen aus gemessen, führt, deren jede zur Kenntniss des Höhenunterschiedes der beiden Endpunkte der Operationslinie leitet. Diese Reihen sind nämlich:

- 1) die Reihe (F) der Höhenbestimmungen des Beobachters I (Fuss), von allen Basispunkten B aus zwischen allen Hauptsignalen P ,
- 2) die Reihe (S) derselben Höhenbestimmungen, wie in 1), aber durch die Messungen des Beobachters III (Sawitsch) erhalten, der in der Regel an jeden gewählten Basispunkt*) um einen Tag später als der Beobachter I kommt;
- 3) die Reihe (Σ') der Höhenbestimmungen des Beobachters II (Sabler), von allen Hauptsignalen P aus zwischen allen aufeinanderfolgenden Basispunkten B ;
- 4) Die Reihe (Σ'') der Höhenbestimmungen des Beobachters II, von den graden Hauptsignalen aus beobachtet zwischen den ungraden Hauptsignalen; also von P^2 aus zwischen P^1 und P^3 ; von P^4 aus zwischen P^3 und P^5 u. s. w. bis zum letzten ungraden Hauptsignale;

*) Von den beiden Basispunkten A und B ward nämlich jedes Mal der der Oertlichkeit nach geeignetste gewählt, der bald A , bald B sein wird, so dass also die Beobachtung der Zenithdistanzen immer nur von einem Basispunkte aus geschah, aber von beiden Beobachtern von demselben aus. Der Kürze halber werde ich im Text den gewählten Basispunkt immer B-punkt nennen, wie er es auch in der Regel war, obgleich einige Mal auch von einem A-punkt aus beobachtet wurde. Ich bemerke hierbei dass in Fig. 5. ein kleiner Fehler der Bezeichnung vorkommt und dass A^n und B^n umzusetzen sind. In den Tagebüchern ist nämlich ohne Ausnahme, von P^n aus gesehen, der rechts vorausliegende Basispunkt B^n , der links liegende A^n

5) die Reihe (Σ''') der Höhenbestimmungen des Beobachters II, von den ungraden Hauptsignalen aus beobachtet zwischen den graden Hauptsignalen; also von P^5 aus zwischen P^2 und P^4 ; von P^5 aus zwischen P^4 und P^6 u. s. w. bis zum letzten graden Hauptsignale.

Man ersieht dass, wenn die Anzahl der Hauptsignale eine ungrade ist, die Reihe 4) die Verbindung der Endpunkte vollständig ausführt, dass aber, wenn die Anzahl eine grade ist, für diese Reihe der Höhenunterschied der beiden letzten Signale besonders als Ergänzung ermittelt werden muss. Ähnliche Ergänzungen an den Enden erheischen die Reihen 5) und 3). Die Reihen 1) und 2) bedürfen ihrer nicht.

Zieht man es aber vor die Höhenbestimmungen auf reciproken Zenithdistanzen zu begründen, so bietet das ganze Material zwei Reihen von reciproken Verbindungen dar:

- 1) durch die gleichzeitigen gegenseitigen Zenithdistanzen in den B^n , P^n und B^{n+1} der drei Beobachter;
- 2) durch die vom Beobachter II gemessenen Zenithdistanzen der P , die aber für jeden einzelnen Höhenunterschied $P^{n+1} - P^n$ an zwei verschiedenen Tagen in P^n und P^{n+1} beobachtet sind.

Es ergibt sich hieraus, dass ein auf diese Weise erhaltenes Material die vorliegende Aufgabe der Höhenbestimmung der Endpunkte sehr vollständig auflöst, und durch alle Theilwerthe hindurch bis zu den mehrfachen Endergebnissen fortlaufende Prüfungen darbietet.

Da für jeden Abstand zweier nächster Hauptsignale P^n , P^{n+1} eine besondere Grundlinie, also im ganzen vielleicht über 100 verschiedene Grundlinien zu messen waren, so durften diese nur verhältnissmässig klein sein und ihre Messung musste, ohne die Genauigkeit zu beeinträchtigen, in kurzer Zeit ausgeführt werden können. Eine für diesen Zweck geeignete Methode der Linienmessung auf dem Felde war von mir seit Jahren bei mehrfachen Gelegenheiten in Anwendung gebracht, und so fand die Commission, dass in einer, beim raschen Fortschreiten der Arbeit, fast täglich zu messenden Grundlinie, von ohngefähr 200 Saschen oder 1400 Fuss Länge, kein Hinderniss vorhanden war, wie es der Erfolg auch bestätigt hat. Von der Grundlinie aus wurde angenommen dass die benachbarten Hauptsignale P etwa $3\frac{1}{2}$ Werst oder 12000 Fuss abstehen sollten. Hierbei ergibt sich, dass die Grundlinie von den beiden nächsten P aus nahezu unter einem Winkel von $6^\circ 40'$ oder $24000''$ erscheint. Wenn also der Winkel in P , zwischen den Endpunkten der Grundlinie, mit dem wahrscheinlichen Fehler einer Secunde gemessen wird, so ist die Unsicherheit in der Entfernung des Hauptpunkts von der Grundlinie nahezu 0,5 Fuss, und hieraus der w. F. einer Distanz $P^n P^{n+1}$ gleich $0,5 \cdot \sqrt{2} = 0,71$ Fuss oder $8\frac{1}{2}$ Zoll, insoweit er von den Winkelmessungen an beiden P abhängt. Es ergibt sich ferner, dass bei 100 zu messenden Grundlinien, und bei Annahme eines w. F. von m'' in den Winkeln bei P , für die Ausdehnung der ganzen Operationslinie, vom ersten bis zum letzten Signale, eine Unsicherheit von $0,71 m \cdot \sqrt{100} = 7,1 m$ Fuss zu fürchten sein wird, oder von 7,1 Fuss, auf eine Linie von 700 Werst, wenn es gelingt die Winkel P mit der Genauigkeit einer Secunde zu messen. Durch Anwendung eines grossen Ertelschen Universalinstruments, wie es bei der russischen Gradmessung gebraucht worden war, hofften wir die erforderliche Sicherheit in der Messung der spitzen Winkel P erreicht zu sehen. Dass auf jeden Fall aus der Kleinheit der Grundlinien keine Beeinträchtigung der Höhenbestimmung zu befürchten war, ergab sich durch folgende einfache Betrachtung. Nehmen wir an, dass im Mittel der Höhenunterschied zweier

benachbarter Signale *P*, die 24000 Fuss von einander entfernt sind, etwa 100 Fuss beträgt, so ergibt sich dass eine Unsicherheit von selbst 2 Fuss in der Entfernung, einen Einfluss von nur 0,1 Zoll auf den Höhenunterschied ausübt, und dass also, bei 100 solchen Gliedern, der Gesamteinfluss auf den Höhenunterschied der Endpunkte nur 1 Zoll beträgt. Durch ähnliche Betrachtungen überzeugt man sich, dass sowohl die zufälligen Fehler der Grundlinien selbst, so wie die kleine Unsicherheit des Grundmaasses, für die Höhenbestimmungen als ganz verschwindend angesehen werden können. Ein anderes ist es mit diesen letzten Fehlerquellen in Bezug auf die Werthe der horizontalen Entfernungen der nächsten Signalpunkte und deren Summen. Hier waren Fehleranhäufungen anzunehmen, aber doch nur solche dass sie die Benutzung der geodätischen Entfernungen für die Zwecke der relativen Ortsbestimmung auf keine erhebliche Weise beeinträchtigen konnten.

§ 2.

Nachdem die Commission sich über diese Hauptgrundlagen der Arbeit geeinigt und zur Ausführung derselben die Herren G. v. Fuss, A. Sawitsch und G. Sabler*) gewählt hatte, übertrag sie mir die Ausarbeitung der Instruction für die Reisenden, die Leitung der ganzen Unternehmung in ihren Einzelheiten bis zur Vollendung, so wie die späterhin erforderliche Leitung der Bearbeitung und der Veröffentlichung des Materials und der daraus zu ziehenden Ergebnisse.

Ehe ich indessen an die Ausarbeitung der Instruction ging, hielt ich es für nothwendig meine gelehrten Freunde durch eine Probearbeit von geeigneter Ausdehnung mit den Einzelheiten einer solchen Operation praktisch aufs genaueste bekannt zu machen. Sawitsch und Sabler waren damals in Dorpat, mit wissenschaftlichen Studien und Arbeiten auf der Sternwarte beschäftigt, Fuss kam aus Petersburg zu uns. Hiedurch sahen wir uns im Stande alles gemeinschaftlich zu berathen, die Instrumente zu prüfen und für die bestimmten Zwecke aufs bequemste einzurichten, alle Hilfsmittel, die mitgenommen werden mussten, zu bereiten, und endlich in der Umgegend von Dorpat die Probearbeit auszuführen, in allen ihren Theilen, der Messung der Grundlinie und der beiderlei Winkel, und mit Anwendung derjenigen Apparate, die auf der Expedition selbst gebraucht werden sollten. Die berechneten Beobachtungen bewiesen hier die Zweckmässigkeit der Operation, und namentlich die grosse Sicherheit der vorzugsweise erzielten Höhenbestimmungen. Auf diese Vorbereitungen ward der Monat Junius 1836 verwandt.

Ich halte es nicht für nöthig hier die Instruction selbst mitzutheilen, da sie nach geringen Abänderungen, deren Zweckmässigkeit die ersten Erfahrungen zu erkennen gaben, die Richtschnur der ganzen Arbeit blieb, und daher auch die Grundlage bildet, auf welcher Sabler die Einleitung des Werkes, Seite 1 bis 17, bearbeitet hat. Diese Einleitung giebt die Einzelheiten der Ausrüstung der Expedition und eine geeignete geschichtliche Uebersicht des Verlaufs derselben, sowie eine Beschreibung des angewandten Beobachtungsverfahrens.

*) Diese drei Gelehrten sind jetzt in ehrenvollen wissenschaftlichen Aemtern. Herr G. von Fuss, früher Astronom in Pulkowa, ist seit kurzem Director der unter der Akademie der Wissenschaften stehenden Sternwarte in Wilna. Herr Sawitsch ist ordentlicher Professor der Astronomie an der Universität in Petersburg, und Herr Sabler Astronom der Hauptsternwarte.

§ 3.

Aus der erwähnten Einleitung ersehen wir, dass die vorbereitenden Arbeiten am Ausrüstungspunkte Nowo-Tscherkask, die astronomischen Beobachtungen zur Ortsbestimmung desselben, und die chronometrische Verbindung dieses Ortes mit dem Dorfe Kagalnik am Asowschen Meere, endlich die Reisen zur Aufstellung der Standbarometer fast zwei Monate in Anspruch nahmen. Unsere Reisenden begannen die eigentliche Feldarbeit am $\frac{20. \text{ October}}{1. \text{ November}}$ 1836, bei Kagalnik. Der eintretende Winter brach sie nach 28 Tagen am $\frac{17.}{29.}$ November ab. Sie wurde am $\frac{23. \text{ März}}{6. \text{ April}}$ wieder aufgenommen, und dann bis zum $\frac{2.}{14.}$ Juli fortgesetzt. Nach einer Unterbrechung bis zum $\frac{29. \text{ Juli}}{10. \text{ August}}$, ward die Arbeit darauf ohne Aufenthalt fortgeführt und am $\frac{19.}{31.}$ October geschlossen. Die Arbeit im Felde hatte also 209 Tage erfordert, in welcher Zeit eine Operationslinie von 823,6 Werst = 118 geographische Meilen geodätisch aufgenommen und nivellirt wurde. Auf dieser Linie waren 124 Hauptsignale P^1 bis P^{124} errichtet, die 123 Intervalle oder Seiten eines ungeschlossenen Vielecks bildeten, zu deren Bestimmung 122 verschiedene kleine Grundlinien gemessen wurden. Die Summe dieser Vielecksseiten giebt die obige Länge der ganzen Linie.

Da die 123 Intervalle in 209 Tagen durchgearbeitet wurden, so kommt auf jedes Intervall, für dessen vollständige Bearbeitung, im Mittel ein Zeitaufwand von 1,70 Tagen, oder es wurden nahezu in 5 Tagen 3 Intervalle fertig. In der Regel aber wurde jedes Intervall, d. h. die Ausführung der zusammengehörigen, Seite 12 und 13 der Einleitung beschriebenen Messungen, im Laufe eines Tages zu Stande gebracht, und wir haben 86 Tage auf Rechnung des beständigen Umzugs, der Störungen durch ungünstige Witterung und der hie und da erforderlichen besondern Vorkehrungen zu setzen.

Auf der unserm Werke beigefügten Charte ist die ganze Operationslinie zwischen Kagalnik am Asowschen Meere und Tschernoi - Rynok am Caspischen verzeichnet, und zwar so dass sie nach den durch die Arbeit selbst gewonnenen Ortsbestimmungen eingetragen wurde, wobei das übrige Detail aus den neuesten vom Chartendepot des Kaiserlichen Generalstabes veröffentlichten Arbeiten entnommen wurde. In der Charte sind die einzelnen Hauptsignale P^1 bis P^{124} durch kleine Kreise auf der Operationslinie bezeichnet, wobei in der Regel jedes fünfte P beigeschrieben worden. Die Messung ging von Kagalnik aus bis zum Signal P^{79} , südlich von Georgiewsk, nahezu in südöstlicher Richtung, in einer Länge von 524 Werst; dann nahm sie von P^{79} bis P^{113} bei Kisljar, auf eine Länge von 213 Werst, nahezu eine östliche Richtung; wandte sich aber nun unter einem spitzen Winkel nach Nordwest, und schloss nach einem Bogen von 86 Werst bei P^{124} . Die kürzeste Entfernung zwischen Kagalnik und P^{124} bei Tschernoi-Rynok ist genau 600 Werst, die Operationslinie machte also einen Umweg von 223 Werst. Seite 6 und 7 der Einleitung sind die triftigen Gründe gegeben, weswegen die angeführte 823 Werst lange Linie gewählt wurde und nicht der kürzeste Weg zwischen beiden Meeren, der auf einer Linie von Kagalnik längs dem Manytsch-Flusse bis zum Dorfe Beloserskaja, am Postwege von Kisljar nach Astrachan, nördlich vom Ausflusse der Kuma, nur 565 Werst beträgt. Wir verdanken dieser Wahl zwei wichtige Gewinne. Der erste ist die genaue Bestimmung der Höhen und der Lage der 3 höchsten Kuppen des Caucasus und des Beschtau. Auf der Charte sind die Hauptgesichtslinien nach den 4 Bergspitzen angege-

ben, aber nicht alle, wie man aus Seite 45 und 46 sieht. Auch erlaubte die Kleinheit des Maasstabes nicht die Seite 45 angegebene Hilfsoperation, zwischen den Nebenpunkten C, D, Q , dem Hauptpunkte P^{70} und dem Beschtau, in die Charte einzutragen. Der zweite wichtigere Gewinn war die genaue Ortsbestimmung von 28 auf der Operationslinie liegenden Punkten, die sich aus der Verbindung der astronomischen Beobachtungen mit der trigonometrischen Messung ergab. Diese Punkte, unter denen sich die zwischen beiden Meeren befindlichen Hauptörter Ciscauciens befinden, werden von nun an eine sichere Grundlage für jede weitere geographische Bearbeitung jener Gegend abgeben.

§ 4.

Abschriften der Tagebücher und briefliche Berichte wurden von den 3 Beobachtern durch die Post nach Dorpat gesandt. Diese setzten mich in den Stand der Akademie über den Fortgang der Arbeit am $\frac{7.}{19.}$ April und $\frac{13.}{25.}$ October 1837 zu berichten. Bald nachher am $\frac{24. \text{ November}}{6. \text{ December}}$ konnte ich derselben die Vollendung der Arbeit anzeigen, so wie das Resultat dass die Oberfläche des Caspischen Meeres ungefähr 100 englische Fuss tiefer als die des Schwarzen liege. Diese Zahl war aus einer vorläufigen Berechnung der in den P^n beobachteten Zenithdistanzen der Basis-Signale B^{n-1} und B^n abgeleitet worden, welche 123 aufeinander folgende Höhenunterschiede zwischen je 2 um etwa 7 Werst von einander entfernten Punkten gaben. Es konnte aber diese Zahl noch auf keine grosse Sicherheit Anspruch machen, obgleich sie hinreichend genau war um die Senkung des Caspischen Meeres unter der Oberfläche des Oceans ausser Zweifel zu setzen.

Als unsere drei Reisenden gegen Ende Februars 1838 wieder in Dorpat vereinigt waren, begannen sie die Bearbeitung des ganzen Materials. Nachdem die Herren Fuss und Sawitsch die horizontalen Entfernungen der Signal- und Basispunkte, durch zwiefache unabhängige Berechnung festgesetzt hatten, war der Weg zur genauen Ermittlung des Höhenunterschiedes beider Meere gebahnt. Sawitsch und Sabler unternahmen diese sofort, und veröffentlichten, mit Zustimmung der Akademie, im Jahre 1839 ihre Resultate in zwei Abhandlungen, welche sie bei der Universität Dorpat zur Erlangung der Doctorwürde einreichten. Diese beiden Schriften haben folgende Titel:

A. Sawitsch, *über die Höhe des Caspischen Meeres und der Hauptspitzen des Caucasischen Gebirges.* Dorpat, 1839.

G. Sabler, *Beobachtungen über die irdische Strahlenbrechung und die Gesetze der Veränderung derselben.* Dorpat, 1839.

Herr Sawitsch giebt in seiner Schrift Seite 22, nach seinen Beobachtungen die Höhe des Asowschen Meeres über dem Caspischen zu 80,3 engl. Fuss, mit einem wahrscheinlichen Fehler von 3,5 Fuss. Herr Sabler findet, Seite 33 seiner Abhandlung, denselben Höhenunterschied nach seinen Beobachtungen gleich 82,8 Fuss \mp 2,0. Aus beiden verbunden folgt 82,2 Fuss, ein Resultat das der Wahrscheinlichkeit nach innerhalb 2 Fuss sicher erschien, und sich auch von dem von Sabler in unserem Werke, Seite 371, gegebenen Werthe nur 1,47 Fuss entfernt, und nur 3,3 Fuss von dem Endergebniss, welches eine strengere Bearbeitung des ganzen Materials in § 39 dieses Berichts uns kennen lehren wird. Die

erste Schrift gab überdiess, wie der Titel schon anzeigt, die von Sawitsch berechneten Höhen der Caucasischen Gebirgsspitzen, und in der andern finden wir Sablers treffliche Untersuchungen über den Gang der irdischen Strahlenbrechung. Beide Schriften mussten von mir als wichtige Vorarbeiten für die vollständige Beschreibung der Expedition angesehen werden.

Die Herausgabe dieser Beschreibung ist aber erst jetzt möglich geworden, indem dringende Umstände eine unerwartet lange Verzögerung veranlassten. Im Frühjahre 1839 verliess ich Dorpat, um die Leitung der neubegründeten Hauptsternwarte in Pulkowa zu übernehmen. Die Herren Fuss und Sabler wurden als Astronomen bei derselben angestellt, und Sawitsch erhielt seine Stellung als Professor an der Petersburger Universität. Es war wohl natürlich dass wir Pulkowaer Astronomen anfangs wenig Musse für die fernere Bearbeitung des so umfangreichen Materials der Caspischen Expedition fanden, und dass sie erst nach einiger Zeit wieder aufgenommen wurde. Dies geschah zunächst dadurch dass die drei Reisenden selbst ihre bisherigen Rechnungen einer sorgfältigen Ueberarbeitung unterwarfen, und dass Fuss sich darauf an die weitere Bearbeitung des eigentlichen geodätischen Materials machte, insofern es, mit Zuziehung der astronomischen Beobachtungen, zur Bestimmung der relativen Ortslagen auf dem Erdsphäroid dienen sollte. Ausserdem übernahm derselbe auch noch die weitläufige Berechnung des ganzen Materials der Barometerbeobachtungen.

So gelangte ich allmählig zu sehr vollständigen Rechnungsergebnissen, welche die drei Reisenden selbst ausgearbeitet, und zum Theil mit umständlichen Erörterungen, ein jeder nach seiner individuellen Ansicht, begleitet hatten. Dies werthvolle Material war aber noch weit entfernt zur sofortigen Herausgabe der Beschreibung verwandt werden zu können. Es fehlte noch das Geschichtliche der Expedition; es bedurften die Ausarbeitungen noch vielfacher Erläuterungen und der Verbindung unter einander; es war eine für den Druck geeignete Ordnung des Ganzen zu machen. Ausserdem erkannte ich aber bald, dass die einzelnen Materialien, nicht sowohl in Bezug auf die wichtigsten Zahlenangaben, die alle sicher waren, als in Bezug auf die aus denselben zu folgernden Endresultate, einer gleichförmigen Bearbeitung unterworfen werden mussten, um eine zusammenhängende gehörig abgerundete Beschreibung der Expedition hervorzurufen. Ich übertrug daher die fernere Redaction des Werkes, für den Druck, Herrn Sabler, der wo nöthig seine Mitarbeiter befragen konnte, für das Ganze aber von mir die nöthigen Vorschriften, und in einzelnen Fällen besondere Beihülfe erhielt. Herr Sabler hat sich dieses Auftrages jetzt erledigt, und so ist endlich das längst versprochene Werk im Drucke vollendet worden, welches, wie das Inhaltsverzeichnis nachweist, in drei Hauptabtheilungen zerfällt: die historische Einleitung, die Zusammenstellung des Materials, und die Berechnung desselben bis zur Ziehung der Endresultate.

Ich könnte hier meinen Bericht schliessen wenn ich es nicht für geeignet hielte, die Ergebnisse derjenigen Untersuchungen hinzuzufügen, zu welchen mich das für die Ausarbeitung dieses Berichts unternommene sorgfältige Studium des gedruckt vorliegenden Werks veranlasst hat, Untersuchungen die theils die einzelnen Operationen, theils die aus denselben abgeleiteten Resultate betreffen. Ueberdiess scheint es mir aber nothwendig den Lesern die Hauptergebnisse der Arbeit übersichtlich zusammenzustellen, und deren definitive numerische Werthe mit der ihnen zukommenden Genauigkeit einer sorgfältigen Durch-

sicht zu unterwerfen. Zu einer kritischen Prüfung der ganzen Arbeit glaube ich nemlich, nach der mir von der Akademie übertragenen Leitung derselben, um so mehr verpflichtet zu sein, als in dem vorliegenden Texte die Resultate so dargestellt sind, wie sie in den einzelnen Ausarbeitungen der drei Astronomen enthalten sind, und von Herrn Sabler als Redactor aus einer einfachen Verbindung der Theilarbeiten abgeleitet wurden.

II. Ueber die ausgeführten geodätischen Verbindungen, und deren Genauigkeit.

§ 5.

Die Operationslinie enthält zwischen den Hauptsignalen P^1 bis P^{123} eine Folge von Vierecken, die zwischen je zwei auf einander folgenden Signalen $P^n P^{n+1}$, Fig. 5, liegen und deren jedes durch eine nahezu auf der Mitte liegende Grundlinie $A^n B^n$ in zwei Dreiecke getheilt ist. Die längeren Diagonalen dieser Vierecke geben die 122 Entfernungen der Hauptsignale, $P^1 P^2$, $P^2 P^3$, u. s. w. bis $P^{122} P^{123}$. Die letzte Entfernung $P^{123} P^{124}$ hat keine eigne Basis, sondern ist aus der vorhergehenden $A^{122} B^{122}$ auf gedoppelte Weise abgeleitet worden. Siehe Seite 219.

Addirt man alle 122 auf einander folgenden Entfernungen der P , so findet sich, nach der Zusammenstellung S. 195 — 219, deren Summe = 34245610 Zoll.*) Die Summe aller 122 gemessenen Grundlinien beträgt aber, nach S. 19 — 45, 1716311 Zoll. Es ist also die mittlere Länge

einer Grundlinie $A^n B^n$, $G = 14068$ Zoll = 1172 Fuss = 6,3349 Werst,

einer Hauptdiagonale $P^n P^{n+1}$, $E = 280702$ „ = 23392 „ = 6,6834 „, $E \sin 1'' = 1,360$ Zoll.

einer Dreiecksseite $P^n A^n$, $S = 140528$ „ = 11711 „ = 3,3460 „, $S \sin 1'' = 0,680$ „.

Folglich im Mittel

$$S = 9,989 G; \quad E = 19,953 G.$$

Hieraus ergibt sich, dass, im Mittel genommen, eine Grundlinie $A^n B^n$ von den beiden zugehörigen Hauptpunkten P^n , P^{n+1} unter einem Winkel $\omega = 5^\circ 44' 44''$ gesehen wurde. Die in der Instruction vorgeschlagenen Grössen waren $E = 24500$ Fuss, $G = 1400$ Fuss, und folglich $\omega = 6^\circ 32'$.

§ 6.

In jedem der 4 Winkelpuncte eines solchen Vierecks waren 3 zu beobachtende Richtungen, die zusammen 12 Richtungen oder 8 Winkel bildeten. Durch die Messung derselben war das Viereck überbestimmt, indem in jedem der beiden auf der Basis ruhenden Dreiecke, die wir ein für alle Mal die *spitzen Dreiecke* nennen wollen, deren Spitzen in P^n und P^{n+1} sind, je zwei Winkel zur Auflösung desselben und zur Berechnung der Diagonale $P^n P^{n+1}$ genügten. Mit sehr wenigen Ausnahmen sind aber wirklich alle 12 Richtungen in jedem Vierecke beobachtet, wie sich aus der Zusammenstellung S. 19 — 45

*) Fügt man noch die letzte Linie $P^{123} P^{124} = 347350$ Zoll hinzu, so ergibt sich die Länge der durch die 124 Hauptsignale gehenden Operationslinie = 34592960 Zoll = 2882747 Fuss = 823,6 Werst = 118 geographische Meilen. Die im Texte des Werks p. 9, 318, 319, beiläufig gegebenen Längen dieser Linie sind nicht genau.

ergibt. In dieser finden wir auch, dass von jedem P^{n+1} aus die Richtung der Diagonalen der beiden benachbarten Vierecke, oder der Winkel zwischen P^n und P^{n+2} , beobachtet wurde, um die Verbindung der Vierecke unter einander zu bewerkstelligen. Ausserdem sind noch mehrere Richtungen nach benachbarten Kirchthürmen vorhanden, so wie sich endlich in einem besondern Anhang, S. 45—47, die Richtungsablesungen für die gesehenen Caucasuspitzen vorfinden. Alle im Texte gegebenen Ablesungen sind die schon centrirten, d. h. bei den Hauptpunkten P^n, P^{n+1}, \dots für den Abstand des Winkelmessers vom Centro des Signals verbesserten. An den Grundlinien $A^n B^n$ sind nämlich alle horizontalen Winkel im Centro selbst gemessen worden, da die Signalmarken zu dem Ende weggenommen werden konnten.

Zur Horizontalwinkelmessung wurde gebraucht:

in den Hauptpunkten P , das grosse Universalinstrument Seite 2. 1), Beobachter Sabler;

in den Endpunkten der Grundlinien A, B , das kleine Universalinstrument Seite 2. 3), Beobachter Sawitsch.

Es ergibt sich hieraus, dass den gemessenen Winkeln des Vierecks eine sehr verschiedene Sicherheit zukommt, und dass daher die Ausgleichung der Winkel mit Rücksicht auf die relative Genauigkeit der beiden Instrumente geschehen musste. Unsere Beobachter nahmen an, dass die Genauigkeit der spitzen Viereckswinkel in P , sich zu der der Viereckswinkel an der Basis wie 3 : 1 verhält. Unter dieser Voraussetzung ist es ein leichtes, die wahrscheinlichen Fehler beiderlei Winkel zu finden.

Nach der ersten senkrechten Spalte der Zusammenstellung, Seite 195—219, sind nemlich unter den 122 Vierecken 116, in denen alle 4 Viereckswinkel beobachtet wurden, oder vollständig, und nur 6 Vierecke finden sich, in denen einer der spitzen Winkel mangelt. Wären in den vollständigen Vierecken alle 4 Winkel mit absoluter Genauigkeit gemessen, so hätte die Summe jedes Mal genau $360^{\circ}0'0''$ sein müssen, indem der für ein mittleres Viereck nur $0''012$ betragende sphärische Excess verschwindet. Aus der Abweichung der Winkelsumme finde ich aber:

den w. F. eines gemessenen Vierecks = $6''85$;

woraus unter Anwendung des Verhältnisses 3 : 1 folgt:

der w. F. eines beobachteten Winkels in P gleich $e = 1''53$,

« « « « « « « A u. B « $f = 4,59$.

Gleicht man nun die Winkel im Viereck zur genauen Summe $360^{\circ}0'0''$ so aus, dass wenn $A^n + B^n + P^n + P^{n+1} = 360^{\circ} - c$, die Verbesserung der beiden ersten $+\frac{5}{8}c$, der beiden letzten $\frac{1}{8}c$ beträgt: so hat man

den w. F. eines ausgeglichenen Winkels in P gleich $(e) = 1''53\sqrt{\frac{5}{4}} = 1''33$,

« « « « « « « A u. B « $(f) = 4,59\sqrt{\frac{5}{4}} = 3,98$.

Dass das Verhältniss der Genauigkeiten 3 : 1 ein nahezu richtiges ist, bestätigt sich dadurch dass die Finnländische Gradmessung den w. F. eines in einem einzelnen Satze, ebenfalls in beiden Lagen, mit demselben grössern Instrumente gemessenen Horizontalwinkels $e = 1''32$ gibt, etwas kleiner als der hier gefundene $1''53$. Die ausgeglichenen Viereckswinkel, die wir mit (A^n) , (B^n) , (P^n) (P^{n+1}) bezeichnen wollen, sahen unsere Rechner als definitiv an, und hatten also nun noch die an den Basen in jedem der spitzen Dreiecke

gemessenen partiellen Winkel auszugleichen, die wir mit a, a^1, b, b^1 bezeichnen wollen, so dass $a+a^1=A''$, $b+b^1=B''$. Diese Ausgleichung geschah dadurch dass, wenn

$$(P^n)+a+b = 180^\circ - k \text{ und } (P^{n+1})+a^1+b^1 = 180^\circ - k^1 \text{ war,}$$

die verbesserten Winkel

$$(a) = a + \frac{1}{2} k, (b) = b + \frac{1}{2} k; (a^1) = a^1 + \frac{1}{2} k^1, (b^1) = (b^1 + \frac{1}{2} k^1)$$

wurden, wodurch, da $k+k^1 = \frac{3}{4} c$, zugleich, wie erforderlich,

$$(a)+(a^1) = a+a^1 + \frac{1}{2} (k+k^1) = A + \frac{3}{8} c = (A)$$

$$(b)+(b^1) = b+b^1 + \frac{1}{2} (k+k^1) = B + \frac{3}{8} c = (B) \text{ wird.}$$

Bei der Kürze der Grundlinie war es wahrscheinlich, dass die an den Endpunkten jeder Grundlinie in A u. B gemessenen Dreieckswinkel a, b, a^1, b^1 etwas ungenauer waren als ihre Summen $a+a^1=A''$, $b+b^1=B''$. Man findet auch wirklich, nach Seite 195—219, aus den Abweichungen der Summe der drei ein spitzes Dreieck bildenden, gemessenen Winkel von $180^\circ 0' 0''$, aus 238 verschiedenen Dreiecken, den w. F. eines Dreiecks $= 8,22$. Verbindet man dies mit dem obengefundenen w. F. des Signalwinkels $= 1,53$, so ergibt sich

$$\text{der w. F. eines gemessenen Dreieckswinkels an der Grundlinie } h = \sqrt{\frac{8,22^2 - 1,53^2}{2}} = 5,71.$$

und nach der Ausgleichung $(h) = 5,71 \sqrt{\frac{2}{3}} = 4,66$.

§ 7.

Nachdem die w. F. der auf diese Weise ausgeglichenen Winkel gefunden sind, ist es ein leichtes die aus der Unvollkommenheit der Winkelmessung hervorgehende Unsicherheit des Abstands eines Signalpuncts von einem Basisende abzuleiten, der durch $S = G \cdot \frac{\sin A}{\sin P}$ gefunden wird. Man hat nämlich, wenn wir die gefundenen Werthe $(e) = 1,33$ und $(h) = 4,66$ gebrauchen,

$$dS = S \cdot \sin 1'' \cdot \sqrt{(h)^2 \cot A^2 + (e)^2 \cot P^2} = S \cdot \sin 1'' \cdot \sqrt{(21,72 \cot A^2 + 1,77 \cot P^2)} \quad \odot$$

Legen wir die Normalform unserer Dreiecke zum Grunde, in welcher $A = 87^\circ 8'$, $P = 5^\circ 44'$ ist, so wird:

$$dS = S \cdot \sin 1'' \cdot \sqrt{(0,05 + 13,25^2)} = 13,25 \cdot \sin 1'' \cdot S.$$

Da im Mittel $S = 140528$ Zoll ist, so erhalten wir

$$\text{den w. F. einer Seite } S \text{ gleich } 9,02 \text{ Zoll;}$$

und hiermit sehr nahezu

$$\text{den w. F. einer Entfernung } E \text{ zwischen 2 nächsten Signalen } P^n \text{ und } P^{n+1} \text{ gleich } 9,02 \cdot \sqrt{2} = 12,76 \text{ Zoll.}$$

Wenn sich die einzelnen Vierecke auch mitunter nicht unerheblich von der Normalform entfernen, indem die spitzen Winkel in den Hauptpuncten bald grösser, bald kleiner als der Mittelwerth $5^\circ 44'$ sind: so wird doch immer der gefundene w. F. den Mittelwerth sehr nahezu richtig darstellen, und die Grundlage der Bestimmung der Sicherheit grösserer Linien, die auf mehreren zusammenhängenden E beruhen, abgeben.

Es bedürfen aber diejenigen 6 Vierecke in welchen nicht alle 4 äusseren Winkel gemessen sind, sondern einer der spitzen Winkel fehlt, einer besondern Untersuchung, weil hier grössere Fehler der Entfernungen zu befürchten sind, und überdies die frühere Controle der Winkelsumme fehlt, um zu beweisen, dass kein Versehen sich eingeschlichen und unzuverlässige Seiten erzeugt hat. Es sind die Vierecke

- 1) zwischen P^1 und P^2 , in welchem der Winkel an $P^1 = 24^\circ 3'$ fehlt,
- 2) " P^{11} und P^{12} , " " " " " $P^{11} = 6^\circ 58'$ "
- 3) " P^{67} und P^{68} , " " " " " $P^{68} = 6^\circ 22'$ "
- 4) " P^{68} und P^{69} , " " " " " $P^{69} = 40^\circ 30'$ "
- 5) " P^{75} und P^{76} , " " " " " $P^{75} = 5^\circ 22'$ "
- 6) " P^{76} und P^{77} , " " " " " $P^{76} = 4^\circ 53'$ "

In den Vierecken 1) und 2) sind alle vorhandenen Winkel mit beiden Winkelmessern und von 2 Beobachtern gemessen. Die Uebereinstimmung bürgt dafür, dass kein Versehen vorgefallen ist. Der Berechnung liegen die vom grossen Universalinstrument erhaltenen Ablesungen zum Grunde, und es sind daher die Resultate für die Entfernungen in den 4 Dreiecken dieser beiden Vierecke den andern an Genauigkeit gewiss nicht nachstehend.

Im Vierecke 3) sind im ersten Dreiecke nach P^{67} alle 3 Winkel gemessen, und die Ausgleichung ist nach dem Verhältniss der Genauigkeiten 3 : 1 gemacht. Die Seiten dieses Dreiecks wären also ebenso genau, wie in andern, wenn nicht der auffallend kleine Gegenwinkel der Basis, von $2^\circ 26'$, und die Abweichung von der Normalform, indem die Winkel an der Grundlinie $33^\circ 12'$ und $144^\circ 21'$ sind, hier einen grössern Fehler hervorriefen. Berechnet man für diesen Fall die Formel \odot , so findet sich

$$\left. \begin{array}{l} \text{der w. F der Seite } P^{67} A^{67} \text{ gleich } 31,9 \text{ Zoll} \\ \text{" " " " " } P^{67} B^{67} \text{ " } 29,6 \text{ Zoll} \end{array} \right\} \text{Mittel } 30,8 \text{ Zoll.}$$

Im andern Dreiecke nach P^{68} ist der Winkel $P^{68} = 6^\circ 21' 50''$ aus dem Unterschiede der Summe der beiden andern Winkel von $180^\circ 0' 0''$ abgeleitet, und unterliegt daher einem w. F von $5,71\sqrt{2} = 8,07$, der 6 Mal grösser als sonst ist. Die Unsicherheit der beiden Seiten $P^{68} A^{67}$ und $P^{68} B^{67}$ beträgt daher 68,6 Zoll. Dass in diesem Dreiecke kein Versehen vorhanden ist, wird durch die beiden in P^{67} beobachteten partiellen Winkel zwischen A^{67} , P^{68} und P^{68} , B^{67} bewiesen, die sehr genau den gefundenen Werthen der Gegenseiten entsprechen.

Im Vierecke 4) zwischen P^{68} und P^{69} , worin der Winkel in P^{69} fehlt, war dieser Punkt so nahe bei der Grundlinie, dass die beiden Gesichtslinien von der Basis zu demselben sich unter einem Winkel von $40^\circ 30'$ durchschnitten. Die Entfernungen $A^{68} P^{69}$ und $B^{68} P^{69}$ sind also reichlich genau, so wie gezeigt werden kann, dass in den Winkeln kein Versehen obwaltet. Den Beweis dafür liefern wiederum die beiden partiellen Winkel in P^{68} , wie ich durch Nachrechnung gefunden habe.

Im Vierecke 5) zwischen P^{75} und P^{76} fehlt der spitze Winkel von P^{75} . Für das nach P^{76} liegende Dreieck sind alle 3 Winkel gemessen, und gehörig ausgeglichen. Für das andere Dreieck nach P^{75} ist der w. F des abgeleiteten Winkels wiederum $8,07$, und die Unsicherheit seiner beiden Seiten beträgt 40,0 Zoll. Auf gleiche Weise ist im Viereck 6) zwischen P^{76} und P^{77} , die Unsicherheit der Seiten des nach P^{76} hin liegenden Dreiecks gleich 88,4 Zoll. In beiden Vierecken 5) und 6) beweisen die partiellen Winkel an der andern Spitze, dass keine Versehen vorhanden sind. Ich hielt es für wichtig in den wenigen Fällen, wo ein Dreieck der Bestätigung durch die Winkelsumme entbehrt, diese Prüfungsrechnung vorzunehmen, um mich zu überzeugen, dass in den horizontalen Entfernungen nirgends eine

Unsicherheit obwaltet, wodurch ein Zweifel an der Richtigkeit der Operation entstände. Es findet sich noch ein einziges Dreieck, worin der Gegenwinkel der Grundlinie, $2^{\circ}35'$, kleiner als 3° ist, im Vierecke zwischen P^{17} und P^{18} nach P^{18} zu. Ich finde, dass für diesen Fall die Unsicherheit der Schenkel des Dreiecks 44,9 Zoll beträgt.

Nach der vorhergehenden Untersuchung können wir für die zwischen P^1 und P^{123} befindlichen 244 Dreiecke, in denen 122 Grundlinien gemessen sind, annehmen, dass bei derjenigen Ausgleichung der Winkel, die bei der Berechnung zum Grunde liegt,

für 239 Dreiecke der wahrsch. Fehler der Schenkel sich um einen Mittelwerth von 9,02 Zoll hält, in 5 andern Dreiecken aber die Werthe 30,8; 68,6; 40,0; 88,4; 44,9 Zoll annimmt.

Verbinden wir alle diese Fehler, so ergibt sich für die zwischen P^1 und P^{123} liegende gebrochene Linie von 244 Seiten, die von einem Hauptsignal zum nächsten, jedesmal über einen der Basispunkte, geht, eine aus den zufälligen Fehlern der Winkelmessung hervorgehende Unsicherheit der Länge von

$$\sqrt{(9,02 \cdot 239 + 30,8 + 68,6 + 40,0 + 88,4 + 44,9)^2} = 191,1 \text{ Zoll} = 15,92 \text{ Fuss (I),}$$

welche ebenfalls sehr nahezu die des zwischen den Hauptsignalen belegenen Polygons von 122 Seiten ist.

§ 8.

Es fragt sich aber, ob die von unsern Astronomen angewandte Ausgleichungsmethode, die keine strenge ist, auch wirklich eine der Natur der Winkelmessung entsprechende gewesen ist. Mir scheint es bedenklich, die an den Hauptsignalen mit einem sehr vollkommenen Winkelmesser, unter günstigeren äussern Umständen beobachteten Winkel irgend verbessern zu wollen durch die an den Basispunkten mit einem viel schwächeren Instrumente, gewöhnlich bei sehr unruhigen Bildern, gemessenen Winkel, bei deren Messung der Beobachter selbst die Ueberzeugung hatte, dass diese Winkel eigentlich, für die Berechnung der Seiten, nur auf Minuten genau bestimmt zu werden brauchten. Wenn trotz dieses Umstandes die Winkelsummen in den Vierecken und Dreiecken so genau stimmen, dass die w. F. derselben nur $6,85$ und $8,22$ betragen: so zeigt dies wie gewissenhaft gearbeitet wurde; und beweist dass in den so wichtigen Winkeln an den Dreiecksspitzen nirgends Versehen vorhanden sind. Das von mir ausgesprochene Bedenken ist offenbar auch bei unsern Astronomen mitunter eingetreten. In den Fällen nemlich, wo die stärksten Abweichungen der Summe der Viereckswinkel vorkommen, in den Vierecken 18, 22, 38, 92, 96, 116, wo die Summe zu gross ist um $26,1$, $33,4$, $32,0$, $16,7$, $22,6$, $32,2$, haben sie es nicht gewagt, an die spitzen Winkel in P die diesen Ueberschüssen entsprechenden Correctionen von $-3,3$, $-4,2$, $-4,0$, $-2,1$, $-2,8$ und $-4,0$ anzubringen; sondern sie haben, mit Zuziehung der partiellen Winkel an den Hauptsignalen, einen oder den andern Viereckswinkel an der Basis corrigirt, und dann erst das Viereck ausgeglichen. Dass dies Verfahren willkürlich ist, leuchtet ein, indess zeugt es von Tact, weil dadurch eine grössere Beeinträchtigung der wichtigen Winkel in P vermieden worden ist. Dieselbe Beeinträchtigung wird sich aber ebenso wenig da ableugnen lassen, wo die Summe der Viereckswinkel weniger abweicht, als in diesen äussersten Fällen. Dass aber eine Beeinträchtigung der P Winkel, durch die angewandte Ausgleichung, wirklich statt gefunden hat, ist mir dadurch klar geworden, dass in den meisten Fällen, durch die Ausgleichung, die P Winkel eine negative Correction erhalten. Dies rührt daher, dass die Summen der Viereckswinkel vorherrschend

einen positiven Ueberschuss gab, indem aus den 116 vollständigen Vierecken die Mittelsumme der Winkel $360^{\circ}0'4''56$ war. Im Mittel genommen wäre also durch die angewandte Ausgleichung jeder *P*winkel um $\frac{4,56}{8} = 0,57$ verkleinert worden, wenn dieselbe nicht bei den stärksten Abweichungen unterblieben wäre. Hierdurch ist die mittlere Verkleinerung auf $0,45$ gekommen, wie sie sich ergibt wenn man, Seite 145—219, alle beobachteten *P*winkel der Vierecke mit denen vergleicht, die als verbesserte dabei stehen. Eine Veränderung der *P*winkel in einem bestimmten positiven oder negativen Sinne ist aber ganz unvereinbar mit der Natur des grössern Universalinstruments und der angewandten Beobachtungsmethode. Da der Mittelwerth der *P*winkel $5^{\circ}44'44''$ beträgt, wovon $0,45$ nahezu der 45855ste Theil ist, so sind in jedem Dreiecke die Seiten um diesen Theil zu gross gefunden, also im Mittel um 3,07 Zoll. Dieser Fehler ist zwar gegen den zufälligen Fehler einer Dreiecksseite, der 9,02 Zoll beträgt, unerheblich; er bekommt aber seine Bedeutung, weil er auf alle Längen in demselben Sinne einwirkt; und wir folgern: dass alle in unserm Werke enthaltenen linearen Dimensionen um $\frac{1}{45855}$ verringert werden müssen. Auf die Länge der ganzen Linie von P^1 bis P^{123} beträgt die anzubringende Verbesserung -747 Zoll $= -62$ Fuss 3 Zoll (II).

§ 9.

Die Sicherheit der linearen Grössen wird aber noch besonders von der Genauigkeit der gemessenen Grundlinien bedingt. Sabler setzt, Seite 389, den wahrscheinlichen Fehler einer Basismessung auf 0,5 Zoll oder $\frac{1}{28000}$ der Länge. Hierunter ist nur derjenige zufällige Fehler verstanden, den die Operation selbst wenn mehrfach wiederholt zu erkennen gibt. Es wird also aus dieser Quelle eine Unsicherheit von 5 Zoll auf einen mittleren Dreiecksschenkel *S*, und von 10 Zoll auf die mittlere Entfernung *E* zweier Haupt-signale hervorgerufen, die für die ganze Linie von P^1 bis P^{123} einen w. F. von $10\sqrt{122} = 110,5$ Zoll erzeugt (III).

Das bei der Messung angewandte Grundmaass, eine eiserne Scale von $3\frac{1}{2}$ Fuss, war auf 0,01 Linie sicher. Ebensoviel kann bei der Abnahme desselben mit dem Stangenzirkel zur Uebertragung auf den 14füssigen hölzernen Maassstab gefehlt werden. Das von diesem angegebene Maass von 14 Fuss kann also einem Fehler von $0,04\sqrt{2} = 0,057$ Lin. unterworfen sein, oder nahezu $\frac{1}{35000}$ der Länge. Alle linearen Grössen können also nicht sicherer als $\frac{1}{35000}$ ihres Betrages sein, woraus für das Polygon von P^1 bis P^{123} eine Unsicherheit von 978 Zoll oder 81,5 Fuss folgt (IV).

Jetzt sind wir im Stande alle Fehler, indem wir sie insgesamt als zufällige ansehen, zu vereinigen, und finden für die in unserm Werke gegebene Länge der ganzen Linie von P^1 bis P^{123} , den w. F. $\sqrt{(191^2 + 747^2 + 110^2 + 978^2)} = 1250$ Zoll oder 104,2 Fuss. Wenn aber alle linearen Grössen um $\frac{1}{45855}$ verringert werden, wird der w. F. der ganzen gebrochenen Linie von 34245610 Zoll nur 1002 Zoll $= 83,5$ Fuss betragen, was nahezu $\frac{1}{34000}$ der Länge beträgt.

Wenn in der obigen Untersuchung einige zum Grunde gelegte Annahmen auch nicht ganz scharf sind, so glaube ich doch aus derselben zu folgendem Schlusse berechtigt zu sein:

die horizontalen auf der Operationslinie selbst genommenen Entfernungen zwischen zwei beliebigen Signalen können für innerhalb $\frac{1}{30000}$ genau angesehen werden. Da die Unsicherheit des Grundmaasses und seine Uebertragung allein eine Unsicherheit von $\frac{1}{35000}$ erzeugte, so ergibt sich dass die Unsicherheit der Entfernungen nur um ein geringes durch die Unvollkommenheit der Winkelmessung gesteigert worden ist. Dies ist dem Umstande zuzuschreiben, dass die ganze Linie aus einer grossen Zahl unabhängig gemessener Theile zusammengesetzt ist, wobei ein in einem Theile vorhandener Fehler gar keinen weitem Einfluss auf die andern Theile äussert.

Durch das vorstehende habe ich die in unserm Werke gegebenen horizontalen Lineargrössen gehörig gewürdigt und ihre ausgezeichnete Sicherheit bewiesen. Ich kann aber nicht zugeben, dass diese Grössen auf den Grad der Genauigkeit Anspruch machen dürfen, welchen ihnen Sabler, Seite 390, zuschreibt, indem er den w. F. der ganzen Länge der Linie P^1 bis P^{124} zu 12 Fuss ansetzt, oder zu $\frac{1}{240000}$ der Länge.

§ 10.

Die Genauigkeit einer geodätischen Operation hängt nicht allein von der Sicherheit der Entfernungen (E) zwischen den benachbarten Punkten der gebrochnen Operationslinie ab, sondern ebenfalls von der genauen Bestimmung des Winkels, welchen ein jeder Theil mit dem nächsten macht, oder in unserm Falle von der Schärfe des an jedem Hauptpunkte P^n gemessenen Winkels zwischen P^{n-1} und P^{n+1} , den wir mit II^n bezeichnen wollen. Diese Winkel sind an 114 Hauptpunkten, von den 122 zwischen P^1 und P^{124} liegenden, gemessen worden, wie die Zusammenstellung der Richtungsablesungen Seite 19—45 ausweist. Es fehlen überhaupt nur:

in P^2 die Richtungen P^1 und P^3	in P^{14} die Richtung P^{15}
« P^3 « « P^2 und P^4	« P^{39} « « P^{40}
« P^{11} « « P^{12}	« P^{70} « « P^{71}
« P^{12} « « P^{11}	« P^{104} « « P^{105}

Es ist aber zu beachten, dass durch diese fehlenden II die Verbindung keine Unterbrechung leidet, indem diese Verbindung ebenso vollständig durch den zwischen den vorhergehenden und nachfolgenden Basispunkten, von jedem P aus, beobachteten Winkel, nebst den Winkeln an den zugehörigen Basispunkten bewirkt wird. Nur ist die Verbindung durch die Winkel II die sicherere, weil sie durch Linien von doppelter Länge geht, deren Richtungen alle mit dem grossen Instrumente gemessen wurden, während bei der andern Verbindung auch die an den Basispunkten minder genau beobachteten Winkel einwirken. Dass in den Richtungsablesungen, welche die II geben, keine Versehen vorkommen, wird dadurch bewiesen, dass in allen Dreiecken $P^n A^n P^{n+1}$ und $P^n B^n P^{n+1}$, die wir die *flachen Dreiecke* nennen können, die Summe der 3 Winkel ebenfalls zu $180^{\circ}0'0''$ stimmt, und die partiellen spitzen Winkel an dem Signalpunkte P^n auf denselben Richtungsablesungen beruhen, welche den Winkel II^n geben. Man sieht, dass die Winkel II die eigentliche Grundlage der Verbindung der Theile der Operationslinie bilden, und dass es daher wichtig ist, die Genauigkeit dieser Winkel zu erwägen.

Dies ist um so nöthiger, da Sabler selbst, Seite 390, die Genauigkeit der Winkel Π gewissermassen verdächtigt. Er erklärt nämlich die Unterschiede der an den 7 Hauptpunkten beobachteten Azimute, welche sich zeigen, wenn man das eine Azimut durch Zuziehung der Zwischenwinkel der trigonometrischen Operation auf das nächste reducirt, vorzugsweise aus der Unsicherheit der Winkel Π , ohne aber diese Unsicherheit einer numerischen Bestimmung zu unterwerfen. Ganz richtig weist er die Quelle der Unsicherheit nach in der Unvollkommenheit der Centrirung der Winkel in den Hauptpunkten P^n , in Folge einer möglichen Abweichung der hohen Signalstangen von der Senkrechten, indem die Stellung des Instruments jedes Mal auf die Axe der Stange; in gleicher Höhe mit ihm, bezogen wurde. Es ist aber ersichtlich, wenn ein Centrirungsfehler z. B. in P^{n+1} vorhanden ist, dass dieser für die Richtungen A^n, B^n wegen der gleichen Entfernungen und der Kleinheit des zwischenliegenden Winkels sehr nahe gleich sein wird, und sich also für den P winkel des spitzen Dreiecks $A^n P^{n+1} B^n$ aufhebt. Sabler hält daher auch alle Winkel dieser Form für bis auf $0,1$ genau centrirt.

Anders ist es aber mit den spitzen Winkeln in den flachen Dreiecken zwischen P^n, A^n und P^{n+1} . Ist hier ein Centrirungsfehler z. B. in P^{n+1} , so wird er auf die beiden Richtungen $P^{n+1} A^n$, und $P^{n+1} P^n$ sehr nahezu so wirken, dass er für die erste doppelt so gross als für die letzte ist, also auf den Winkel selbst mit seinem einfachen Betrage für die Richtung $P^{n+1} P^n$ einwirkt. Dieser Umstand setzt uns in den Stand den wahrsch. Werth des Centrirungsfehlers für diese Richtung zu finden.

Es finden sich nemlich, in der Zusammenstellung Seite 195 bis 219, 220 flache Dreiecke in denen alle 3 Winkel gemessen sind, und wir finden, aus der Abweichung der Winkelsumme von $180^{\circ} 0' 0''$,

den wahrsch. Fehler eines gemessenen flachen Dreiecks = $5,64$, und $5,64^2 = 31,81$.

Seite x hatten wir aber erhalten

den wahrsch. Fehler eines gemessenen Vierecks = $6,85$, und $6,85^2 = 46,92$.

Wenn wir nun kennen

e den w. F eines mit dem grossen Universalinstrument in P^n beobachteten Winkels, abgesehen von dem Einfluss der Centrirung;

me den w. F eines in A^n oder B^n beobachteten Winkels zwischen P^n und P^{n+1} , für welchen kein Centrirungsfehler existirt;

endlich r den wahrscheinlichen Betrag, den die Unvollkommenheit der Centrirung auf die centrirte Richtung $P^n P^{n+1}$ ausübt:

so finden wir für obige beide Quadrate folgende Gleichungen

$$2(me)^2 + 2e^2 = 46,92$$

$$(me)^2 + 2e^2 + 2r^2 = 31,81.$$

Hieraus folgt sogleich:

$$e^2 + 2r^2 = 8,35; r^2 = \frac{8,35 - e^2}{2}; r < 2,04.$$

Nehmen wir den Seite x gegebenen kleinern Werth $e = 1,32$, so erhalten wir den bestimmten Werth $r = 1,82$. Betrachten wir nun den Winkel Π , so ist es klar, dass der Centrirungsfehler in P^{n+1} sowohl für die Richtung P^n als für die Richtung P^{n+2} dieselbe Grösse hat, aber in entgegengesetztem Sinne,

so dass der Einfluss desselben auf den Unterschied der beiden Richtungen, oder den Winkel II , gleich $2r$ sein wird. Ausserdem ist aber der Winkel II noch dem w. F. e unterworfen, wie jeder mit dem grossen Universalinstrument gemessene Winkel. Bezeichnen wir daher den wahrscheinlichen Fehler des Winkels II mit π : so haben wir

$$\pi^2 = 4r^2 + e^2 = 16,70 - e^2; \quad \pi < 4''09.$$

Es ist für den bestimmten Werth π fast gleichgültig, ob wir $e = 1''32$ oder $1''53$ annehmen, ersteres gibt $\pi = 3''87$, letzteres $\pi = 3''80$. Ich bleibe bei $\pi = 3''87$, welcher Werth der Wahrheit sehr nahe kommen muss, da π gewiss kleiner als $4''00$ ist. Dieses würde $e^2 = 0,70$ und $e = 0''84$ voraussetzen. So genau ist ein in einem einzigen Satze, in beiden Lagen, mit dem Universalinstrument gemessener Winkel nicht.

Geht die Verbindung, wie einige Male vorkommt, durch einen Basispunct, so tritt der Winkel $P^n P^{n+1} A^{n+1}$ auf, den wir mit II^1 bezeichnen wollen. Dieser wird einem grösseren w. F. π^1 unterworfen sein, und es ist, wie leicht zu übersehen,

$$(\pi^1)^2 = 9r^2 + e^2 = 37,58 - 3,5e^2 = 31,49, \quad \text{für } e = 1''32;$$

folglich

$$\pi^1 = 5''61.$$

Für den dann weiterführenden stumpfen Winkel an der Basis ist aber der w. F. oben schon $(f) = 3''98$ ermittelt. Auf diesen folgt sodann wieder ein Winkel II^1 mit dem w. F. $5''61$, und hierauf treten die Winkel II wieder an die Reihe.

Die vorstehende Untersuchung reicht hin die Sicherheit einer durch eine Anzahl Zwischenwinkel übertragenen Richtung in jedem vorkommenden Falle zu beurtheilen, und zeigt dass die ausgeführte Arbeit auch in dieser Hinsicht eine vorzügliche Genauigkeit gewährt.

III. Ueber die auf der Operationslinie erhaltenen geodätischen Höhenbestimmungen und deren Genauigkeit.

§ 11.

Bei der Untersuchung der Genauigkeit eines Messungsergebnisses, das durch eine zahlreiche Folge von Theilwerthen erkannt wird, hat man, neben der Ermittlung der Sicherheit dieser Theilwerthe aus der Betrachtung der obwaltenden Fehlerursachen, eine wichtige Prüfung, so wie mehrfache, von einander unabhängige Bestimmungen dieser Theilwerthe und des aus ihrer Vereinigung hervorgehenden Endergebnisses vorhanden sind. Wir haben oben, Seite III, gesehen, dass unsere Operation, wenn consequent durchgeführt, zu 5 unabhängigen Reihen von Höhenbestimmungen führen musste. Indess erkennen wir, dass diese Reihen nur in Bezug auf die Messung der Zenithdistanzen als gänzlich unabhängig von einander angesehen werden können, und dass, bei den aus den Zenithdistanzen abgeleiteten Höhenunterschieden, für alle 5 Reihen dieselben horizontalen Entfernungen zum Grunde liegen. Wir haben daher zuvörderst zu untersuchen:

c

welche gemeinschaftliche Unsicherheit in die Höhenbestimmungen der einzelnen Punkte, und besonders für das Endresultat des Unterschiedes der beiden Meere = K aus den im frühern erkannten Fehlern der horizontalen Abstände hervorgehen kann.

Die Unsicherheit des Grundmaasses von $\frac{1}{35000}$ seiner Länge, nach Seite xiv, übt einen Einfluss auf die Höhenbestimmungen, der, obgleich constanter Natur, doch als gänzlich verschwindend für die absoluten Höhen über dem Meere angesehen werden darf. Ihr Einfluss beträgt nämlich für die grösste derselben = 22264 Zoll = 1855 Fuss, in P^{48} , nur 0,6 Zoll. Für den Unterschied der beiden Meere von 85 Fuss ist sie nur 0,03 Zoll.

Im nachstehenden werde ich untersuchen, welche Unsicherheit der Höhen aus den andern Fehlern der Entfernungen entstehen, unter Betrachtung derjenigen Höhen, die aus der Verbindung der an den Hauptpunkten und Basispunkten angestellten reciproken Beobachtungen hervorgehen. Da die Höhenunterschiede zwischen den benachbarten Basispunkten und den Hauptsignalen ohne Ausnahme grösser sind als zwischen den benachbarten Hauptsignalen, so musste bei jenen sich ein etwas grösserer Einfluss der Entfernungsfehler auf die Höhenbestimmungen äussern.

Wir haben gefunden, Seite xi und xiv,

den wahrsch Fehler einer Dreiecksseite $S = P^n A^n$ gleich 9,0 Zoll aus der Unsicherh. der Winkelmessung,
 5,0 " " " " der Grundlinie.

Aus beiden Ursachen folgt der w. F. $dS = 10,3$ Zoll. Der Einfluss dieses Fehlers auf den Höhenunterschied zweier benachbarter Stationen = h , ist aber, wenn die reciproken Zenithdistanzen z und z^1 sind und wir $\frac{1}{2}(z^1 - z) = \zeta$ den Höhenwinkel setzen :

$$dh = dS \sin \zeta; \text{ also bei } \zeta = 1^\circ \text{ wird } dh = 0,175 \text{ Zoll.}$$

In Folge des Mangels der Winkelmessung an den Hauptsignalen kommen aber 5 grössere Unsicherheiten in den Entfernungen vor. Ich stelle sie hier mit den zugehörigen ζ und den aus ihnen folgenden dh zusammen :

Seite S	w. F. = dS	$\zeta =$	$dh =$	} $\Sigma (dh)^2 = 3,622$
$B^{17} P^{18}$	44,9 Zoll	$0^\circ 1',3$	0,02 Zoll	
$B^{67} P^{67}$	30,8 "	0 38,2	0,27 "	
$B^{67} P^{68}$	68,6 "	1 33,0	1,82 "	
$P^{75} B^{75}$	40,0 "	0 12,5	0,15 "	
$P^{76} B^{76}$	88,4 "	0 18,0	0,46 "	

Hier ist ein einziges Mal dh grösser als 1 Zoll, in einem Falle wo $\zeta = 1^\circ 33'$. Solcher Fälle wo $\zeta > 1^\circ$ kommen noch 15 Mal vor, die ich einzeln so untersuche, dass ich für jeden das dS aus der wirklichen Winkelmessung ableite, und hiemit dh berechne.

Log. $S =$	Seite S	$\xi =$	Horizontal- winkel in P	w. F. aus der Winkel- messung, $a =$	w. F. aus der Basis- messung, $b =$	$dS = \sqrt{a^2 + b^2}$	$dh =$
5,0853	$B^{42} P^{45}$	$1^{\circ} 32'$	$4^{\circ} 57'$	9,1 Zoll	4,3 Zoll	10,1 Zoll	0,27 Zoll
4,9458	$P^{47} B^{47}$	1 29	9 47	3,3 "	3,2 "	4,6 "	0,12 "
5,1298	$B^{47} P^{48}$	1 19	6 37	7,5 "	4,8 "	8,9 "	0,20 "
5,0361	$P^{48} B^{48}$	1 23	7 7	5,6 "	3,9 "	6,9 "	0,17 "
5,3496	$P^{49} A^{49}$	1 12	4 0	20,7 "	8,0 "	22,2 "	0,46 "
4,8099	$A^{50} P^{51}$	2 1	9 15	2,6 "	2,3 "	3,5 "	0,12 "
5,1918	$B^{52} P^{53}$	1 43	5 40	10,2 "	5,6 "	11,6 "	0,35 "
4,5128	$A^{53} P^{54}$	2 36	5 33	2,0 "	1,1 "	2,3 "	0,10 "
5,2728	$P^{54} B^{54}$	1 27	4 29	15,5 "	6,7 "	16,9 "	0,43 "
5,3353	$A^{58} P^{59}$	1 53	3 53	20,6 "	7,7 "	22,0 "	0,72 "
5,2257	$P^{60} B^{60}$	1 13	4 56	12,6 "	6,0 "	14,0 "	0,30 "
5,0454	$P^{61} B^{61}$	3 20	6 31	6,3 "	4,0 "	7,5 "	0,44 "
5,3617	$P^{64} B^{64}$	1 0	3 38	23,4 "	8,2 "	24,8 "	0,43 "
5,0734	$P^{65} B^{65}$	1 11	6 6	7,2 "	4,2 "	8,3 "	0,17 "
5,0734	$B^{65} P^{66}$	1 6	6 2	7,3 "	4,2 "	8,4 "	0,16 "
						$\Sigma(dh)^2 = 1,741$ "	

Für die übrigen 226 Höhenunterschiede ist

118 Mal ζ zwischen $0'$ und $10'$; $\Sigma(\zeta^2) =$	3363	} $\Sigma(dh)^2 = 77411 (\sin 1'. 10,3)^2 = 0,695$
57 " " " 10 " 20	12455	
24 " " " 20 " 30	14604	
16 " " " 30 " 40	19176	
5 " " " 40 " 50	9942	
6 " " " 50 " 60	17871	
Summe 77411,0.		

Verbinden wir die 3 Summen, so ergibt sich

$$\Sigma(dh)^2 = 3,622 + 1,741 + 0,695 = 6,058 \text{ und } dK = 2,46 \text{ Zoll,}$$

welches dK den aus der Unsicherheit der Entfernungen hervorgehenden wahrscheinlichen Fehler des Höhenunterschiedes K der beiden Meere anzeigt.

§ 12.

Wenn die irdische Strahlenbrechung nicht wäre, so würde die Sicherheit einer Höhenbestimmung nur noch einzig von der Genauigkeit der Messung der Zenithdistanzen abhängen. Wir wollen voraussetzen dass durch eine zweckmässige Anordnung und Verbindung der Beobachtungen der constante Fehler eines jeden Instruments, der von dem sogenannten Biegungscoefficienten abhängig ist, eliminirt werden kann. Dann bliebe uns nur der w. F. einer mit dem Instrumente gemessenen Z. D. zu ermitteln, um die Genauigkeit des mit ihm bestimmten Höhenunterschiedes h zweier benachbarter Punkte, so wie der beiden

Meere *K* zu erkennen. Bei Zenithdistanzen, die sehr nahe bei 90° sind, fällt der Einfluss der regelmässigen Theilungsfehler des Instruments bekanntlich weg. Die Genauigkeit der Messung hängt von der der Einstellung aufs Object und der der Ablesung ab. Sabler gibt, Seite 317, den w. F. einer aus einem Satze, durch 4 Einstellungen, erhaltenen Zenithdistanz = z zu $1''1$ für sein Instrument an. Seite 343 finden wir für die durch den Theodoliten erhaltenen z den w. F. = $2''1$ erwähnt. Beide Bestimmungen beruhen auf der Uebereinstimmung der mit demselben Instrumente beobachteten Polhöhen, und finden eine Bestätigung in der Uebereinstimmung der Oerter des Zeniths, welche die auf allen Puncten gleichzeitig beobachteten irdischen Signale darbieten. Diese geben dass man für den Theodoliten den w. F. eines z nur zu $1''6$ annehmen darf. Mit diesen Werthen von $1''1$ und $1''6$ erhalten wir :

für das grosse Universalinstrument den w. F. eines Höhenunterschiedes aus einem Satze

$$\text{gleich } 140528 \sin 1''1 = 0,749 \text{ Zoll für die mittlere Entfernung } S,$$

$$\text{« } 280702 \sin 1''1 = 1,497 \text{ « « « « « } E;$$

und für die Theodoliten

$$\text{gleich } 140528 \sin 1''6 = 1,090 \text{ Zoll für die mittlere Entfernung } S.$$

Sabler gibt an dass er an jedem Beobachtungspuncte die Basispuncte im Mittel in 2,67 Sätzen, jeden der Hauptpuncte in 1,70 Sätzen gemessen hat, und ebenso finden wir dass Fuss jede Zenithdistanz im Mittel in 2,70 Sätzen beobachtet hat, und Sawitsch in 3,11 Sätzen. Hiermit ergibt sich im Mittel für die Beobachtungen an jedem Puncte :

der w. F. eines Höhenunterschiedes	=	$1,090 : \sqrt{2,70}$	=	0,663 Zoll für die Entf. <i>S</i> , durch Fuss;
« « « «	«	$= 1,090 : \sqrt{3,11}$	=	0,618 « « « « <i>S</i> , « Sawitsch;
« « « «	«	$= 0,749 : \sqrt{2,67}$	=	0,459 « « « « <i>S</i> , « Sabler;
« « « «	«	$= 1,479 : \sqrt{1,70}$	=	1,148 « « « « <i>E</i> , « «

Hiermit würde sich für den Unterschied der beiden Meere *K*, in den 5 Reihen, die Seite *m* als vorhanden angegeben sind, finden:

aus der Reihe (<i>F</i>)	der w. F. von <i>K'</i>	gleich	$0,663 \cdot \sqrt{246}$	=	10,40 Zoll,
« « « (<i>S</i>)	« « « « <i>K''</i>	«	$0,618 \cdot \sqrt{246}$	=	9,69 «
« « « (Σ')	« « « « <i>K'''</i>	«	$0,459 \cdot \sqrt{246}$	=	7,18 «
« « « (Σ'')	« « « « <i>K''''</i>	«	$1,148 \cdot \sqrt{123}$	=	12,74 «
« « « (Σ''')	« « « « <i>K''''</i>	«	$1,148 \cdot \sqrt{123}$	=	12,74 «

Das mit Berücksichtigung der dem w. F. entsprechenden Gewichte genommene Mittel dieser 5 Werthe würde ein *K* sein, dem ein wahrscheinlicher Fehler von 4,40 Zoll zukommt, in Bezug auf die Genauigkeit der gemessenen z , aber ein anderer = 2,46 Zoll wegen der Unsicherheit der Entfernungen. Beide verbunden geben für das Endresultat *K* den wahrscheinlichen Fehler gleich 5,04 Zoll. Dieses $dK = 5,04$ Zoll muss als den Grenzwert der Sicherheit des aus dem Complexe aller 5 Reihen abgeleiteten *K* bezeichnend angesehen werden. In der Wirklichkeit konnte aber diese Sicherheit nicht erreicht werden, aus 3 verschiedenen Ursachen :

- a. Weil die Biegungscoefficienten der verschiedenen Instrumente weder $= 0$, noch unter sich gleich angenommen werden dürfen, vielleicht sogar bei jedem Instrumente kleinen Veränderungen unterworfen sind. Es können indess die Biegungen durch die Anordnung und Verbindung der Beobachtungen sehr nahezu vollständig eliminirt werden.
- b. Weil in jeder der verschiedenen Reihen die einzelnen Höhenunterschiede nicht mit gleicher Sicherheit bestimmt sind, indem bald mehr bald weniger Sätze beobachtet worden. Es ist nämlich leicht einzusehen, wenn wir annehmen, statt

$$\begin{aligned} x &= a \text{ mit dem Gew. } 1, \text{ einen Werth } x = a' \text{ mit dem Gew. } 1+r, \\ y &= b \text{ " " " } 1, \text{ " " " } y = b' \text{ " " " } 1-r: \end{aligned}$$

dass alsdann sich ergibt

$$x + y = a + b, \text{ Gew. } \frac{1}{2} \qquad x + y = a + b, \text{ Gew. } = \frac{1-r^2}{2};$$

- und dass folglich die zweite Bestimmung immer ungenauer wird, als die erste. Hieraus folgt sogleich dass eine Grösse $K = (x + y + z + \dots)$ am vortheilhaftesten bestimmt ist durch eine Summe von einzelnen Beobachtungen, Gewichten, wenn auf jeden Theilwerth x, y, \dots eine gleiche Anzahl von Beobachtungen, ein gleiches Gewicht kommt. Ja man sieht dass ein Resultat k sehr ungenau werden kann, wenn eins oder einige wenige der Glieder bedeutend unsicher sind. Bei zusammengesetzten Operationen ist es daher von der grössten Wichtigkeit zu untersuchen, ob nicht irgendwo im Zusammenhang der Theile eine Schwäche vorhanden sei.
- c. Weil in der irdischen Strahlenbrechung ein feindselig gegen alle Höhenbestimmungen wirkendes Element vorhanden ist, dessen Störungen nicht vollständig, sondern nur zum Theil unschädlich gemacht werden können.

§ 13.

Wenn wir uns erinnern dass unsere 3 Beobachter gleichzeitig so vertheilt waren, dass beobachtet wurden :

von Fuss am Standpunct B^{n+1} die Zenithdistanzen von P^{n+1} und P^{n+2} ,
 von Sabler " " P^{n+1} " " " B^n, B^{n+1} und P^n, P^{n+2} ,
 von Sawitsch " " B^n " " " P^n und P^{n+1} ,

und dass die Beobachter am nächsten Tage sich in $B^{n+2}, P^{n+2}, B^{n+1}$ befanden, um dort ebenso zu arbeiten; so ergeben sich für jede kürzere Distanz $B^n P^{n+1}$ drei Höhenbestimmungen als vorhanden, 2 von Fuss und Sawitsch in B^n und eine von Sabler in P^{n+1} gemacht, wobei die Beobachtungen von Sawitsch und Sabler gleichzeitig reciproke sind, während die Beobachtung von Fuss einen Tag früher gemacht war. Ebenso finden sich für die Distanz $P^{n+1} B^{n+1}$ gleichzeitig reciproke Beobachtungen von Sabler und Fuss, während Sawitsch in B^{n+1} einen Tag später beobachtete. Für jede längere Entfernung $P^{n+1} P^{n+2}$ liefert Sabler 2 entgegengesetzte Beobachtungen, die aber um einen Tag von einander abliegen. Wir sehen hieraus dass eigentlich nur eine einzige Folge von gleichzeitigen reciproken Zenithdistanzen vorhanden ist, und zwar für die kürzeren Abstände S , durch die Beobachtungen von Fuss in B^{n+1} , von Sabler in P^{n+1} und Sawitsch in B^n , so dass sich eine reciproke Bestimmung für

den Höhenunterschied $B^{n+1} - P^{n+1}$ durch die Verbindung von Σ und F , die andere für den Höhenunterschied $B^n - P^{n+1}$ durch die Verbindung von Σ und S ergibt. Wollte man also nur diese Folge, als die einzige, die eine gleichzeitige Gegenseitigkeit darbietet, anwenden, so bliebe die Hälfte der an den Basispunkten angestellten Beobachtungen ungenutzt.

Die Zusammenstellung, Seite 222 bis 248, gibt die Berechnung dieser reciproken Höhen, bei der die jedesmalige Refraction direct eliminirt ist, unter der Voraussetzung, dass die Curve des Lichtstrahls an beiden Enden einen gleichen Winkel mit der geraden Linie zwischen beiden Objecten bildet. Diese Voraussetzung ist aber gewiss keine streng richtige. Der einzige Umstand dass Fälle vorkommen, wo eins der Objecte schwirrend erscheint von einem Endpunkte der Linie aus, während das andere am entgegengesetzten ein ruhiges Bild bietet, zeigt dass die Curve des Lichtstrahls nicht immer eine symmetrische ist. Hierzu kommt noch der Umstand dass, weil die Basispunkte in der Fläche lagen, die Hauptsignale auf den sogenannten Kurganen, die Gesichtslinie an den letztern etwa 20 Fuss höher über dem Erdboden lag, als in der Nähe der ersten, und folglich bei diesen grössere Abweichungen von einer mittleren Strahlenbrechung statt finden müssen. Man ersieht aber gleich dass dieser Umstand die Sicherheit der reciproken Höhenbestimmung nicht wesentlich stört, da er von P^{n+1} aus nach B^n und B^{n+1} im entgegengesetzten Sinne wirkt, und also für die Summe beider Höhenunterschiede oder für $B^{n+1} - B^n$ sich soweit aufheben muss, dass nur kleine zufällige Fehler aus dieser Quelle übrig bleiben.

Es gibt aber einen anderen Umstand, der die so erhaltenen Höhenunterschiede für die Ableitung eines Endresultats K zwischen beiden Meeren fast unbrauchbar macht, ich meine die Verschiedenheit der Biegungscoefficienten der 3 Instrumente. Wollen wir annehmen dass die Biegungscoefficienten für die 3 Instrumente von Sabler, Sawitsch und Fuss b, b', b'' sind, und dass beobachtet wurde

in B^n	von Sawitsch,	für P^{n+1} ,	die Zenithdistanz z ,	statt der richtigen $z + b'$,
« P^{n+1}	« Sabler,	« B^n ,	« « z' ,	« « « $z' + b$,
« « «	« «	« B^{n+1} ,	« « ω' ,	« « « $\omega' + b$,
« B^{n+1}	« Fuss,	« P^{n+1} ,	« « ω ,	« « « $\omega + b''$:

so ergibt sich, unter Annahme gleicher Abstände = S ,

für den Höhenunterschied $P^{n+1} - B^n$ der Werth $h = S \cdot \sin \frac{z' - z}{2} = S \cdot \sin \zeta$, statt $S \cdot \sin (\zeta + \frac{1}{2}(b - b'))$
 « « « $B^{n+1} - P^{n+1}$ « « $i = S \cdot \sin \frac{w - w'}{2} = S \cdot \sin \eta$, statt $S \cdot \sin (\eta + \frac{1}{2}(b'' - b))$
 also für $B^{n+1} - B^n \dots \dots h + i = S \cdot \sin (\zeta + \eta)$, statt $S \cdot \sin (\zeta + \eta + \frac{1}{2}b'' - \frac{1}{2}b')$

Man sieht dass der Biegungscoefficient b des Sablerschen Instruments aus dem Resultate verschwindet, dass aber der durch die Rechnung erhaltene Höhenunterschied $h + i$ die Correction $S \sin \frac{1}{2}(b'' - b')$ erhalten muss. Wenn nun auch die Biegungscoefficienten der gebrauchten Instrumente klein waren, Seite 343, so müssen wir doch einen Werth von $b'' - b'$ nicht nur als möglich, sondern als gewiss vorhanden gestatten. Nehmen wir an dass sein Werth auch nur 1 Secunde betrug, so bedarf für ein mittleres Intervall der Höhenunterschied $h + i$ einer Verbesserung von 0,34 Zoll. Dieses ist nun zwar für den einzelnen Werth $h + i$ fast verschwindend gegen die übrigen zufälligen Fehler, und kann im einzelnen

Falle nur dann erheblich sein, wenn $b'' - b'$ mehrere Secunden beträgt. Da aber Fuss beständig (wenigstens von P^{14} an) der vorangehende Beobachter war, Sawitsch der nachfolgende: so wirkt der Unterschied der Biegungen auf alle einzelnen Höhenunterschiede in demselben Sinne, und es ist ersichtlich, dass wenn $b'' - b' = n$ Secunden, bei 123 Stationen, der aus den reciproken Höhenmessungen gefundene Werth von $P^{123} - P^{14}$ eine Correction von $0,34 \cdot 123 \cdot n = 41,82 \cdot n$ Zoll erhalten muss. Diesem zu Folge ist die Ansicht, dass das direct aus den reciproken gleichzeitigen Messungen für den Unterschied der beiden Meere erhaltene Resultat, das Seite 248 als $K = -923$ Zoll sich findet, verworfen werden muss, vollkommen gerechtfertigt, und wir erkennen deutlich dass nur der Weg zu einer scharfen Kenntniss von K führen kann, auf welchem die Biegungscoefficienten der Instrumente eliminirt werden. Ich stehe auch gar nicht an, durch eine Vergleichung der definitiven Werthe der Höhenunterschiede, die von der Biegung unabhängig sind, mit denjenigen, welche die reciproken Messungen, bei denen Fuss der vorangehende war, allein geben, den Werth der Biegungscoefficienten $b'' - b'$ abzuleiten. Wir können zu dieser Bestimmung nur den Höhenunterschied $P^{123} - P^{14}$ gebrauchen, da die regelmässige Anordnung, nach welcher Fuss voranging, erst mit P^{14} beginnt. Dieser Werth findet sich nach der auf der definitiven Rechnung beruhenden Tafel III, § 38, gleich $-3664,1$ Zoll. Die reciproken Messungen geben aber nur $-3533,9$ Zoll*), also 130,2 Zoll weniger. Da hierbei 107 reciproke Höhenbestimmungen benutzt sind (für 2 Stationen fehlen sie): so folgt die mittlere Wirkung der Biegungscoefficienten auf eine Station $= -130,2 : 107 = -1,22$ Zoll, woraus $b'' - b' = -1,22 : 0,34 = -3,58$ folgt. Es gibt demnach, dieser Untersuchung zu Folge, der von Sawitsch gebrauchte Theodolit jede aus einer directen Messung folgende positive Höhe eines beobachteten Objects über dem Instrumente im Mittel um 2,44 Zoll grösser, als das von Fuss angewandte Instrument, oder im einzelnen Falle um $D \cdot \sin 3,58$ grösser, wenn D den horizontalen Abstand bezeichnet. Wir werden später, in § 31, eine unabhängige Bestätigung dieser Grösse finden.

§ 14.

Ich komme zur Strahlenbrechung. Sabler hat diesen wichtigen Gegenstand, Seite 249 bis 271, einer für den vorliegenden Fall fast erschöpfenden Untersuchung unterworfen, deren Ergebniss, eine wahre Zierde unseres Werks, durch die Bündigkeit des Verfahrens über jedem Zweifel steht. Ich habe hier kurz die hauptsächlichsten Punkte hervorzuheben.

Bekanntlich tritt täglich vorzugsweise in den Nachmittagsstunden, etwa auf $\frac{3}{5}$ der Zwischenzeit zwischen Mittag und Sonnenuntergang ein Zeitraum ein, in welchem die irdischen Objecte durch's Fernrohr betrachtet *vollkommen ruhige* Bilder darbieten. Die Dauer desselben ist bald kürzer, bald länger, und hängt von mannigfachen Witterungsumständen und den Oertlichkeiten ab. Vor und nach der Zeit der Ruhe ist die Zeit der schwirrenden Bilder. Die Unruhe ist bei gewöhnlichem Verlaufe desto grösser, je weiter

*) Nach der von Sabler gegebenen Zusammenstellung der reciproken Messungen, findet sich Seite 227, für P^{14} die Höhe 2154,9 + 1072,1 = 3227,0 Zoll, und Seite 248 für P^{123} die Höhe $-736,9 + 401,9 = -335,0$ Zoll, woraus $P^{123} - P^{14} = -3562,0$ Zoll folgt. Die von mir gegebene Zahl ist eine andere geworden, weil ich für die einzelnen Höhenunterschiede alle Sätze nach ihren gehörigen Gewichten stimmen liess, was von Sabler nicht gleichförmig beobachtet war.

die Zeit von der Mitte der ruhigen Bilder abliegt. Aber die beiden Unruhen, vor und nach der Ruhe, sind wesentlich verschiedener Natur. Bei der vorangehenden Unruhe I, die wir die *negative Unruhe* nennen können, ist die Strahlenbrechung kleiner als für die Ruhe des Bildes, bei der nachfolgenden Unruhe II, der *positiven*, ist sie ohne Ausnahme grösser. Sabler nimmt 5 Abstufungen des Bildes, in Bezug auf die Ruhe, vor der vollkommenen Ruhe, und ebenso viel nach derselben an, also im Ganzen 10 Stufen, von I *sehr unruhig* durch *sehr ruhig* bis II *sehr unruhig*. Gewöhnlich durchläuft das Bild von Mittag bis Sonnenuntergang diese 11 Zustände in der angegebenen Reihenfolge. (Die vormittägigen Erscheinungen sind von ihm nicht erörtert, weil alle Zenithdistanzen in den im Ganzen weit günstigeren Nachmittagsstunden beobachtet sind.)

Die Ursache dieses Verlaufs ist in dem Einfluss des mehr oder minder erwärmten Erdbodens zu suchen, welcher die regelmässige Schichtung der Luft stört. So lange der Erdboden wärmer ist als die ihn berührende Luft, tritt eine Verdünnung der unteren Luftschichten ein, welche eine Verminderung der Refractionen, und durch das Aufsteigen der erwärmten Luftschichten das Schwirren der Bilder zur Folge hat. Ist die Temperatur des Bodens der der Luft gleich, so findet die regelmässige Schichtung der Luft statt, die Ruhe der Bilder beginnt, und wir haben die diesem Zustande entsprechende normale Refraction. Oft ist diese wichtige Periode des normalen Zustandes nur von kurzer Dauer, denn bald verliert der Boden an Wärme, durch Strahlung und Verdunstung, wird kälter als die ihn berührenden Luftschichten und erzeugt nunmehr bis Sonnenuntergang wachsende Refractionen, die mit einer in der Regel zunehmenden Unruhe der Bilder verbunden sind. Der so eben beschriebene Verlauf tritt ein gleichermassen, der Himmel mag wolkenrein oder bedeckt sein; nur dass in letzterem Falle der Verlauf ein langsamerer, die Dauer der einzelnen Zustände eine längere ist. Die Abweichungen von der Reihenfolge sind selten, und ereignen sich vorzugsweise nur bei plötzlichen atmosphärischen Veränderungen. Wenn z. B. bei bedecktem Himmel die Ruhe der Bilder schon begonnen, dann sich plötzlich der Himmel aufklärt und die Sonne heftig wirkt: so kehrt mitunter die erste Unruhe auf eine kurze Zeit zurück, geht aber meistens bald in eine neue Ruhe über, die dann gewöhnlich um so rascher in die 2te Unruhe verläuft. Unmittelbar nach einem Regenschauer, das eine plötzliche Nässe und Erkältung des Bodens hervorbringt, kann schon vor der Ruhe der Bilder eine Unruhe II, mit stärkerer Refraction entstehen. So wie diese Wirkung aber aufhört, stellt sich die Ruhe der Bilder ein, auf welche in der Regel bald ein Uebergang in die Unruhe II folgt.

Unsere Beobachter haben daher bei jedem Beobachtungssatze den Zustand der Bilder für jedes der beobachteten Objecte aufs sorgfältigste bezeichnet, in der Aussicht in dieser Characteristik der Bilder einen wichtigen Fingerzeig für die anzuwendende Strahlenbrechung zu erhalten, falls es gelingen würde den Zusammenhang zwischen dem Zustande der Bilder und der Strahlenbrechung auszumitteln. Diese Maassregel hat einen ausgezeichneten Erfolg gehabt.

Wir müssen uns hier erinnern, dass die Refractionen sowohl für die kürzeren Entfernungen S zwischen den Basispunkten und den Hauptpunkten, als für die grösseren E zu untersuchen waren, und dass hierbei nicht nur die Entfernungen, die im Mittel sich fast genau wie 1:2 verhalten (3,34 und 6,68 Werst,

oder 115,5 und 230,7 Secunden des grössten Kreises der Erde), sondern auch besonders der Umstand in Betracht kam, dass die Gesichtslinien S immer näher am Erdboden lagen, als die Gesichtslinien E . In der eigentlichen flachen Steppe, von P^1 bis P^{40} und P^{71} bis P^{124} , befanden sich nemlich, wie schon erwähnt, die Hauptsignale auf den Kurganen, während die Basispunkte in der Ebene lagen. Auf gleiche Weise waren auf dem etwas ungleicheren Theile des Terrains, zwischen den Signalen P^{40} und P^{71} , die Hauptsignale auf den Anhöhen, die sich vorfanden, die Basen in den zwischenliegenden ebenen Thälern. Es war daher zu erwarten, dass im Allgemeinen verhältnissmässig grössere Veränderungen der Refractionscoefficienten für die Entfernungen S als für die grösseren E sich herausstellen würden.

§ 15.

Sabler begann seine Untersuchung mit der Ermittlung des Coefficienten der Strahlenbrechung für die vollkommene Ruhe des Bildes, durch Untersuchung derjenigen Beobachtungssätze, deren Characteristik *sehr ruhig* ist. Er fand

aus 83 Beobachtungen der Basispunkte $\varrho = 0,0876 C \mp 0,0019 C$;

« 61 « der Signalpunkte $\varrho = 0,0884 C \mp 0,0013 C$.

Es zeigt sich also hier bei vollkommener Ruhe der Bilder ein völlig gleicher Refractionscoefficient 0,088, für die Objecte in einfacher und doppelter Entfernung, und deutet somit eine normale Schichtung der Luft bis zur Berührung mit dem Boden an. Dies Ergebniss erhält eine noch grössere Bedeutung, wenn sich nachweisen lässt, dass für denselben Zustand des Bildes auch, bei einer höheren Lage des Lichtstrahls über dem Boden, derselbe Coefficient stattfindet. Ich habe, in meiner *Gradmessung in den Ostseeprovinzen*, Bd. I, S. 203, für den mittleren Werth der Refraction $\varrho = 0,0619 C$ gegeben. Dieser Coefficient bezieht sich aber auf eine Zeit, die am Nachmittage dem Anfange der Ruhe der Bilder etwa 1 Stunde vorausgeht. Es muss also der Coefficient für den Normalzustand der Bilder grösser sein. Die vollkommene Ruhe der Bilder tritt unter 58° Polhöhe, in den beiden dem Sommersolstitio nächsten Monaten, nahezu um $6^h 20^m$ ein. Für diese Zeit lässt sich, aus *Gradmessung* Seite 204, $\varrho = 0,080$, für die Temperatur $+7^\circ,4$ R. und die Barometerhöhe 332,7 Par. Lin., mit grosser Annäherung ableiten. Endlich finden wir in unserm Werke S. 378 aus den Beobachtungen der hohen Bergspitzen des Caucasus, bei denen die tägliche Veränderlichkeit der Strahlenbrechung, wegen der raschen Entfernung der Gesichtslinie vom Boden, schon sehr gering ist, für den Sommer den Werth $\varrho = 0,0774 C$ angegeben. Die Vergleichung dieser 4 Bestimmungen unter sich zeigt, dass für die Zeit der völligen Ruhe der Bilder, in den Sommermonaten, ein gleicher mittlerer Coefficient der Strahlenbrechung unter allen Verhältnissen der Erhebung der Gesichtslinie stattfindet, der also auf den jedesmaligen mit Berücksichtigung des Barometers und Thermometers am Beobachtungsorte zu reduciren ist, wie bei der astronomischen Strahlenbrechung. Der Werth dieses Coefficienten lässt sich etwa zu 0,084 annehmen. Es wäre wichtig ihn durch geeignete Beobachtungsreihen an Standpunkten in verschiedenen Höhen über dem Meere und an Gegenständen, die unter möglichst verschiedenen Höhenwinkeln erscheinen, von neuem, mit sorgfältiger Beachtung der Ruhe der Bilder, zu ermitteln, und die Grenzen seiner Sicherheit festzusetzen, weil er dann zu einer höhern Genauigkeit der trigonometrischen Höhenbestimmung aus einseitigen Beobachtungen führen müsste.

Auf ganz ähnliche Weise, wie für die völlige Ruhe der Bilder, hat Sabler die Constante für die übrigen 10 von ihm angenommenen Zustände abgeleitet, die sich auf gedoppelte Weise zusammenstellen lassen :

Zustand des Bildes.	Mittlerer Werth der Strahlenbrechung	
	für die Signalbeob., B, mittl. Entfernung C = 115",5.	für die Signalbeob., P, mittl. Entfernung C = 230",7.
	$\varrho =$ R	$\varrho =$ R'
I sehr unruhig	-0,326 C = (ϱ) - 43",4	-0,065 C = (ϱ) - 36",1
I unruhig	-0,133 C = (ϱ) - 23,3	-0,020 C = (ϱ) - 2",4
I etwas unruhig	-0,036 C = (ϱ) - 1",4	+0,027 C = (ϱ) - 1",4
I fast ruhig	+0,009 C = (ϱ) - 9,5	+0,050 C = (ϱ) - 9,2
I ruhig	+0,054 C = (ϱ) - 4,0	+0,071 C = (ϱ) - 4,0
sehr ruhig	+0,088 C = (ϱ)	+0,088 C = (ϱ)
II ruhig	+0,117 C = (ϱ) + 3,6	+0,104 C = (ϱ) + 3,4
II fast ruhig	+0,150 C = (ϱ) + 7,5	+0,120 C = (ϱ) + 7,4
II etwas unruhig	+0,187 C = (ϱ) + 12,9	+0,156 C = (ϱ) + 15,9
II unruhig	+0,272 C = (ϱ) + 20,6	+0,196 C = (ϱ) + 22,2
II sehr unruhig	+0,488 C = (ϱ) + 38,3	

Die 2ten Werthe sind die von Sabler, Seite 269, zusammengestellten, die ersten habe ich aus Seite 255 bis 268 zusammengetragen. Die Betrachtung dieser Tafel führt zu folgenden Schlüssen :

- 1) Der regelmässige Gang der gefundenen ϱ , in beiden Reihen, beweist die völlige Gültigkeit und Bedeutsamkeit der von Sabler angenommenen Bezeichnung des Zustandes der Bilder.
- 2) Wenn man zwischen je zwei gleich weit von der völligen Ruhe der Bilder abstehenden Refractionen die Mittel nimmt, so erhält man nach einander, von der Mitte aus, folgende Werthe :

$$\begin{array}{l}
 \text{bei den B} \left| \begin{array}{c} \frac{1}{2} (\varrho^1 + \varrho^{-1}) \\ (\varrho) - 0",2 \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} \frac{1}{2} (\varrho^2 + \varrho^{-2}) \\ (\varrho) - 1",0 \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} \frac{1}{2} (\varrho^3 + \varrho^{-3}) \\ (\varrho) - 0",6 \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} \frac{1}{2} (\varrho^4 + \varrho^{-4}) \\ (\varrho) - 1",4 \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} \frac{1}{2} (\varrho^5 + \varrho^{-5}) \\ (\varrho) - 2",5 \end{array} \right| \\
 \text{" " P} \left| \begin{array}{c} (\varrho) - 0,6 \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} (\varrho) - 0,9 \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} (\varrho) + 0,9 \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} (\varrho) - 1,1 \end{array} \right|
 \end{array}$$

Hieraus erkennt man die wahre Bedeutung der entgegengesetzten Bezeichnungen wie I *unruhig* und II *unruhig*; es sind, bei gleichem Grade der Unruhe, Zustände der Bilder, bei denen die Strahlenbrechung fast genau gleich weit nach beiden Seiten von ihrem normalen Werthe (ϱ), der bei der Ruhe der Bilder eintritt, abweicht.

- 3) Da für alle Zustände $R = R'^*$ sich findet, so weit die w. F. es zulassen, so stellen sich hier die Abweichungen der jedesmaligen Refraction von der normalen Refraction, als im Winkelbetrage unabhängig von der Entfernung der Objecte dar. Diese Unabhängigkeit erscheint im Widerspruche mit dem angenommenen Gesetze, dass zu gleichen Zeiten die Refractionen verschieden entfernter Objecte, sich wie die Abstände derselben verhalten. Es ist aber zu bedenken, dass allgemein betrachtet, für

*) Im Texte Seite 254 u. f. ist diese Grösse K und K' bezeichnet.

Gegenstände in verschiedenen Entfernungen, nicht gleiche Zustände der Bilder gleichzeitig sind, indem in der Regel das Schwirren der entfernteren Gegenstände das stärkere ist. Sabler gibt zwar gewöhnlich in seinem Tagebuche der Beobachtung einen gleichen Zustand der Bilder für beiderlei Objecte, in einfacher und doppelter Entfernung an, mit einigen Ausnahmen, wo das entferntere Object als das unruhigere gesehen wurde. Aber diese Gleichheit der Bilder ist hier wohl vorzugsweise dem Umstande zuzuschreiben, dass für das nähere Object, wie oben schon gesagt, die Gesichtslinie in der Regel die dem Boden nähere war. Es darf also der von Sabler aufgestellte Satz $\varrho = 0,088 C + R$ auf keine Weise als ein für gleichzeitige beliebige Entfernungen unter allen Umständen gültiger angesehen werden, sondern vielmehr als der merkwürdig genaue Ausdruck der Refractionen, unter den bei der ausgeführten Operation obwaltenden allgemeinen örtlichen Verhältnissen.

§ 16.

Sabler gibt nun noch, S. 271, aus den übrigbleibenden Abweichungen der einzelnen beobachteten Strahlenbrechungen von der Formel, den w. F. einer einzelnen Brechung, d. h. den w. F. einer einzelnen beobachteten Zenithdistanz, für die verschiedenen Zustände der Bilder. Für die *sehr ruhigen* Bilder ist er $2,06$ bei den Basisbeobachtungen, und $2,40$ bei den Signalbeobachtungen, und wird desto grösser, je weiter der Zustand der Bilder sich von der völligen Ruhe nach beiden Seiten entfernt. Wenn man berücksichtigt, dass der w. F. der Messung $1,1$ beträgt, Seite 317, so folgt dass die Unsicherheit der Refraction allein, oder deren Abweichung von der Formel, für die ruhigen Bilder noch kleiner wird, und nur $\sqrt{(2,06^2 - 1,1^2)} = 1,74$ und $\sqrt{(2,40^2 - 1,1^2)} = 2,13$ beträgt. Aber diese Werthe sind entschieden noch etwas zu gross, weil die bei ihrer Ableitung zum Grunde gelegten Höhenunterschiede nicht ganz genau waren. Diese Fehlerquelle hat aber auf das Mittel aus einer Anzahl von Beobachtungen keine Wirkung, und wir können in den Formeln $\varrho = 0,088 C - R$, R als mit so grosser Sicherheit bestimmt ansehen, als sein w. F. es angibt. Den Winkeln $1,74$ und $2,13$ entsprechen, bei den mittleren Entfernungen, lineare Werthe von 1,2 Zoll und 2,89 Zoll, welche Grössen die in den Höhenunterschieden zwischen einem Hauptpunct und dem benachbarten Basispunct B , oder Hauptpunct P , durch die zufälligen Störungen der Refraction hervorgerufenen Unsicherheiten ausdrücken, wenn dieselben aus einem einzigen Satze, bei völlig ruhigen Bildern von Sabler beobachtet, abgeleitet werden.

Aus den w. F. einer Zenithdistanz, wie sie Seite 271 für die verschiedenen Zustände der Bilder gegeben, finden sich nun ebenfalls die Gewichte der bei diesen verschiedenen Zuständen beobachteten Sätze, und hiermit der Weg sie regelrecht zu einem Mittel zu vereinigen. Siehe Seite 271. Seite 272 bis 317 sind nun alle von Sabler gefundenen partiellen Höhenunterschiede eines jeden P^{n+1} von P^n , P^{n+2} , B^n , B^{n+1} gegeben, berechnet unter Anwendung der jedesmal dem Zustande der Bilder entsprechenden Strahlenbrechung, so wie die aus den verschiedenen Sätzen nach den relativen Gewichten gefolgerten Mittel. Diese Angaben bilden die Grundlage der aus den von Sabler an den Hauptpuncten P angestellten Beobachtungen für sich abzuleitenden Höhenbestimmungen der ganzen Operationslinie.

Seite 320 bis 348 gibt uns Sawitsch seine Bearbeitung der von ihm an den Basispuncten beobachteten Zenithdistanzen. Auch er sieht, nach Sabler's Vorgange, den Zustand der Bilder als das Kennzeichen der

jedesmaligen Refraction an, nimmt aber nur 7 verschiedene Zustände an, Seite 320. Die von ihm gefundenen Refractionscoefficienten beruhen auf seinen und Sabler's reciproken Beobachtungen, beziehen sich also alle auf die Abstände S zwischen den Haupt- und Basispunkten. Er weicht aber wesentlich in seiner Ansicht über die Refraction von Sabler ab, indem er die jedesmaligen Refractionen den Abständen proportionirt setzt. Vergleicht man die von ihm gefundenen Coefficienten mit den nach Sabler oben Seite xxvi gegebenen: so ergibt sich, wenn wir die verschiedenen Zustände bei Sabler durch Σ^1 bis Σ^{11} , bei Sawitsch durch S^1 bis S^7 bezeichnen, dass, da der Σ^1 entsprechende Zustand bei Sawitsch nicht vorkommt, von dann an sehr nahezu:

$$S^1 = \Sigma^2, S^2 = \Sigma^3, S^3 = \Sigma^4; S^4 = \frac{\Sigma^5 + \Sigma^6 + \Sigma^7}{3}$$

$$S^5 = \Sigma^8, S^6 = \frac{\Sigma^9 + \Sigma^{10}}{2}, \text{ und } S^7 = \Sigma^{11}.$$

Bei der Berechnung benutzt er diejenige Refraction, die seine Untersuchung ihm für die verschiedenen Zustände der Bilder gegeben, vereinigt aber die aus den verschiedenen Sätzen folgenden Werthe der partiellen Höhenunterschiede in der Art, dass er nur diejenigen berücksichtigt, bei denen die Bilder entweder ganz ruhig oder wenig unruhig waren; also die Beobachtungen bei Unruhe oder heftiger Unruhe als zu unsicher ganz beseitigt. Für jene 2 gebrauchten Zustände bestimmte er das Verhältniss der Gewichte 10 : 4, Seite 321.

Endlich haben wir, S. 349 bis 370, die Zusammenstellung aller von Fuss aus seinen Beobachtungen an den Basispunkten gefolgerten partiellen Höhenunterschiede, bei deren Berechnung die von Sawitsch gefundenen Refractionscoefficienten, für den verschiedenen Zustand der Bilder, angewandt wurden. Indess hat Fuss für mittlere Zustände, zwischen denen die Sawitsch zum Grunde legt, auch die Mittel der beiden benachbarten Coefficienten genommen. Um die aus verschiedenen Sätzen erhaltenen Höhenunterschiede zu vereinigen, hat er relative Gewichte gebraucht, die aber im Texte nicht angegeben sind.

§ 17.

Die Beobachtungen auf den Basispunkten, von Sawitsch und Fuss, mussten auf eine ganz einfache Weise durch Summirung der partiellen Höhenunterschiede zu den zwei Reihen (S) und (F) führen, welche, da die absolute Höhe des ersten Signals P^1 über dem mittleren Stande des Asowschen Meeres unmittelbar = 146,0 Zoll gemessen war, die absoluten Höhen aller beobachteten Signalmarken über diesem Meere enthalten, und mit der negativen Höhe des Caspischen Meeres K schliessen. Ebenso führten Sabler's Beobachtungen nach seiner Ansicht zu 2 Reihen von Bestimmungen, die zuletzt ebenfalls die relative Höhe der beiden Meere geben. Eine dieser Reihen (Σ^1) geht durch die Basispunkte, die andere (P) durch die Hauptsignale. Jeder Beobachter hat ferner den w. F. seines Endresultats K nach gewissen Grundlagen abgeleitet. Endlich hat Sabler, aus der Verbindung der Bestimmungen der einzelnen Beobachter und deren w. F., einen Schlusswerth gezogen, nach dem das mittlere Niveau des Caspischen Meeres um 83,67 engl. Fuss tiefer liegt als das Asowsche, eine Bestimmung, deren wahrscheinlicher Fehler = 1,23 Fuss angegeben ist. Siehe S. 371.

§ 18.

Gewiss ist dieser von Sabler angegebene Höhenunterschied der beiden Meere ein nahezu richtiger, aber er ist nicht derjenige, der aus der Gesammtheit der Beobachtungen folgt, wenn dieselben auf's strengste abgewogen, verglichen und zu Endwerthen vereinigt werden. Ich hielt es für nothwendig mich der Ausführung dieser Arbeit zu unterziehen, wenn ich gleich einsah dass dies nicht ohne ein in's einzelne gehendes Studium des ganzen Beobachtungsmaterials, und ohne einen bedeutenden Aufwand von Rechnung geschehen konnte.

Ich werde zunächst die Arbeiten der 3 Beobachter als gesonderte ansehen, und daher auch die 3 auf Sabler's Messungen beruhenden Reihen Σ' , Σ'' , Σ''' als ohne Verbindung unter einander betrachten, so dass das Seite 371 gegebene Resultat aus der Reihe (*P*) wieder in seine beiden Bestandtheile Σ'' und Σ''' , von den geraden und ungeraden Signalpuncten aus beobachtet, zerlegt wird. Auf diese Weise komme ich zu 5 unabhängigen, neben einander laufenden Reihen, für die Höhen der Zwischenpuncte so wie des Caspischen Meeres, auf die Fläche des Asowschen bezogen, wie dies Seite III gefordert wurde. Die Uebereinstimmung dieser 5 Reihen, innerhalb gewisser Gränzen, gewährt die vollkommenste Ueberzeugung von der allgemeinen Richtigkeit der ganzen Operation, und erhöht das subjective Zutrauen zu deren Endresultate, welches Zutrauen wohl nicht in dem Maasse gewonnen wird, wenn für jeden partiellen Höhenunterschied die von den verschiedenen Beobachtern gewonnenen Zahlenwerthe sofort unter einander verbunden werden, und dadurch das gegenseitige Verhalten der einzelnen Reihen in ihrem ganzen Verlaufe aus den Augen verloren geht.

Die Richtigkeit der Rechnungen, wodurch aus den beobachteten Zenithdistanzen, mit Zuziehung der horizontalen Abstände, Seite 195 bis 221, die einzelnen Höhenunterschiede abgeleitet waren, unterlag keinem Zweifel, da jeder der 3 Bearbeiter seine Rechnung doppelt unabhängig geführt hatte. Ich konnte daher mit voller Zuversicht die in den 3 Zusammenstellungen, von Sabler Seite 272 bis 317, von Sawitsch Seite 322 bis 342, von Fuss Seite 350 bis 370, gegebenen Zahlenwerthe meinen Untersuchungen im allgemeinen zum Grunde legen. Indess hielt ich es für nothwendig die daselbst angewandten Refractionen mit Aufmerksamkeit durchzusehen, zumal in den Fällen, wo, durch eine verschiedene Characteristik des Zustandes der Bilder der beiden von der Mitte aus entgegengesetzten Objecte, die Annahme einer verschiedenen Refraction für beide veranlasst worden war.

§ 19.

In den 3 Tagebüchern der Zenithdistanzen, die das 2te Capitel Seite 48 bis 178 enthält, ist von den Beobachtern der Zustand der Bilder bei jedem Satze eines Objecte gegeben, aber ohne weitere Angabe, ob die Characteristik sich auf die Unruhe vor oder nach der völligen Ruhe bezog. Diese Angabe konnte sich auch nur aus dem Verlaufe der Bilder in den auf einander folgenden Sätzen ableiten lassen. In der Regel bleibt auch nicht der geringste Zweifel über die Richtigkeit der von Sabler für die Auswahl der jedesmaligen Refraction bei den Berechnungen Seite 272 bis 317 gewählten I oder II.

Nur in 3 Fällen finde ich dass die beigesetzte II den Angaben des Tagebuchs nicht entspricht. Es sind die folgenden.

Seite 282, in p^{29} . 1837, 6. Mai. Tagebuch S. 58.

In der Berechnung ist im ersten und zweiten Satz den Objecten β^{28} und P^{28} die Characteristik II *ruhig* gegeben, es muss aber I *ruhig* sein, wie für die beiden andern Objecte und im dritten Satz. Hierdurch ist folgendes zu ändern. Statt der beiden Refractionen $-15,9$ und $-29,5$ sind $-8,3$ und $-22,1$ zu setzen. Für die verbesserten Höhen in Zollen $-98,0$, $+529,2$, $-93,6$ und $+543,1$ sind $-91,4$, $+542,1$, $-87,0$ und $+556,0$ zu setzen. Endlich auf der rechten Seite sind als Mittelwerthe bei β^{28} statt $-93,4$ jetzt $-88,9$, und bei P^{28} statt $+536,1$ jetzt $+549,0$ zu setzen.

Seite 286, in p^{40} . 1837, 21. Mai. Tagebuch S. 62.

Beim Object P^{39} im 2ten Satz ist II *ruhig* in I *ruhig*, und dem zufolge $-20,6$ und $+52,3$ in $-13,2$ und $+60,8$, endlich auf der rechten Seite $+52,4$ in $+56,6$ zu ändern.

Seite 289, in p^{48} . 1837, 6. Juni. Tagebuch S. 66.

Beim Object P^{47} im 2ten Satz ist II *ruhig* problematisch, indem der Zustand auch I *ruhig* gewesen sein kann. Im ersten Fall wäre die Refraction $-18,7$, im zweiten $-11,3$ gewesen. Um die geringste Gefahr zu laufen ist das Mittel $-15,0$ genommen, wodurch der Höhenunterschied statt $-821,1$ jetzt $-817,6$ zu setzen ist, und auf der rechten Seite als Mittelwerth statt $-821,5$ jetzt $-818,6$ kommt.

Ich habe diese Verbesserungen, nachdem sie gemacht waren, H. Sabler mitgetheilt, der sie alle 3 nach Untersuchung des Originaltagebuches als richtig anerkannt hat.

§ 20.

In der Zusammenstellung von Sawitsch habe ich folgende Verbesserungen als unerlässlich erkannt.

1. Seite 327. P^{55} und P^{54} . 13. Mai. Tagebuch S. 107.

Die Characteristik des 2ten Satzes für P^{54} *unruhig* muss nach dem Tagebuche *etwas unruhig* sein. Die von Sawitsch für dies Object angewandten Refractionscoefficienten $-0,13$, $-0,03$, $+0,01$, $+0,20$ sind in $-0,13$, $+0,01$, $+0,15$ und $+0,20$ zu ändern. Die diesen entsprechenden einzelnen Höhen sind 278,8, 277,4, 275,7, 295,2.

2. Seite 329. P^{45} und P^{46} . Juni 1. Tagebuch S. 111.

Im dritten Satz ist für P^{45} der Refractionscoefficient $+0,46$, für P^{46} aber $+0,20$ angewandt. Diese Annahme ist wegen der ungleichen Entfernung doppelt bedenklich, und es ist nothwendig den 3ten Satz ganz auszuschliessen, um das Resultat aus den beiden andern nicht zu gefährden, selbst wenn der 3te mit kleinem Gewichte hinzukäme.

3. Seite 331. P^{58} und P^{59} . Juni 27. Tagebuch S. 115.

Die 3 Beobachter geben für den heutigen Tag in den Tagebüchern in unabhängiger Uebereinstimmung an, dass die Sätze um 3^h48^m und 4^h38^m nach und bei Gewitterregen beobachtet wurden. Erst beim letzten Satz um 5^h28^m war, nachdem der Regen vorübergegangen war, völlige Ruhe der Bilder eingetreten. Da Gewitterregen immer ohne Ausnahme eine Vermehrung der Refraction erzeugt, so hat Sabler richtig seinem Satz um 4^h38^m die Characteristik II gegeben, S. 293, was auch mit dem scheinbaren

Sinken der Objecte von 4^h38^m bis 5^h28^m übereinstimmt. Dasselbe Sinken spricht sich in den Beobachtungen von Sawitsch und Fuss aus, beide haben aber bei den Berechnungen die gewöhnlichen schwachen Refractionen angewandt, was ganz unstatthaft ist. Nach den von Sawitsch gegebenen Characteristiken sind für P^{58} die Refractionscoefficienten $+0,15$, $+0,15$ und $+0,088$, für P^{59} aber $+0,15$, $+0,088$ und $+0,088$ zu setzen. Die Characteristik *ruhig* für P^{59} um 3^h48^m ist nemlich ein Versehen, und ist nach dem Tagebuche entschieden in *ziemlich ruhig* zu verändern. Mit diesen Refractionen sind nun die einzelnen Höhen

	für P^{58}	für P^{59}
	— 1305,9	+ 7147,5
	— 1306,3	+ 7154,3
	— 1305,5	+ 7148,0

4. Seite 337. P^{93} und P^{94} . Sept. 9. Tagebuch S. 126.

Im dritten Satz um 5^h28^m müssen beide Objecte die gleiche Bezeichnung *fast ruhig* erhalten, und der Refractionscoefficient für P^{94} muss $0,15$ statt $0,20$ sein. Die diesem entsprechende Höhe wird $+145,8$ statt $+138,9$.

5. Seite 337. P^{94} und P^{95} . Sept. 10. Tagebuch S. 126.

Die Characteristik *unruhig* im ersten Satz ist nicht richtig. Sie muss *fast ruhig* sein. Der Refractionscoefficient muss für beide Objecte $+0,01$ sein, und statt $+316,4$ und $-72,1$ müssen die Höhen $+314,3$ und $-75,8$ sein.

§ 21.

In der Zusammenstellung von Fuss sind folgende Verbesserungen anzubringen.

1. Seite 351. P^{13} und P^{14} . 8. April. Tagebuch S. 140.

Hier ist ein kleiner Rechnungsfehler vorhanden. Für P^{14} sind die unverbesserten Erhebungen über β^{13} , $+48,7$, $+59,7$ und $+63,5$, wofür $+50,8$, $+61,8$ und $+65,2$ gegeben sind.

2. Seite 354. P^{28} und P^{29} . 5. Mai. Tagebuch S. 145.

Fuss Beobachtungen in β^{28} zeigen eine ganz ungewöhnliche Veränderung der Refraction an, zumal für das Object P^{28} , zu dem die Gesichtslinie dicht über eine vorliegende hohe Fläche streifte. Von 3^h47^m bis 6^h9^m nimmt die Zenithdistanz von P^{29} um $0'45''$ ab, die des nur etwas entfernten Signals P^{28} aber um $1'57''$, welchen Veränderungen Zunahmen der Refractionscoefficienten von $0,32$ für P^{29} , und von $0,75$ für P^{28} entsprechen, und wonach P^{29} zuletzt um $37,3$ Zoll, P^{28} aber um $108,1$ Zoll höher erschien, als zu Anfang der Beobachtungen. Fuss zeigt einen ungewöhnlichen Zustand um 3^h47^m sofort dadurch an, dass er dem Object P^{28} im Tagebuche den Beisatz *fast miragirt* gibt. Es ist demnach entschieden dass dieser früheste Satz nicht berücksichtigt werden darf. Wir haben also die drei andern Sätze allein zu betrachten. Die Seite 354 gegebenen Characteristiken sind *fast ruhig*, *ruhig* und *fast ruhig*. Die letzte ist aber eine willkürliche Aenderung, denn das Tagebuch hat für 6^h9^m ganz bestimmt *völlig ruhig*, so gut wie für 5^h27^m . Unmöglich ist es aber die 3 Sätze zu einem zuverlässigen Resultate zu vereinigen,

da der Höhenunterschied $P^{29}-P^{28}$ aus ihnen respective $-493,5$, $-518,0$ und $-539,4$ Zoll nach Fuss Rechnung folgt, worin sich die Ungleichheit der Refraction nach beiden Seiten deutlich ausspricht. Glücklicher Weise geben die gleichzeitigen Beobachtungen von Sabler und Sawitsch vollständigen Aufschluss, und bestimmen in diesem Ausnahmefalle die zu treffende Wahl aufs entschiedenste. Sabler fand nemlich in P^{28} eine ganz analoge ausserordentliche Zunahme der Refraction für β^{28} , wie Fuss für P^{28} von β^{28} aus, während auch für ihn die Veränderung für die anderen Objecte β^{27} , P^{28} und P^{29} nur die gewöhnliche war, und es ergibt sich ganz deutlich dass nur für die Linie $P^{28}\beta^{28}$ ein ausnahmlches Phänomen stattfand. Dies übersieht man am deutlichsten in seinem eigenthümlichen Verhalten aus Seite 229, wo die reciproken Zenithdistanzen zusammengestellt sind. Wir finden daselbst nemlich:

	für die Linie $\beta^{27}-P^{28}$,	für die Linie $P^{28}-\beta^{28}$
um 4^h41^m	$\rho : C = -0,015$	$\rho : C = -0,269$
5 27,5	$+0,047$	$-0,030$
6 9	$+0,163$	$+0,181.$

Es sind demnach die Refractionscoefficienten für die letzte Linie, um 4^h41^m und $5^h27^m,5$ ganz anders als für die erste, und nur im letzten Satz findet ein fast genau gleicher Coefficient nach beiden Seiten statt. Da hatte also der störende Einfluss der Nähe der Gesichtslinie zum Erdboden aufgehört. Da nun der Vortheil der Messung aus der Mitte auf der Gleichheit der Refractionen nach beiden Seiten beruht, so ist es klar dass wir nur den von Fuss beobachteten letzten Satz brauchen können, und alle 3 früheren ausschliessen müssen. Fuss hat diesen seinen Satz mit dem Refractionscoefficienten $0,15$ berechnet, der zwar fast genau mit dem durch die reciproken Beobachtungen abgeleiteten übereinstimmt. Es ist aber consequenter, da die völlige Ruhe der Bilder von Fuss bestimmt angegeben ist, den Coefficienten $+0,09$ zu gebrauchen, dem die Refractionen in Zollen $+13,0$ für P^{28} , und $+10,4$ für P^{29} zukommen, womit der Höhenunterschied $P^{29}-P^{28}$ nach diesem Satze $-540,9$ Zoll wird.

3. Seite 355. P^{56} und P^{57} . 16. Mai. Tagebuch S. 147.

Dem Satz III um 5^h27^m ist die Characteristik *fast ruhig* von Fuss gegeben. Das Tagebuch gibt aber bestimmt *ruhig*. Folglich gehört zu diesem Satz der Refractionscoefficient $+0,09$ und nicht $+0,15$. Die entsprechenden Refractionen in Zollen sind $+15,1$ und $+10,3$, und $P^{57}-P^{56}$ aus diesem Satz wird $-452,5$ statt $-449,3$.

4. Seite 359. P^{59} und P^{60} . 27. Juni. Tagebuch S. 155.

Der erste Satz für 3^h47^m findet sich nicht im gedruckten Tagebuch. Er ist auch ungültig und von Fuss gleich verworfen, weil die Objecte unregelmässige Formänderungen zeigten. Für den 2ten Satz ist der Refractionscoefficient $+0,15$ zu brauchen. Siehe oben Seite xxxi. 3. Mit ihm sind die Refractionen in Zollen $+11,1$ für P^{59} , und $+14,5$ für P^{60} , und $P^{60}-P^{59}$ wird $-283,4$ aus diesem Satz.

§ 22.

Alle von unsren Beobachtern gegebenen Höhenunterschiede beziehen sich auf die Mitten der an den verschiedenen Puncten aufgestellten Visirmarken, und nicht auf den Erdboden. Die Nivellirungslinie geht

also von einem Meere zum andern durch alle Oerter der Marken, in einer gewissen Höhe über dem Fussboden fort, die für die Hauptsignale P nahezu 12 Fuss, für die Basissignale A oder B anfangs 5 Fuss, bis zur 20sten Basis, nachher aber ebenfalls 12 Fuss beträgt, da bei allen Basispunkten, deren Zenithdistanzen zu beobachten waren, von der 21sten Grundlinie an, höhere Signalstangen α oder β errichtet wurden. Siehe Seite 103.

An jedem Beobachtungspuncte hat jeder der Beobachter für den Höhenunterschied der beiden correspondirenden, nach entgegengesetzten Seiten belegenen Puncte so viel Werthe erhalten, als verschiedene Sätze von ihm genommen sind. Diese Werthe müssen nach den Gewichten der einzelnen Sätze zu einem Mittel vereinigt werden, wobei sich zugleich das Gewicht dieses Mittels ergibt. Es ist klar dass hierbei, wenn in einem Satze den beiden Höhen h und i , der beiden correspondirenden Objecte, über dem Standpuncte, bei verschiedenem Zustande der Bilder, verschiedene Gewichte m und n zukommen, bei der Berechnung der Mittel, beiden das gleiche Gewicht $\frac{2mn}{m+n}$ gegeben werden muss, wodurch der Höhenunterschied $i-h$ das richtige Gewicht $\frac{mn}{m+n}$ erhält. Sabler hat genau angegeben, welches die relativen Gewichte der Sätze nach den Zuständen der Bilder sind. Siehe Seite 271. Ich fand aber dass seine Mittel anfangs nicht strenge nach diesen Gewichten genommen sind, und habe daher alle Mittel auf's neue berechnet. Für die Mittel waren überdies die unvollständigen Sätze auszuschliessen, in welchen nur eins der correspondirenden Objecte beobachtet war. Würden nemlich diese mitgenommen, so wäre die für das Princip der Messung aus der Mitte so wesentliche Gleichzeitigkeit der Beobachtung nach beiden Seiten hin gestört. Wir finden z. B. bei Sabler p. 293, dass in p^{58} die beiden Basissignale β^{57} und α^{58} in 3 Sätzen, I, II, III, ausserdem aber noch β^{57} allein im Satz IV beobachtet ist. Diese letzte Beobachtung ist von ihm mit zum Mittel gezogen, muss aber, wenn die Gleichzeitigkeit erhalten werden soll, ausgeschlossen werden. Solcher Fälle sind nur noch 2, in p^{67} und p^{69} . Auch für die Beobachtungen von Sawitsch und Fuss wurden neue Mittel gezogen, was um so nothwendiger war, als ersterer etwas willkürlich in der Regel die Sätze, bei welchen die Bilder nicht ganz ruhig waren, ausschloss, während die andern Beobachter mit Recht gar keine Sätze verwerfen zu müssen glaubten, sondern alle nach ihren Gewichten stimmen liessen. Ich habe folgende relative Gewichte angewandt:

Gewicht	Sawitsch	Fuss
8	ruhig	ruhig
4	fast ruhig, ziemlich ruhig, wenig unruhig	fast ruhig, etwas unruhig
2	etwas unruhig, schwach unruhig	unruhig
1	unruhig	stark unruhig
0,5	sehr unruhig	

War in einem Satze die Characteristik des einen Objectes z. B. bei Sawitsch *ruhig* und die des andern *etwas unruhig*, so war das gemeinschaftliche Gewicht $\frac{2 \cdot 8 \cdot 2}{8+2} = 3,2$. Die hier gegebenen relativen Gewichte sind die, mit denen auch Fuss seine Mittel gezogen hatte.

Addirt man nun in den verschiedenen Reihen die auf einander folgenden partiellen Höhenunterschiede der zwei von jedem Beobachtungspuncte nach beiden Seiten gesehenen correspondirenden Objecte zusammen: so kommt man, mit Zuziehung der unmittelbar gemessenen Höhe des Signals $P^1 = 146,0$ Zoll über dem Asowschen Meere, zu den absoluten Höhen aller in jeder Reihe beobachteten Puncte, wie sie aus der Messung von mittleren Stationen aus folgen. Diese Arbeit war leicht für die Reihen (F) und (S) ausgeführt, da in denselben kein Glied fehlte, und die Gleichzeitigkeit streng eingehalten war.

Bei der Bearbeitung der 3 Reihen von Sabler stiess ich auf die Schwierigkeit, dass an einigen Puncten die Beobachtungen nicht vollständig waren, indem ein oder das andere Object nicht beobachtet worden. Ich erkannte dabei, dass die beiden von Sabler selbst gegebenen Reihen, die eine aus den Basispuncten, die andere durch die Hauptsignale, nicht vollkommen unabhängig von einander waren, indem mitunter, wenn auch selten, eine Beobachtung der einen Reihe in der andern Reihe wieder benutzt war. In einem solchen Falle lässt sich bekanntlich für das Mittel aus 2 Resultaten nicht mehr der wahrsch. Fehler aus den w. F. der einzelnen einfach ableiten.

§ 23.

Eine genaue Durchsicht des ganzen Materials der Zenithdistanzen zeigte mir folgende noch zu berücksichtigende Umstände an:

1. Der Höhenunterschied $P^2 - P^1$ wurde am 3. Nov. 1836 durch gleichzeitige reciproke Beobachtungen bestimmt. Aus ihnen ergibt sich, mit Berücksichtigung der Biegungscoefficienten der 3 Instrumente, dieser Höhenunterschied zu 1169,6 Zoll mit dem w. F. 0,39 Zoll, oder für die Höhe von P^2 über dem Asowschen Meere $1169,6 + 146,0 = 1315,6$ Zoll. Diese Zahl dient als gemeinschaftlicher Ausgangspunct für die Reihen (F) (S) und die Sablersche Reihe durch die Basispuncte (Σ').
2. Die Reihe (F) geht unabhängig und von der Mitte aus nur bis P^{123} . Um sie ganz auf Fuss Beobachtungen bis P^{124} zu führen, muss noch $P^{124} - P^{123}$ aus den 4 Sätzen, die Fuss in P^{124} einseitig beobachtet hat, berechnet werden. Diese geben $P^{124} - P^{123}$ gleich $-294,7$, $-313,2$, $-309,2$ und $-309,3$ Zoll, mit den relativen Gewichten 8, 4, 4, 8 und folglich im Mittel $-305,1$ Zoll, wofür aus der Uebereinstimmung der 4 Bestimmungen der w. F. 2,91 Zoll ist.
3. Sabler's Beobachtungen sollten 3 Reihen geben, nemlich
 - die Reihe (Σ') durch die Basispuncte,
 - die Reihe (Σ'') " " Beobachtungen der ungeraden P , von den geraden als Standpuncten,
 - die Reihe (Σ''') " " " " geraden P , " " ungeraden " "

Es war nunmehr dafür zu sorgen, dass in keiner dieser 3 Reihen eine gemeinschaftliche Beobachtung zur Anwendung kam, damit sie als von einander völlig unabhängig angesehen werden können. Ich erlangte dies durch das einzig mögliche Mittel, dass ich nemlich in den wenigen Fällen, wo von einem Puncte aus die Beobachtungen desselben Objectes für (Σ') und (Σ'') oder für (Σ') und (Σ''') benutzt werden mussten, von den eigentlich zu (Σ') gehörigen Sätzen einen oder 2 für die andere Reihe abtheilte, so dass er für diese und nicht für (Σ') angewandt wurde. Hierbei war es Regel, den besseren Satz für (Σ'), die Hauptreihe, zu nehmen. Ganz zu Anfang der Operation war die Beobachtung von

Kagalnik Kirche von 3 Punkten aus, Seite 272, behülflich die Reihen (Σ'') und (Σ''') von einander und von Σ' unabhängig zu machen. Auf gleiche Weise half die Beobachtung der 3 geeigneten Visirpunkte an der Kirche der Stanitza bei P^{11} , die ich für die Reihe (Σ') wählte, mir die nöthigen unabhängigen Verbindungen für (Σ'') und (Σ'''), für den Endpunkt bei P^{11} am Schluss der Arbeit 1836 und bei der Wiederaufnahme 1837, zu gewinnen. Siehe Seite 272 — 274.

4. Da die unregelmässigen Verbindungen immer nur Ausnahmen waren, so ward, wie für die Reihe (Σ'), so auch für die beiden andern (Σ'') und (Σ''') das Princip der Gleichzeitigkeit so vollständig als möglich aufrecht erhalten, d. h. auch für diese Reihen wurden ausschliesslich die Sätze benutzt, in denen von einem P^n aus sowohl P^{n-1} als P^{n+1} beobachtet worden.
5. Die Reihe (Σ') geht nicht über den 1836 angesetzten Endpunkt, sondern über die drei vortrefflichen Visirpunkte an der Kirche bei der Stanitza, 1836 in b^{10} und 1837 in b^{11} beobachtet. Diese 3 Punkte K^1 , K^2 und K Knopf wurden beide Male zu einem Mittel (K) vereinigt. Im ganzen fernern Verlaufe dieser Reihe kommen nur zwei Fälle vor, wo die Messung aus der Mitte aufgegeben werden musste. In p^{68} war nemlich nur der nachfolgende Basispunkt β^{68} sichtbar gewesen, β^{67} der vorhergehende nicht. Um die Lücke auszufüllen, wurde in p^{67} , ausser $\beta^{67} - \beta^{66}$, auch noch $P^{68} - \beta^{67}$ aus dem dritten Satze genommen, und so $P^{68} - \beta^{67}$ erlangt. Zur Fortführung musste aber in p^{68} der einseitige Werth $\beta^{68} - P^{68}$ benutzt werden. Als darauf am 11. Juli die Operation auf 4 Wochen unterbrochen wurde, beobachtete Sabler in p^{71} an diesem Tage β^{70} , aber das entgegengesetzte β^{71} erst von demselben Standpunkte aus am 11. August. Hier ward also $\beta^{71} - \beta^{70}$ aus den beiden einseitigen Werthen $P^{71} - \beta^{70}$ und $\beta^{71} - P^{71}$ durch Summirung gefunden. Die Reihe geht sonst ganz regelmässig bis zur Bestimmung von $\beta^{122} - \beta^{121}$ aus p^{122} fort. Das letzte Intervall $P^{124} - \beta^{122}$ folgt aus einer gedoppelten Bestimmung. Die erste beruht auf p^{125} , 26. Oct. Satz II und III; die andere auf Belved. — β^{122} in Satz I des 26. Octobers, verbunden mit 2 Sätzen in p^{124} , die den Unterschied $P^{124} - \text{Belved.}$ einseitig geben.
6. Die Reihe (Σ''), an den graden Stationen beobachtet, hätte eigentlich aus 62 Gliedern bestehen müssen. Sie hat aber jetzt 66 Glieder, von denen 59 auf Messung aus der Mitte beruhen, und 7 einseitige Höhenbestimmungen sind. Diese letzten sind

$B^{11} - P^{11}$	beobachtet in	p^{11}
$P^{17} - P^{16}$	“	“ p^{16}
$P^{70} - P^{69}$	“	“ p^{70}
$\beta^{70} - P^{70}$	“	“ p^{70} , Satz III abgetheilt.
$P^{71} - \beta^{70}$	“	“ p^{71} , Satz II “
$P^{105} - \beta^{104}$	“	“ p^{105} , Satz I “
$P^{124} - P^{123}$	“	“ p^{124} .

Ausserdem sind in dieser Reihe noch zur Ausfüllung benutzt, und daher von der Reihe (Σ'') abgetrennt:

in p^{12} der Satz I, um $P^{13} - A^{11}$ zu erhalten,

in p^{104} der Satz I, um $\beta^{104} - P^{103}$ zu erhalten.

Beide gehören zu den Messungen aus der Mitte.

7. Die Reihe (Σ'''), an den ungraden Stationen beobachtet, hat statt 62 Glieder deren 68 erhalten. Sie beginnt mit der zwiefachen Bestimmung der Spitze des Kreuzes auf der Kirche in Kagalnik über P^1 , ein Mal von a^1 , das zweite Mal von b^1 aus, zu einem Werthe vereinigt. Im ganzen sind hier 7 Glieder einseitiger Höhenbestimmungen, nemlich

P^2	— Kagaln. beobachtet in	p^2	
$P^{17} - P^{16}$	“	“	p^{17}
$B^{17} - P^{17}$	“	“	p^{17} , Satz III abgetheilt.
$P^{18} - B^{17}$	“	“	p^{18} , Satz II “
$P^{39} - P^{38}$	“	“	p^{39}
$\beta^{39} - P^{39}$	“	“	p^{39} , Satz II abgetheilt.
$P^{40} - \beta^{39}$	“	“	p^{40} , Satz II “

Die übrigen 64 Glieder beruhen auf gleichzeitiger Messung von der Mitte aus. Der Schluss, d. h. der Höhenunterschied $P^{124} - P^{122}$, ist aus p^{125} , 28. Oct. Satz I und II gefunden.

8. In welcher Art die Höhe des ersten Signals P^1 über dem mittleren Stande des Asowschen Meeres = 146,0 Zoll gefunden ist, wird Seite 7 berichtet. Für die Höhe des Signals P^{124} über dem damaligen mittleren Stande des Caspischen Meeres, sind 3 Bestimmungen vorhanden, deren gemeinschaftliche Grundlage die Beobachtung des Wasserstandes an einem Zeiger während 6 Tagen abgibt. Siehe Seite 96. Der mittlere Meeresstand war bei 47,9 Zoll der Theilung, deren Nullpunct oberhalb des Wassers war. Die 3 Bestimmungen sind folgende:

26. Oct. Nachmittag. P^{124} — Wasserfläche	= 279,1 Zoll nach Fuss, S. 171.
Reduction auf den mittl. Stand des Wassers	<u>+ 2,9 “</u>
	282,0 Zoll.
27. Oct. Nachmittag. P^{124} — Wasserfläche	= 281,8 “ nach Sabler, S. 317.
Reduction	<u>+ 0,1 “</u>
	281,9 Zoll.
28. Oct. Nachmittag	= 281,6 “ nach Sawitsch, S. 136 und 342
Im Mittel ist P^{124} — mittl. Wasserstand	<u>281,8 Zoll.</u>

9. In allen unsern Reihen wird die Höhe = H eines beliebigen Punctes über dem Anfangspuncte der Operation, aus der Summirung aller bis zu ihm bestimmten partiellen Höhenunterschiede = u , der an den einzelnen Standörtern beobachteten correspondirenden Marken abgeleitet. Die Genauigkeit einer Höhe H hängt demnach von der Sicherheit ab, mit welcher die einzelnen u , die zu seinem Werthe führten, bestimmt worden sind, und es ist klar dass, je weiter ein Punct vom Anfangspuncte abliegt, die Genauigkeit seines H desto geringer, sein w. F. desto grösser werden muss. Um diesen w. F. beurtheilen zu können, ist es unerlässlich, in allen Reihen die w. F. der einzelnen u zu ermitteln. Dies kann entweder durch Vergleichung der in den verschiedenen Reihen vorkommenden identischen u geschehen, oder dadurch dass man für jedes einzelne u den w. F. aus den seiner Bestimmung zum Grunde liegenden Bedingungen ableitet. Diese vollständig durchgeführte Untersuchung lehrt nicht nur

den Werth der Arbeit in allen Einzelheiten kennen, sondern sie zeigt uns die einzelnen schwächeren Theile an, und kann Veranlassung geben, wenn erforderlich, nachzuforschen ob nicht irgendwo ein Irrthum vorgefallen sei. Ich erwähne hier schon, dass ich *nirgends* ein Beobachtungsversehen habe auffinden können.

§ 24.

Ich gebe zunächst in Tafel I eine Zusammenstellung der von Sabler beobachteten Reihe (Σ'), welche die Höhen der Basispunkte enthält. Neben jeder Höhe steht der w. F. des Höhenunterschiedes u zwischen diesem und dem nächsten Punkte. So ist 2,3 Zoll der w. F. in der Bestimmung des Höhenunterschiedes $u = B^5 - P^2 = 1159,4$ Zoll. Wie die w. F. der u in dieser und den andern Reihen gefunden sind, werde ich weiter unten auseinandersetzen.

Die Höhen der Reihe Σ' lassen sich nicht unmittelbar mit den weiter unten folgenden der andern Reihen vergleichen, weil in diesen nicht die Basispunkte, sondern die Hauptpunkte P bestimmt sind. Indess lässt sich diese Vergleichung auf einfache Weise herbeiführen, wenn an die ursprünglichen Zahlen in (Σ') die aus den reciproken Beobachtungen abgeleiteten Höhenunterschiede der benachbarten Haupt- und Basispunkte angebracht werden, die Seite 222 bis 248 gegeben sind. Wir haben z. B.

in Tafel I aus der Reihe Σ' :	$B^{14} = 2150,8$	$B^{15} = 3522,3$
nach S. 227 aus den recipr. Beob.	$P^{15} - B^{14} = +1076,0$	$P^{15} - B^{15} = -296,0$
Hieraus	$P^{15} = 3226,8$	$P^{15} = 3226,3$ Mittel 3226,5 Zoll.

Die so nach einander gefundenen Höhen der P können an Genauigkeit den ursprünglichen Höhen der Basispunkte in (Σ') kaum nachstehen, und bewirken die gewünschte Vergleichbarkeit der Reihe (Σ') mit den andern 4 Reihen, ohne dass die angewandte Ableitung auf die Höhe des Endsignals P^{124} irgend einwirkt, da dieses in (Σ') direct vorhanden ist.

In Tafel II werden darauf die Höhen der Hauptpunkte P nach allen 5 Reihen zusammengestellt. Von den schmalen senkrechten Spalten dieser Tafel enthält die erste durch $u'' - u'$ die Vergleichung des Höhenunterschiedes zweier benachbarter Punkte $= u''$ nach Sawitsch und $= u'$ nach Fuss. So ist $P^5 - P^2$ gleich $+519,8 = u''$ nach (S), gleich $524,4 = u'$ nach (F), folglich $u'' - u' = -4,6$. Diese $u'' - u'$ führen zur Kenntniss der w. F. der in beiden Reihen gebrauchten u , und geben diesen $= 2,40$ Zoll. In den 3 letzten Spalten sind die w. F. der einzelnen u für jede der Reihen (Σ'), (Σ'') und (Σ''') angegeben, in jedem einzelnen Falle aus den Elementen der Bestimmung besonders abgeleitet. Die für (Σ') gegebenen w. F. sind dieselben, wie in Tafel I, und hier nur der Vollständigkeit wegen wiederholt. In den andern beiden Reihen ist z. B. für den Unterschied $P^5 - P^1$ der Werth $u = 1691,6$ aus (Σ'') mit dem w. F. 1,8 Zoll behaftet, und in (Σ''') für $P^4 - P^2$ hat der Werth $u = -155,8$ den w. F. 5,0 Zoll.

Am Schluss der Tafel habe ich noch die w. F. für die 5 Endwerthe K der Tiefe des Caspischen Meeres unter dem Asowschen gegeben, wie sie aus dem Complexe aller einzeln angegebenen w. F. der fünferlei u abgeleitet werden.

TAFEL I. Höhen der Basispunkte über dem Asowschen Meere, nach Sabler's Messungen, Reihe (Σ').

(Alle Höhen beziehen sich auf die Mitten der Visirmarken.)

Punct	Höhe in engl. Zollen	w. F. des Unter- schiedes	Punct	Höhe in engl. Zollen	w. F. des Unter- schiedes	Punct	Höhe in engl. Zollen	w. F. des Unter- schiedes	Punct	Höhe in engl. Zollen	w. F. des Unter- schiedes
P^1	146,0		β^{32}	2039,6	1,5	β^{64}	12096,3	2,1	β^{95}	3892,7	1,7
P^2	1315,6	2,3	β^{33}	2183,1	2,0	β^{65}	9374,2	1,5	β^{96}	3693,0	1,5
B^3	156,2	3,2	β^{34}	2432,3	2,3	β^{66}	11958,6	2,2	β^{97}	3946,7	1,3
B^4	1105,1	1,9	β^{35}	3464,7	2,2	β^{67}	10314,0	5,0	α^{98}	3554,0	2,8
B^5	791,7	2,1	β^{36}	4417,2	1,9	P^{68}	13847,3	1,5	β^{99}	3649,6	1,0
B^6	497,2	2,4	β^{37}	4487,7	2,6	β^{68}	13647,4	2,9	α^{100}	3536,0	1,2
B^7	866,9	6,1	α^{58}	5913,4	2,4	β^{69}	14552,2	1,8	α^{101}	3174,8	2,9
B^8	971,1	2,6	β^{39}	7005,4	1,6	β^{70}	13959,1	3,2	β^{102}	2732,2	1,7
B^9	833,1	3,0	α^{40}	6644,9	2,4	β^{71}	9784,0	1,5	α^{103}	2745,9	1,2
B^{10}	2105,9	1,4	β^{41}	7266,6	1,3	α^{72}	10760,4	2,8	β^{104}	2322,7	1,7
(K)	1750,8	0,6	β^{42}	10276,8	1,3	β^{73}	12042,8	3,2	β^{105}	1920,8	1,1
B^{11}	1925,9	1,0	β^{43}	14063,5	1,3	α^{74}	12877,8	3,1	β^{106}	1831,3	1,2
A^{12}	2754,0	1,4	β^{44}	13730,6	2,7	β^{75}	12505,3	2,5	α^{107}	1386,0	0,9
B^{13}	3165,1	1,8	α^{45}	17490,2	1,9	β^{76}	11937,4	2,6	α^{108}	999,9	1,6
B^{14}	2150,8	1,4	β^{46}	20428,1	1,0	α^{77}	10824,7	1,1	β^{109}	630,8	1,5
B^{15}	3522,3	1,1	β^{47}	19174,1	1,2	β^{78}	10293,7	1,8	β^{110}	168,8	1,4
B^{16}	3684,7	1,5	β^{48}	19644,1	2,2	β^{79}	9511,4	1,3	β^{111}	-34,9	3,0
B^{17}	3847,2	4,0	α^{49}	13689,4	1,4	β^{80}	8747,1	1,3	β^{112}	-188,2	1,6
B^{18}	3933,5	1,9	α^{50}	10645,0	0,7	β^{81}	7817,5	1,6	β^{113}	-251,4	1,6
B^{19}	4074,7	1,7	α^{51}	12274,3	1,7	β^{82}	7226,0	1,4	β^{114}	-346,6	2,7
B^{20}	4254,9	1,5	β^{52}	12183,7	1,3	β^{83}	6963,0	1,6	α^{115}	-385,5	3,5
β^{21}	4196,9	1,4	α^{53}	16860,8	2,2	β^{84}	6724,6	2,0	β^{116}	-459,8	2,0
β^{22}	3864,2	1,2	β^{54}	13578,4	1,6	β^{85}	6414,1	1,7	β^{117}	-531,3	1,2
β^{23}	3110,7	2,4	β^{55}	11550,0	1,5	β^{86}	6058,0	2,1	α^{118}	-595,2	1,5
β^{24}	2701,2	1,5	α^{56}	12462,9	1,5	α^{87}	5477,7	1,5	β^{119}	-614,3	1,8
β^{25}	3281,4	1,1	β^{57}	11944,6	1,8	β^{88}	5352,0	1,6	β^{120}	-659,1	2,1
β^{26}	4241,9	2,1	α^{58}	14802,9	2,9	β^{89}	5186,3	1,9	β^{121}	-559,6	1,6
β^{27}	3789,8	2,1	β^{59}	20343,7	1,6	β^{90}	5151,5	0,8	β^{122}	-826,6	2,9
β^{28}	2809,0	1,4	β^{60}	18097,2	1,7	β^{91}	4810,6	1,4	P^{124}	-728,1	
β^{29}	1844,4	1,0	β^{61}	13921,8	1,1	β^{92}	4656,1	1,8			
β^{30}	2431,4	1,3	β^{62}	15777,3	2,3	β^{93}	4448,3	2,3			
β^{31}	2139,5	1,1	β^{63}	15846,3	2,3	β^{94}	4083,4	1,5			

§ 25.

TAFEL II. Zusammenstellung der in englischen Zollen ausgedrückten Höhen über dem Asowschen Meere für alle Hauptpunkte P^1 bis P^{31} zwischen beiden Meeren, nach den 5 unabhängigen Reihen der 3 Beobachter.

(Alle Höhen beziehen sich auf die Mitten der Visirmarken.)

	F	S	Σ'	Σ''	Σ'''	Aus (F) und (S); $u'' - u'$	Wahrsch. Fehler der u		
							für Σ'	für Σ''	für Σ'''
Asow. Meer.	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0				
P^1	146,0	146,0	146,0	146,0	146,0		1,8	1,3	
P^2	1315,6	1315,6	1315,6		1314,1	-4,6	2,3		5,0
P^3	1840,1	1835,4	1836,1	1837,6		+4,0	3,2	6,0	
P^4	1261,2	1260,5	1251,6		1258,3	-3,4	1,9		4,3
P^5	1685,9	1681,8	1677,3	1670,2		+0,9	2,1	4,3	
P^6	857,8	854,6	855,3		854,7	-2,9	2,4		5,7
P^7	1670,5	1664,4	1672,9	1658,2		-4,7	6,1	16,1	
P^8	922,6	911,8	923,5		915,6	+6,9	2,6		6,4
P^9	1160,0	1156,1	1159,1	1149,9		-6,1	3,0	5,2	
P^{10}	3241,8	3231,8	3230,3		3223,8	+0,3	1,4		1,7
Endpunkt 1836	1218,3	1208,6	1206,9	1195,1	1198,9	-2,2	0,6	3,9	1,0
P^{12}	2641,0	2629,1	2628,7		2619,6	+1,8	1,0		5,9
P^{13}	3284,7	3274,5	3270,1	3258,3		+8,3	1,4	8,7	
P^{14}	3239,9	3238,0	3225,1		3212,9	-7,5	1,8		3,4
P^{15}	3248,8	3239,5	3226,5			-0,2	1,4		
P^{15}	4080,9	4071,4	4058,5	4041,9	4049,6	-5,0	1,1	2,3	2,5
P^{17}	3916,6	3902,1	3887,7	3868,9	3877,6	+8,9	1,5	5,4	8,3
P^{18}	4049,2	4043,6	4019,1		401,8	-0,4	4,0		4,7
P^{19}	4196,7	4190,7	4154,5	4136,3		+2,6	1,9	3,6	
P^{20}	4227,8	4224,4	4177,9		4181,4	+1,8	1,7		5,1
P^{21}	4621,2	4619,6	4564,4	4548,2		-4,7	1,5	3,0	
P^{22}	4316,5	4310,2	4258,9		4280,4	-4,1	1,4		5,5
P^{23}	3830,9	3820,5	3772,1	3762,3		+7,3	1,2	5,2	
P^{24}	2894,6	2891,5	2837,7		2849,8	-3,1	2,4		3,6
P^{25}	3417,4	3411,2	3354,9	3334,3		-1,5	1,5	3,4	
P^{26}	3843,6	3835,9	3782,1		3790,2	+2,3	1,1		4,9
P^{27}	4976,1	4970,7	4913,1	4903,5		+5,2	2,1	5,5	
P^{28}	3497,9	3497,7	3439,3		3442,0	-6,9	2,1		3,3
P^{29}	2957,0	2949,9	2902,1	2893,7		+0,5	1,4	3,3	
P^{30}	2602,8	2596,2	2543,1		2537,6	+3,6	1,0		2,7
P^{31}	2356,9	2353,9	2299,2	2297,1		+3,7	1,3	3,1	

TAFEL II. Höhen der Hauptpunkte nach den 5 Reihen; Fortsetzung.

	F	S	Σ'	Σ''	Σ'''	Aus (F) und (S) $u'' - u'$	Wahrsch. Fehler der u		
							für Σ'	für Σ''	für Σ'''
P^{52}	2332,9	2333,6	2277,5		2276,2	+ 1,8	1,1		3,5
P^{55}	2396,9	2399,4	2348,3	2343,0		+ 0,3	1,5	4,1	
P^{54}	2503,3	2506,1	2462,2		2455,0	+ 0,2	2,0		4,7
P^{55}	2862,6	2865,6	2822,1	2811,8		+ 2,3	2,3	5,4	
P^{56}	5390,7	5396,0	5348,3		5328,8	- 5,4	2,2		8,2
P^{57}	4950,8	4950,7	4918,3	4913,4		- 4,7	1,9	5,4	
P^{58}	5716,8	5712,0	5682,1		5661,8	+ 9,1	2,6		6,0
P^{59}	7032,4	7036,7	7009,1	7008,6	6990,9	- 1,9	2,4	3,5	1,8
P^{40}	6981,1	6983,5	6956,7		6938,8	+ 3,2	1,6		4,6
P^{41}	6891,1	6896,7	6869,9	6866,8		+ 5,2	2,4	3,6	
P^{42}	9990,3	10001,1	9972,6		9955,8	- 1,0	1,3		3,3
P^{43}	13551,9	13561,7	13532,9	13540,5		+ 5,1	1,3	5,0	
P^{44}	14789,7	14804,6	14767,9		14751,4	0,0	1,3		6,3
P^{45}	15446,3	15461,2	15423,4	15432,5		- 4,5	2,7	7,9	
P^{46}	18784,1	18794,5	18758,1		18741,1	- 8,0	1,9		3,7
P^{47}	21465,2	21467,6	21438,3	21455,7		+ 1,6	1,0	2,7	
P^{48}	22281,0	22285,0	22255,5		22238,0	- 5,3	1,2		3,8
P^{49}	18350,4	18349,1	18322,7	18338,0		+ 4,5	2,2	3,7	
P^{50}	12238,3	12241,5	12208,2		12182,1	+ 3,6	1,4		2,9
P^{51}	12929,5	12936,3	12899,9	12918,1		+ 2,3	0,7	4,2	
P^{52}	13302,4	13311,5	13273,0		13250,9	- 4,0	1,7		3,3
P^{53}	16853,2	16858,3	16825,9	16840,0		+ 2,0	1,3	5,7	
P^{54}	18361,7	18368,8	18336,1		18311,2	+ 8,2	2,2		4,0
P^{55}	12093,1	12108,4	12069,8	12073,1		+11,4	1,6	4,8	
P^{56}	12464,8	12491,5	12447,9		12421,9	+ 9,0	1,5		4,3
P^{57}	11669,0	11704,7	11655,3	11664,4		- 0,8	1,5	7,6	
P^{58}	13504,4	13539,3	13492,9		13477,1	+ 0,3	1,8		5,2
P^{59}	21959,4	21994,6	21951,1	21956,6		+ 2,5	2,9	5,5	
P^{60}	21683,0	21720,7	21675,9		21662,8	+ 0,7	1,6		4,4
P^{61}	20404,3	20442,7	20398,3	20410,0		+ 4,2	1,7	2,7	
P^{62}	13355,6	13398,2	13353,2		13341,3	- 0,3	1,1		4,3
P^{53}	16244,6	16286,9	16238,3	16254,7		- 2,0	2,3	5,2	
P^{64}	16127,1	16167,4	16117,2		16105,9	- 7,6	2,3		5,1
P^{65}	11811,2	11843,9	11794,3	11815,0		+ 2,3	2,1	4,1	
P^{66}	11675,0	11710,0	11663,7		11654,3	- 0,8	1,5		4,9

TAFEL II. Höhen der Hauptpunkte nach den 5 Reihen; Fortsetzung.

	F	S	Σ'	Σ''	Σ'''	Aus (F) und (S); $u''-u'$	Wahrsch. Fehler der u		
							für Σ'	für Σ''	für Σ'''
P^{67}	12414,2	12448,4	12403,6	12427,2		— 4,1	2,2	3,3	
P^{68}	13858,3	13888,4	13847,3		13839,9		5,2		3,3
P^{69}	13990,5	14018,9	13982,2	14002,6		— 2,9	2,9	4,1	
P^{70}	15438,5	15464,0	15423,3	15450,1	15412,3	— 5,2	1,8	3,4	6,2
P^{71}	10254,1	10274,4	10236,3	10259,5		+ 0,8	3,2	5,1	
P^{72}	11364,1	11385,2	11345,5		11328,5	—14,9	1,5		7,3
P^{73}	12294,5	12300,5	12273,3	12294,2		+ 7,6	2,8	9,2	
P^{74}	13339,1	13352,6	13319,3		13297,4	—16,9	3,2		5,3
P^{75}	12865,9	12862,5	12840,2	12868,4		— 5,1	3,1	11,6	
P^{76}	12974,6	12966,1	12964,1		12942,7	+ 7,2	2,5		9,2
P^{77}	11141,3	11140,0	11152,8	11183,0		— 6,5	2,6	3,6	
P^{78}	10746,4	10738,6	10760,3		10717,5	— 3,6	1,1		4,4
P^{79}	10106,6	10095,3	10118,5	10150,5		— 3,6	1,8	5,5	
P^{80}	9196,2	9181,3	9207,5		9163,5	— 1,4	1,3		4,4
P^{81}	8530,1	8513,8	8539,1	8565,6		— 6,4	1,3	4,9	
P^{82}	7661,2	7638,5	7666,1		7625,2	+ 3,5	1,6		3,4
P^{83}	7234,5	7215,3	7241,3	7282,8		— 6,6	1,4	7,9	
P^{84}	6932,3	6906,5	6939,7		6900,1	+ 3,5	1,6		8,4
P^{85}	6550,9	6528,6	6559,5	6614,2		+11,0	2,0	4,8	
P^{86}	6281,6	6270,3	6297,3		6260,7	0,0	1,7		7,4
P^{87}	5945,2	5933,9	5965,9	6015,4		— 3,3	2,1	4,8	
P^{88}	5446,7	5402,1	5443,9		5403,2	— 1,9	1,5		4,5
P^{89}	5647,2	5630,7	5679,1	5727,8		+ 9,3	1,6	5,5	
P^{90}	5079,4	5072,2	5107,5		5054,0	+ 5,2	1,9		1,8
P^{91}	5209,1	5207,1	5239,1	5283,8		+ 2,1	0,8	3,5	
P^{92}	5248,9	5249,0	5280,9		5229,5	+ 5,8	1,4		5,2
P^{93}	4826,8	4832,7	4855,2	4904,2		+ 4,1	1,8	6,2	
P^{94}	4541,2	4551,2	4578,3		4533,3	+ 2,1	2,3		3,7
P^{95}	4162,1	4174,2	4202,2	4245,9		— 0,3	1,5	4,0	
P^{96}	3781,3	3793,1	3827,5		3781,6	+ 4,1	1,7		3,9
P^{97}	3842,5	3858,4	3894,1	3934,0		+ 3,6	1,5	2,8	
P^{98}	4005,4	4024,9	4060,5		4022,8	— 0,4	1,3		6,0
P^{99}	3965,8	3984,9	4018,9	4063,2		— 3,2	2,8	3,4	
P^{100}	3548,2	3564,1	3597,5		3553,3	+ 1,0	1,0		2,7

TAFEL II. Höhen der Hauptpunkte nach den 5 Reihen; Schluss.

	F	S	Σ'	Σ''	Σ'''	Aus (F) und (S); u''-u'	Wahrsch. Fehler der u		
							für Σ'	für Σ''	für Σ'''
P ¹⁰¹	3513,4	3530,3	3562,5	3606,6		0,0	1,2	6,7	
P ¹⁰²	3439,3	3456,2	3487,3		3446,8	- 1,3	2,9		9,1
P ¹⁰³	2831,5	2847,1	2868,5	2907,5		+ 0,5	1,7	5,3	
P ¹⁰⁴	2734,2	2750,3	2769,0		2731,8	- 2,7	1,2		3,2
P ¹⁰⁵	2253,3	2266,7	2290,6	2327,3		+ 3,5	1,7	2,6	
P ¹⁰⁶	2146,6	2163,5	2185,5		2147,8	+ 1,0	1,1		2,8
P ¹⁰⁷	1609,0	1626,9	1649,7	1683,2		+ 3,2	1,2	2,8	
P ¹⁰⁸	1060,1	1081,2	1102,1		1067,9	- 1,6	0,9		3,0
P ¹⁰⁹	1059,2	1078,7	1105,7	1133,5		- 1,5	1,6	3,6	
P ¹¹⁰	472,6	490,6	519,9		481,9	- 0,1	1,5		4,2
P ¹¹¹	181,9	199,8	228,7	259,2		+ 2,1	1,4	7,5	
P ¹¹²	- 12,1	7,9	33,1		- 8,5	- 4,8	3,0		7,0
P ¹¹³	- 172,6	- 157,4	- 126,5	- 89,0		+ 0,2	1,6	5,1	
P ¹¹⁴	- 263,3	- 247,9	- 216,0		- 250,1	+ 7,7	1,6		6,2
P ¹¹⁵	- 253,0	- 229,9	- 203,2	- 168,8		- 0,7	2,7	11,5	
P ¹¹⁶	- 330,2	- 307,8	- 278,9		- 321,7	- 5,7	3,5		5,6
P ¹¹⁷	- 522,4	- 505,7	- 476,5	- 435,6		- 7,2	2,0	4,5	
P ¹¹⁸	- 438,4	- 428,9	- 396,3		- 436,8	+ 0,5	1,2		5,0
P ¹¹⁹	- 469,5	- 459,5	- 428,0	- 386,7		+ 3,0	1,5	5,8	
P ¹²⁰	- 590,4	- 577,4	- 549,7		- 590,5	- 1,6	1,8		4,4
P ¹²¹	- 464,2	- 452,8	- 420,1	- 379,2		- 14,8	2,1	4,8	
P ¹²²	- 461,3	- 464,7	- 423,5		- 461,4	+ 3,8	1,6		4,5
P ¹²³	- 465,8	- 465,4	- 423,3	- 374,2			2,9	3,5	
P ¹²⁴	- 770,9	- 770,4	- 728,1	- 678,8	- 770,3				
K	- 1052,7 (87,72)	- 1052,2 (87,68)	- 1009,9 (84,16)	- 960,6 (80,05)	- 1052,1 (87,68)	engl. Zoll " Fuss			
Wahrsch. Fehler der K	26,51 (2,21)	26,51 (2,21)	22,67 (1,89)	44,32 (3,69)	40,16 (3,35)	" Zoll " Fuss			

§ 26.

Ich habe noch den Weg anzugeben, wie ich zur Angabe über die Genauigkeit der in den einzelnen der 5 Reihen gegebenen Zahlen, d. h. zur Bestimmung der w. F. derselben gelangt bin. Die beiden Reihen (F) und (S) beruhen auf Beobachtungen an denselben Standörtern so angestellt, dass Sawitsch in der Regel auf jedem derselben die Zenithdistanzen, der nach beiden Seiten hin in nahezu gleicher Entfernung liegenden

Hauptsignale, um genau einen Tag später als Fuss beobachtete. Beide Beobachter arbeiteten mit gleichgebauten und gleich genau getheilten Instrumenten, und gleicher Sorgfalt. Die Zahlen dieser Reihen eignen sich also vor allen zu einer Vergleichung, und diese ist von mir durch die Angabe der $u'' - u'$ der Tafel II ausgeführt.

Da alle Werthe $u'' - u'$ gleich Null hätten sein müssen, wenn alle Messungen absolut genau gewesen wären, so dienen die gefundenen ($u'' - u'$) unmittelbar zur Auffindung der w. F. von $u'' - u'$. Es ist nemlich die Summe der Quadrate der 120 verschiedenen $u'' - u'$ gleich 3053. Dies gibt den w. F. eines $u'' - u' = 3,40$ Zoll, und unter Voraussetzung gleicher Sicherheit in beiden Reihen (F) und (S), für ein beliebiges u jeder Reihe den w. F. = 2,40 Zoll.

Vergleichen wir die 120 gefundenen Fehler $u'' - u'$, ihrer Grösse nach, mit der Theorie, so liegen:

		nach der Theorie,	nach der Erfahrung
zwischen 0 und	3,40 Zoll	60	60
3,40 "	6,80 "	39	39
6,80 "	10,20 "	16	16
10,20 "	∞ "	5	5

Hier stellt sich uns eine merkwürdige Uebereinstimmung der Erfahrung mit der Theorie dar. Die 5 Fehler, welche das dreifache des w. F., d. h. 10,20, übersteigen, sind folgende:

für $P^{56} - P^{55}$ ist $u'' - u' = +11,4$ Zoll,	
" $P^{73} - P^{72}$	- 14,9 "
" $P^{75} - P^{74}$	- 16,9 "
" $P^{86} - P^{85}$	+ 11,0 "
" $P^{122} - P^{121}$	- 14,8 "

Obgleich das Vorkommen dieser 5 stärkeren Fehler nichts auffallendes darbietet, so habe ich dennoch diese Fälle einzeln untersucht, und mich überzeugt, dass nirgends eine Unzuverlässigkeit in den Beobachtungen oder ein Rechnungsfehler vorkommt. Drei derselben fallen auf den Augustmonat, der seines in der Regel grellen Sonnenscheins wegen im allgemeinen der für die Beobachtungen ungünstigste war. Bei dem stärksten Unterschiede für $P^{75} - P^{74}$ waren die Entfernungen nach beiden Seiten sehr ungleich, und Sawitsch erhielt nur 3 sehr unruhige Sätze, deren Gewicht sehr klein ist, Fuss drei bessere.

Für ein beliebiges P^n in einer der beiden Reihen (F) und (S) ist, dem so eben gesagten zufolge, der w. F. der in der Tafel angegebenen Höhe über dem Meere gleich $2,40 \cdot \sqrt{(n-2)}$ Zoll. Hiermit ergibt sich für die Bestimmung von K der w. F. $2,40\sqrt{122} = 26,51$ Zoll. Sawitsch hat, S. 346, seinem Endresultat einen w. F. von 5,2 Fuss = 62,4 Zoll zugeschrieben, also einen 2,4 Mal grösseren als der von mir aus der Uebereinstimmung beider Reihen abgeleitete. Die Ursache des grossen Unterschiedes der beiden Bestimmungen ist vorzugsweise darin zu suchen, dass Sawitsch einen zu grossen Werth der Unsicherheit der Refractionsconstante für jede Bestimmung annimmt, nemlich $A\varrho = 0,032C$, wenn C die in Bogentheilen ausgedrückte Entfernung des Objects vom Standort bezeichnet. Ausserdem aber liegt es in dem Princip

der Messung aus einem mittleren Standorte, dass der Höhenunterschied zweier in nahezu gleicher Entfernung gesehenen Objecte bedeutend genauer wird, als die einzelnen Höhen in Bezug auf den Standort. Der von mir gegebene w. F. berücksichtigt diesen Umstand von selbst, während er bei Sawitsch's Bestimmung vernachlässigt ist.

Das gegenseitige Verhalten der beiden Reihen (F) und (S) übersieht man am besten, wenn man aus je 10 benachbarten Höhen jeder Reihe das Mittel nimmt, und hieraus Mittelwerthe ($S-F$) ableitet. So bin ich zu folgenden Zahlen gekommen :

aus P^5 bis P^{12}	für P^8	($S-F$)	Wahrsch. Werth
		— 6,5 Zoll	— 8,0 Zoll
P^{15} « P^{22}	« P^{18}	— 6,8 «	13,4 «
P^{25} « P^{32}	« P^{28}	— 4,9 «	17,2 «
P^{35} « P^{42}	« P^{38}	+ 3,2 «	20,3 «
P^{45} « P^{52}	« P^{48}	+ 7,4 «	22,9 «
P^{55} « P^{62}	« P^{58}	+ 27,9 «	25,3 «
P^{65} « P^{72}	« P^{68}	+ 30,9 «	27,5 «
P^{75} « P^{82}	« P^{78}	— 6,7 «	29,5 «
P^{85} « P^{92}	« P^{88}	— 13,0 «	31,2 «
P^{95} « P^{102}	« P^{98}	+ 14,3 «	33,2 «
P^{105} « P^{112}	« P^{108}	+ 17,6 «	34,8 «
P^{115} « P^{123}	« P^{118}	+ 12,2 «	36,6 «
	« P^{124}	+ 0,2 «	37,7 «

Es sind demnach die beobachteten ($S-F$) in diesen Mitteln 11 Mal kleiner und nur 2 Mal grösser als ihre wahrscheinlichen Werthe. Die beiden Reihen bieten also in ihrem ganzen Verlaufe eine sehr befriedigende Uebereinstimmung dar, und nirgends ist eine ungewöhnliche Häufung der Fehler angedeutet. Der verhältnissmässig starke Sprung in ($S-F$) von P^{68} bis P^{78} fällt der erwähnten Ungunst des Augustmonats zur Last.

§ 27.

In seiner Untersuchung der Strahlenbrechung, Seite 271, hat Sabler den w. F. einer bei *sehr ruhigem* Zustande der Bilder beobachteten Zenithdistanz, die Unsicherheit der Strahlenbrechung mitgerechnet, gegeben, und zwar

$$\begin{aligned} \epsilon &= 2,06 \text{ für einen beobachteten Basispunkt, } \text{Log } \epsilon = 0,3139, \\ \epsilon &= 2,40 \text{ « « « Signalpunkt, } \text{Log } \epsilon = 0,3802. \end{aligned}$$

Wenden wir diese Werthe an, so wird, wenn D die Entfernung des Objects vom Beobachter ist :

der w. F. der Höhe gleich $\epsilon \cdot D \cdot \sin 1''$, für einen Satz bei ruhigem Bilde oder mit dem Gewicht 1.

Die relativen Gewichte der Sätze, nach den verschiedenen Zuständen der Bilder, finden sich ebendasselbst. Mit diesen Hilfsmitteln ist es nun ein leichtes für jeden einseitigen Höhenunterschied, der in der Zu-

sammenstellung Seite 272 u. f. vorkommt, den w. F. zu ermitteln. Wählen wir als Beispiel die Beobachtungen in p^{21} , vom 21. April 1837, S. 279. Von den 4 Objecten sind B^{20} und β^{21} in 3 Sätzen, welche die Bezeichnung I *fast ruhig*, I *fast ruhig* und II *ruhig* haben, beobachtet. Für das Mittel wird hier das Gewicht = $0,5 + 0,5 + 0,9 = 1,90$ gefunden. Mit Anwendung der im Texte gegebenen Log $D. \sin 1''$ haben wir :

$$\text{Log. } d\beta^{21} = (0,3139 + 9,8535 - \text{Log. } \sqrt{1,90}) = 0,0867; d\beta^{21} = 1,07 \text{ Zoll.}$$

$$\text{Log. } dB^{20} = (0,3139 + 9,8500 - \text{Log. } \sqrt{1,90}) = 0,0832; dB^{20} = 1,06 \text{ «}$$

$$\text{Folglich } d(\beta^{21} - B^{20}) = \sqrt{(1,07^2 + 1,06^2)} = 1,50 \text{ Zoll} = f.$$

Auf gleichem Wege findet sich für die in 2 Sätzen vorkommenden P^{22} und P^{20}

$$d(P^{22} - P^{20}) = 5,1 \text{ Zoll} = f.$$

Die erste Zahl 1,50 steht als w. F. in Tafel I, Seite xxxviii, neben B^{20} , die andere 5,1 neben P^{20} in Tafel II, Reihe (Σ'''), Seite xxxix. Auf ähnliche Weise sind alle in diesen beiden Tafeln gegebenen w. F. der drei Reihen (Σ'), (Σ'') und (Σ''') berechnet worden. Diese Bestimmung der w. F. für alle einzelnen Glieder jeder Kette gewährt den grossen Vortheil, dass man eine vollständige Einsicht der Zuverlässigkeit der Reihe in allen ihren Theilen erhält. So bietet namentlich die Reihe (Σ') der Tafel I eine merkwürdige Sicherheit in allen ihren Gliedern dar. Im Mittel genommen finden wir den w. F. eines der 122 Intervalle gleich 1,886 Zoll, und es kommen nur 3 Fälle vor, wo der besondere w. F. das doppelte dieses Mittelwerths übersteigt, für $B^8 - B^7$, $B^{18} - B^{17}$ und $\beta^{68} - \beta^{67}$, bei welchen die w. F. 6,1, 4,0 und 5,0 Zoll befunden werden. Der w. F. einer jeden absoluten Höhe über dem Meere, in dieser Reihe, findet sich nun ganz einfach durch $\sqrt{(\Sigma f^2)}$, indem das Summenzeichen sich auf alle f bis zu diesem Punkte bezieht. Für den Endwerth $K = -1009,9$ Zoll ist von mir $\Sigma f^2 = 513,9$ gefunden, woraus dessen in Tafel II angegebener w. F. = 22,67 Zoll sich ergibt. Wollten wir ihn aus dem Mittelwerth für ein einzelnes Intervall, der sich = 1,886 Zoll findet, ableiten: so käme $1,886 \cdot \sqrt{122} = 20,82$ Zoll heraus. Aber ein auf diese letzte Weise gefundener Fehler wird immer zu klein, weil $(a+x)^2 + (a-x)^2 = 2a^2 + 2x^2 > 2a^2$, und überhaupt, für n Fehler, $(a+x)^2 + (a+y)^2 + \dots + (a-x-y\dots)^2$ immer um die Summe der $n-1$ Quadrate von x, y, \dots grösser als na^2 wird, wie auch die Vorzeichen von x und y sein mögen. Sabler hat, S. 318, aus dieser Ursache auch seinen zu kleinen Fehler 19,60 Zoll erhalten.

Die wahrscheinlichen Fehler der Intervalle in den Reihen (Σ'') und (Σ''') mussten aus dreifachem Grunde bedeutend grösser sein als die in (Σ'): weil die Entfernungen doppelt so gross sind, weil einer Zenithdistanz in einem Normalsatz mit dem Gewichte 1 der w. F. $2''40 > 2''06$ zukommt, endlich weil in der Regel weniger Sätze der Hauptsignale beobachtet worden sind. Dafür ist aber die Anzahl der Glieder dieser Reihen (Σ'') und (Σ''') nur halb so gross, als für (Σ'). Der Mittelwerth des w. F. für ein einzelnes Intervall findet sich für (Σ'') gleich 4,991, für (Σ''') gleich 4,667 Zoll, und hieraus leiten sich, für's Endresultat K , die w. F. 39,92 und 37,34 Zoll ab, beide nothwendig etwas zu klein. Durch die Summirung der Quadrate der besondern w. F. ergibt sich genauer: der w. F. für K gleich 44,32 Zoll in (Σ''), und gleich 40,16 Zoll in (Σ'''), wie sie in Tafel II angegeben sind.

§ 28.

Um eine bessere Einsicht von dem gegenseitigen Verhalten aller 5 Reihen zu bekommen, werde ich die Zahlen derselben, mit den aus ihrer Vereinigung späterhin abgeleiteten letzten Werthen Q vergleichen und wiederum, wie früher, die Unterschiede zu 14 Mitteln vereinigen, aus welchen die zufälligen Unregelmässigkeiten fast gänzlich verschwunden sein müssen. Auf diesem Wege habe ich folgende Zahlen erhalten :

	$F-Q$	$S-Q$	$\Sigma'-Q$	$\Sigma''-Q$	$\Sigma'''-Q$
für P^1	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0 Zoll
P^8	+ 6,8	+ 0,2	+ 1,0	- 7,3	- 3,0 "
P^{18}	+26,1	+19,3	- 7,9	-23,5	-10,1 "
P^{28}	+41,1	+36,2	-17,8	-27,7	-14,8 "
P^{38}	+26,5	+29,7	- 6,1	-11,5	-22,0 "
P^{48}	+18,0	+25,4	- 7,9	+ 6,1	-28,2 "
P^{58}	+ 7,4	+35,3	- 6,8	+ 1,9	-25,1 "
P^{68}	+ 2,8	+33,8	- 9,8	+12,1	-21,0 "
P^{78}	+ 6,2	- 0,5	+ 4,7	+30,4	-27,6 "
P^{88}	- 5,7	-18,7	+15,2	+62,8	-29,0 "
P^{98}	-26,8	-12,5	+19,0	+62,8	-23,2 "
P^{108}	-24,7	- 7,0	+17,0	+50,8	-21,1 "
P^{118}	-26,7	-14,5	+17,8	+58,5	-21,4 "
P^{124}	-26,0	-25,5	+16,8	+66,1	-25,4 "

In jeder Reihe dieser Zahlen spricht sich ein regelmässiger Gang aus. Die einzigen zwei etwas auffallenden Sprünge sind in $S-Q$ zwischen P^{68} und P^{78} und in $\Sigma''-Q$ zwischen P^{78} und P^{88} . Beide fallen auf den, wie schon erwähnt, ungünstigsten Augustmonat. Die beiden letzten Reihen für (Σ'') und (Σ''') gehen dagegen, von P^{48} an, nach entgegengesetzten Seiten vom Mittel aus einander, und deuten dadurch entschieden darauf hin, dass sie sich als reciproke Reihen gegenseitig compensiren.

§ 29.

Die am Schluss der Tafel II gegebenen Werthe für den Unterschied der beiden Meere K aus der Reihe (F), $K = -1052,7$ Zoll mit dem w. F. 26,51 Zoll,

" " "	(S)	= -1052,2	" " " " "	26,51	"
" " "	(Σ')	= -1009,9	" " " " "	22,67	"
" " "	(Σ'')	= -960,6	" " " " "	44,32	"
" " "	(Σ''')	= -1051,1	" " " " "	40,16	"

geben, nach ihren w. F. vereinigt, einen Mittelwerth

$$A = 1030,55 \text{ Zoll mit dem w. F. } 12,90 \text{ Zoll.}$$

Dieser w. F. = 12,90 Zoll ist aus den w. F. der 5 ihm zum Grunde liegenden Bestimmungen gefunden. Wenn wir diese w. F. der einzelnen Bestimmungen aber nur zur Angabe ihrer relativen Gewichte an-

wenden, und dann den w. F. des Resultats A aus den Abweichungen der einzelnen 5 Werthe vom Resultate ableiten, so findet sich dieser w. F. 9,96 Zoll, also kleiner; und es ergibt sich, dass die 5 einzelnen unabhängigen Bestimmungen genauer übereinstimmen als nach ihren individuellen w. F. zu erwarten war.

§ 30.

Es ist aber leicht einzusehen, dass die obige Verbindung der 5 Werthe nicht diejenige ist, die zum zuverlässigsten Resultate führt. Es sind nemlich die in der Reihe (Σ') erhaltenen Beobachtungen genau die reciproken der in den beiden Reihen (F) und (S) benutzten, und zwar so, dass sie für die Hälfte sogar gleichzeitig waren, für die andere Hälfte ebenfalls reciprok, aber um einen Tag in der Beobachtungszeit abliegend, wobei auch in dieser Hälfte fast ganz genau dieselbe Tagesstunde der beiderseitigen Beobachtungen obwaltet. Dasselbe gilt für die beiden Reihen Σ'' und Σ''' ; sie sind reciprok um genau einen Tag von einander abstehend. Diese Reciprocität darf nicht vernachlässigt werden. Hierauf begründet sich folgendes Verfahren.

1. Die Reihen (S) und (F) sind zu einem einzigen Resultate zu vereinigen. Dieses wird

$$\frac{F+S}{2} = M = -1052,45 \text{ Zoll, mit dem w. F. } \frac{26,51}{\sqrt{2}} = 18,75 \text{ Zoll.}$$

2. Dies M ist mit dem ihm reciproken Werthe aus Σ' so zu vereinigen, dass wir daraus einen Endwerth erhalten:

$$B = \frac{M+\Sigma'}{2} = -1031,17 \text{ Zoll, mit dem w. F. } = \frac{1}{2} \sqrt{(18,75^2 + 22,67^2)} = 14,71 \text{ Zoll.}$$

3. Ebenso sind die Reihen Σ'' und Σ''' zu combiniren, und aus ihnen findet sich:

$$C = \frac{\Sigma''+\Sigma'''}{2} = -1006,35 \text{ Zoll, mit dem w. F. } = \frac{1}{2} \sqrt{(44,32^2 + 40,16^2)} = 29,90 \text{ Zoll.}$$

Diese beiden Werthe sind also, der erste B das Ergebniss aus der Gesamtheit der durch die kürzeren Abstände gehenden Messungen dreier Beobachter, der zweite C dasjenige, welches auf den von Sabler allein ausgeführten Messungen aus der doppelten Entfernung beruht. Werden B und C zu einem Werthe, nach den w. F., vereinigt, so erhält man als Endwerth:

$$D = -1026,33 \text{ Zoll, mit dem w. F. } 13,18 \text{ Zoll.}$$

Der w. F. = 13,18 Zoll dieses D ist grösser als 12,90 Zoll, der des früheren Werthes A in § 29. Dies erklärt sich dadurch, dass, bei der Ableitung des w. F. für D , der Vortheil, den das erst bei ihm angewandte Princip der Reciprocität für die Genauigkeit des Resultats gewährt haben muss, noch nicht in Betracht gezogen ist.

§ 31.

Auch abgesehen von der Wirkung der Reciprocität, sind schon allein in Betracht der fast durchweg angewandten Messung aus der Mitte die in Tafel II angegebenen w. F. der Reihen (Σ' , (Σ'') und (Σ''')) zu gross. Diese sind nemlich aus den w. F. der isolirten Zenithdistanzen abgeleitet, ohne die Verminderung zu berücksichtigen, welche in Folge der Messung aus der Mitte für den Höhenunterschied der correspondirenden Objecte bei diesen Reihen, eben sowohl als bei den Reihen (F) und (S), eintreten musste. Wie bedeutend aber die Messung aus der Mitte auf die Genauigkeit eingewirkt hat, lässt sich bei diesen beiden Reihen genau numerisch entwickeln.

Es sind oben von mir die aus der Vergleichung der beiden Reihen folgenden 120 verschiedenen $u'' - u'$ gegeben worden. Schliesst man die ersten 11 aus, bei welchen die von P^{12} an befolgte Anordnung, dass Sawitsch genau an demselben Punkte einen Tag später beobachtete als Fuss, noch nicht stattfand, indem beide bis dahin die Endpunkte derselben Basis gleichzeitig zu Standpunkten hatten, so bleiben ihrer 109, für welche nicht nur die u'' und u' , sondern auch die isolirten Höhen der einzelnen Reihen vergleichbar sind, so dass deren Unterschiede, $h'' - h'$ für das eine Object, und $i'' - i'$ für das andere, gefunden werden können, wobei $(u'' - u') = (i'' - i') - (h'' - h')$ ist.

Wir finden z. B. nach Seite 351 und 324, dass in b^{13} im Mittel gefunden ist

am 8. April von Fuss	$h' = + 98,1$	$i' = + 53,3$	$u' = - 44,9$ Zoll.
« 9. « « Sawitsch	$h'' = + 100,7$	$i'' = + 64,2$	$u'' = - 36,5$ «
folglich	$h'' - h' = + 2,6$	$i'' - i' = + 10,9$	$u'' - u' = + 8,3$ «

Die 108 Mal so gefundenen Grössen führten zu folgenden Ergebnissen :

1. Die $\Sigma (h'' - h')$ ist $+ 386,0$ Zoll, die $\Sigma (i'' - i')$ ist $+ 397,4$ Zoll. Dies zeigt an, dass Sawitsch durchschnittlich die isolirten Höhen grösser erhielt als Fuss um $\frac{+ 386,0}{109} = + 3,54$ Zoll nach den hintern, um $\frac{+ 397,4}{109} = + 3,65$ Zoll nach den vordern Objecten, im Mittel aus 218 Bestimmungen um $k = + 3,60$ Zoll. Ein solcher constanter Unterschied muss statt finden, wenn die beiden angewandten Instrumente verschiedene Biegungscoefficienten haben, und es ergibt sich hieraus $b'' - b' = - 3,60 : 0,68 = - 5,29$. Aus einer ganz andern Untersuchung haben wir oben, Seite xxviii, $b'' - b' = - 3,58$ gefunden. Diese beiden Werthe lassen über das Zeichen von $b'' - b'$ keinen Zweifel nach, und geben im Mittel $b'' - b' = - 4,44$, der bis auf etwa eine Secunde sicher sein mögte. Der Unterschied der beiden gefundenen Werthe erklärt sich nemlich, bei dem ersten, aus der Unsicherheit, die in der Bestimmung des Höhenunterschiedes $P^{14} - P^{124}$ sein kann, und bei dem zweiten daraus, dass in den 3,60 Zoll die Wirkung einer von Fuss im allgemeinen etwas stärkeren, bei der Berechnung der einzelnen Höhen angewandten Refraction enthalten ist, indem seine Beurtheilung namentlich des Zustandes der Ruhe der Bilder etwas von der, die Sawitsch hatte, verschieden war. Wäre dieser Umstand nicht, so gebührte dem $b'' - b' = - 5,29$ entschieden der Vorzug, da der constante Unterschied von 3,6 Zoll nur einem w. F. von 0,27 Zoll unterliegt, dem ein w. F. von 0,40 in $b'' - b'$ entspricht.
2. Zieht man von allen $h'' - h'$ und $i'' - i'$ den constanten Werth $+ 3,60$ ab, so ergeben sich neue Werthe, die ich mit p und q bezeichnen will. Nun fand ich $\Sigma(p^2) = 3893$, $\Sigma(q^2) = 3757$, und endlich $\Sigma(u'' - u')^2 = 2880$. Hätte die Messung aus der Mitte keine Compensation der Höhenbestimmungen nach beiden Seiten hervorgebracht, so würde $\Sigma(p^2) + \Sigma(q^2) = \Sigma(u'' - u')^2$ sein. Jetzt ist aber gefunden $\Sigma(p^2) + \Sigma(q^2) = 7650$, $\Sigma(u'' - u')^2 = 2880$, welche beide Zahlen sich wie 8,0 : 3,012 verhalten. Es ergibt sich hieraus, dass die Messung aus der Mitte das Gewicht der Höhenunterschiede u im Verhältniss $1 : 2\frac{2}{3}$, in den beiden Reihen (F) und (S), oder die Genauigkeit im Verhältniss $1 : 1,633$ gesteigert hat. Diese Steigerung ist einzig einer Elimination der Unsicherheit der bei der Berechnung ange-

wandten Refraction zuzuschreiben, indem diese Unsicherheit für die 2 nahezu gleich weit entfernten Objecte sich desto vollständiger aufhebt, je gleicher die Verhältnisse sind, unter denen der Lichtstrahl sich, auf seinem Wege von beiden Objecten zum Instrumente, gegen den Boden befindet.

§ 32.

Wir sind daher berechtigt anzunehmen, dass eine ähnliche Compensation auch für die 3 Reihen Sabler's statt gefunden hat. Sie ist aber bestimmt kleiner gewesen, weil Sabler zu einer genaueren Kenntniss der Refraction gelangt war, als die beiden andern Mitarbeiter, und daher jedesmal richtigere Coefficienten anwandte. Ich entschied mich daher die Genauigkeit des Resultats aus der Reihe (Σ') nicht im Verhältniss $1 : \sqrt{2} \frac{2}{3}$, sondern wie $1 : \sqrt{1,5}$, die der beiden Reihen Σ'' und Σ''' wie $1 : \sqrt{2}$ zu steigern, oder die w. F. der dritten unter den 5 Reihen mit $\sqrt{1,5}$, und der 4ten und 5ten mit $\sqrt{2}$ zu dividiren. Hiedurch habe ich eine verhältnissmässig stärkere Compensation, durch die Beobachtung aus der Mitte, bei den Hauptsignalen als bei den Basispuncten für Sabler angenommen, weil die Strahlenbrechung in den höheren über dem Erdboden laufenden Gesichtslinien geringeren Unregelmässigkeiten unterworfen ist. Dass ich damit eher zu wenig als zu viel gethan habe, bin ich fest überzeugt, und werde es nachher noch näher erörtern. Ich lege also jetzt der folgenden Berechnung nachstehende Zahlenwerthe zum Grunde :

aus der Reihe (F),	$K = -1052,7$	Zoll,	mit dem w. F.	26,51	Zoll,
“ “ “ (S),	$= -1052,2$	“ “ “ “	“ “ “ “	26,51	“
“ “ “ (Σ'),	$= -1009,9$	“ “ “ “	“ “ “ “	18,94	“
“ “ “ (Σ''),	$= -960,6$	“ “ “ “	“ “ “ “	31,34	“
“ “ “ (Σ'''),	$= -1052,1$	“ “ “ “	“ “ “ “	28,40	“

Hiermit ergibt sich wieder, indem nur die Gewichte von B und C sich gegen früher ändern :

$$B = 1031,17, \text{ mit dem w. F. } 13,32 \text{ Zoll,}$$

$$C = 1006,35, \text{ “ “ “ “ } 21,15 \text{ “ ;}$$

und aus der Verbindung von B und C jetzt

$$D' = -1024,12 \text{ Zoll, mit dem w. F. } = 11,27 \text{ Zoll.}$$

Die beiden gänzlich unabhängigen Werthe B und C stimmen auch hier genauer überein, als die w. F. anzeigen. Wenn wir nemlich wiederum aus der Uebereinstimmung der beiden Werthe B und C den w. F. für D' ableiten, so findet sich dieser nur 7,46 Zoll. Dies war zu erwarten, da in den zuletzt gegebenen w. F. der 5 Reihen zwar nunmehr die durch die Messung aus der Mitte bewirkte Compensation berücksichtigt wurde, dagegen die von der Reciprocität zwischen (M) und (Σ') und zwischen (Σ'') und (Σ''') herrührende nicht mit in Rechnung gezogen ist.

§ 33.

Es lässt sich hier aber die Bemerkung machen, dass die Uebereinstimmung der beiden Hauptwerthe B und C am Schluss der ganzen Arbeit eine zufällige sein kann; und es fragt sich, ob eine gleich genügende Annäherung solcher Werthe $B = \frac{\frac{1}{2}(F+S) + \Sigma'}{2}$, und $C = \frac{\Sigma'' + \Sigma'''}{2}$ auch während des ganzen Verlaufs der Operation statt findet. Um hierüber zu entscheiden habe ich die ganze Operationslinie zwischen P^1 und P^{121} in 24 Theile zerlegt, deren jeder 5 Stationen fasst und im Mittel einem horizontalen Abstand

von 33,4 Werst entspricht; und suche nunmehr nach einander die Höhen der Punkte P^1 , P^6 , Endpunct 1836, P^{16} u. s. w. bis P^{121} , sowohl nach B als nach C . Die Ableitung der C geschah hier folgender Weise. Für P^6 z. B. fand sich der Werth Σ''' direct gegeben = 854,7; aber nicht der Werth Σ'' . Dieser ist dagegen für P^5 und P^7 vorhanden. Nun findet sich für P^5 , $\Sigma'' = Q - 7,1$, für P^7 aber $\Sigma'' = Q - 10,7$, wo Q wieder, wie in § 28, den definitiven Werth der Höhe des Puncts nach Tafel III. § 38 bedeutet. Hiervon ist das Mittel $\Sigma'' = Q - 8,9$ für P^6 , folglich $\Sigma'' = 852,4 - 8,9 = 843,5$; und für P^6 wird endlich $C = \frac{1}{2}(854,7 + 843,5) = 849,1$. Die ersten Columnen der nachstehenden Uebersicht geben die B und C . Dann folgen die aus denselben abgeleiteten U und U' , und $U' - U$. Die letzte Columne gibt endlich das Quadrat des w. F., φ^2 , der jedem $U' - U$ zukommt, das dadurch gebildet ist, dass $\varphi^2 = f^2 + f'^2$, wenn f und f' die in den Reihen B und C dem U und U' zugehörigen w. F. sind, nachdem die Reduction derselben durch die Division mit $\sqrt{1,5}$ für (Σ') und mit $\sqrt{2}$ für (Σ'') und (Σ''') vorgenommen war.

	$B =$	$C =$	$U =$	$U' =$	$U' - U$	Quadrat des w. F. von $U' - U$
					Zoll.	$\varphi^2 =$
P^1	146,0	146,0				
P^6	855,8	849,1	+ 709,8	+ 703,1	- 6,7	19,33
Endp. 1836	1210,2	1197,0	+ 354,4	+ 347,9	- 6,5	58,38
P^{16}	4067,3	4045,7	+ 2857,1	+ 2848,7	- 8,4	21,07
P^{21}	4592,4	4563,0	+ 525,1	+ 517,3	- 7,8	27,76
P^{26}	3810,9	3778,1	- 781,5	- 784,9	- 3,4	17,94
P^{31}	2327,3	2297,1	- 1483,6	- 1481,0	+ 2,6	16,48
P^{56}	5370,8	5335,6	+ 3043,5	+ 3038,5	- 5,0	16,05
P^{41}	6881,9	6859,0	+ 1511,1	+ 1523,4	+12,3	29,25
P^{46}	18773,7	18756,8	+11891,8	+11897,8	+ 6,0	22,61
P^{51}	12916,4	12897,2	- 5857,3	- 5859,6	- 2,3	15,97
P^{56}	12463,0	12437,7	- 453,4	- 459,5	- 6,1	17,25
P^{61}	20410,9	20397,2	+ 7947,9	+ 7959,5	+11,6	26,10
P^{66}	11678,1	11669,1	- 8732,8	- 8728,1	+ 4,7	18,77
P^{71}	10250,3	10240,1	- 1427,8	- 1429,0	- 1,2	24,76
P^{76}	12967,2	12965,9	+ 2716,9	+ 2725,8	+ 8,9	44,72
P^{81}	8530,5	8531,2	- 4436,7	- 4434,7	+ 2,0	34,40
P^{86}	6286,6	6305,3	- 2243,9	- 2225,9	+18,0	29,42
P^{91}	5223,6	5236,2	- 1063,0	- 1069,1	- 6,1	23,67
P^{96}	3807,4	3825,2	- 1416,2	- 1411,0	+ 5,2	18,68
P^{101}	3542,2	3563,2	- 265,2	- 262,0	+ 3,2	16,51
P^{106}	2170,2	2184,9	- 1372,0	- 1378,3	- 6,3	28,20
P^{111}	209,8	223,8	- 1960,4	- 1961,1	- 0,7	11,21
P^{116}	-299,0	-282,0	- 508,8	- 505,8	+ 3,0	38,89
P^{121}	-439,3	-420,4	- 140,3	- 138,4	+ 1,9	30,14

Berechnet man nun für jede horizontale Linie

$$\lambda^2 = (0,6745 \cdot (U' - U))^2 : \varphi^2,$$

so erhält man $\Sigma \lambda^2 = 21,04$, folglich als Mittelwerth $\lambda^2 = 21,04 : 24 = 0,877$. Es ergibt sich also, dass die gegebenen 24 Werthe B und C , nach dieser Untersuchung, im Mittel bedeutend genauer übereinstimmen, als die schon reducirten w. F. $= \varphi$ anzeigen. Hierdurch ist der Beweis geführt, dass in Folge der oben angeführten Reduction, durch die Division mit $\sqrt{1,5}$ für (Σ') , und durch die mit $\sqrt{2}$ für (Σ'') und (Σ''') , die w. F. nicht zu klein geworden sind, dass sie vielmehr entschieden noch zu gross, und um der Uebereinstimmung beider Reihen zu entsprechen, noch mit dem Coefficienten $\lambda = \sqrt{0,887} = 0,942$ zu multipliciren sind. Geschieht dies, so wird der Endwerth unserer bisherigen Untersuchung

$$K = -1024,1 \text{ Zoll mit dem w. F. } 11,27 \cdot 0,942 = 10,62 \text{ Zoll.}$$

§ 34.

Der im vorigen § 33 gegebene Werth für K ist indess noch nicht der eigentliche Endwerth, den unsere Arbeit liefert. Es ist nemlich leicht einzusehen, dass durch die bis zum Ende getrennte Fortführung der 5 Reihen ein Verlust an Genauigkeit hervorgerufen wird, der vermieden werden kann und muss. Wäre die Operation so geführt, dass jeder Beobachter, zwar von denselben Standpuncten aus, aber nach besonderen Höhenmarken gezielt hätte, ohne für jeden Punct die zur verticalen Centrirung erforderlichen Grössen gemessen zu haben: so würde kein anderer Weg, als der bisherige, zur Erlangung des Resultats zu wählen sein. Jetzt aber, wo die verschiedenen Reihen durch dieselben Zielpuncte gehen, kann das zuverlässigste Resultat nur dadurch erhalten werden, dass jeder Theilwerth $V^n = P^{n+1} - P^n$ aus der sofortigen Vereinigung aller ihn bestimmenden Operationen abgeleitet, und der gesuchte Werth von $P^{124} - P^1$ durch eine einzige Reihe

$$U = V^1 + V^2 + \dots + V^{122} + V^{123}$$

ermittelt werde, wobei der w. F. von U aus der Verbindung der den einzelnen V zugehörigen w. F. folgt. Die Richtigkeit dieser Behauptung ergibt sich aus folgender einfachen Betrachtung. Gesetzt wir hätten in 2 unabhängigen Reihen bestimmt:

in I	in II
$x = a$, mit dem (w. F.) ² = α ,	$x = c$, mit dem (w. F.) ² = γ ,
$y = b$, " " " " = β ,	$y = d$, " " " " = δ :

so findet sich

aus I,	$x + y = a + b$, mit dem (w. F.) ² = $\alpha + \beta$,
aus II,	$x + y = c + d$, " " " " = $\gamma + \delta$;

und durch deren Vereinigung

$$X = x + y = \frac{(a+b)(\gamma+\delta) + (c+d)(\alpha+\beta)}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}, \text{ mit dem (w. F.)}^2 = \frac{(a+\beta) \cdot (\gamma+\delta)}{\alpha+\beta+\gamma+\delta} = \varphi^2.$$

Vereinigt man aber sofort beide Werthe von x , und ebenso die von y , so erhält man

aus I und II	$x = \frac{a\gamma + ca}{\alpha + \gamma}$, mit dem (w. F.) ² = $\frac{\alpha\gamma}{\alpha + \gamma}$,
" " " "	$y = \frac{b\delta + d\beta}{\beta + \delta}$, " " " " = $\frac{\beta\delta}{\beta + \delta}$;

deren Vereinigung gibt:

$$X' = x + y = \frac{a\gamma + ca}{a + \gamma} + \frac{b\delta - d\beta}{\beta + \delta}, \text{ mit dem (w. F.)}^2 = \frac{a\gamma}{a + \gamma} + \frac{\beta\delta}{\beta + \delta} = \varphi'^2.$$

Die beiden Werthe X und X' , so wie die ihnen entsprechenden (w. F.)², φ^2 und φ'^2 , sind aber verschieden, denn es findet sich

$$X - X' = \frac{((a - c)(\beta + \delta) - (b - d)(a + \gamma)) \cdot (\alpha\delta - \beta\gamma)}{(\alpha + \beta + \gamma + \delta)(a + \gamma) \cdot (\beta + \delta)},$$

$$\varphi^2 - \varphi'^2 = \frac{(\alpha\delta - \beta\gamma)^2}{(\alpha + \beta + \gamma + \delta) \cdot (a + \gamma) \cdot (\beta + \delta)}.$$

$X - X'$ wird null, wenn $a = c$ und $b = d$, aber auch wenn $\alpha\delta = \beta\gamma$. In diesem einzigen Falle ist auch $\varphi^2 - \varphi'^2 = 0$, welcher Unterschied sonst immer positiv bleibt, woraus folgt dass $\varphi^2 > \varphi'^2$. Man übersieht, dass dieser Satz sich auf jede Zahl von Reihen und Gliedern ausdehnen lässt.

Der Vorzug des zweiten Verfahrens besteht offenbar darin, dass wenn in einer Reihe ein schwaches Glied ist, d. h. ein solches, das mit einem grossen w. F. behaftet ist, dieser grosse Fehler nicht auf alle nachfolgenden Werthe seinen ganzen Einfluss bleibend äussert, sondern sofort durch die Verbindung mit dem entsprechenden Werthe aus den andern Reihen so zu sagen verbessert wird. Ja es wird das zweite Verfahren das einzig mögliche, wenn in einer der Reihen ein Glied ganz fehlte.

§ 35.

Es bleibt mir also noch übrig dies vorzüglichere Verfahren auf die Data, die unsern 5 Reihen zum Grunde liegen, anzuwenden, wobei aber so gerechnet werden muss, dass die beiden Principe der Messung aus der Mitte und der Reciprocität streng beibehalten werden, d. h. dass man für jeden Theilwerth $P^{n+1} - P^n$ erst F und S zu einem Mittelwerth $= M$ vereinigt, dann $B = \frac{M + \Sigma'}{2}$ sucht, darauf $C = \frac{\Sigma'' + \Sigma'''}{2}$, und nun B und C vereinigt. Ich stelle hier folgende Punkte, die mein Verfahren genau kennen lehren, zusammen.

1. Zuvörderst ist noch zu beachten, dass ich bisher $M = \frac{F + S}{2}$ gesetzt habe, jetzt aber F und S zu einem Mittel mit Berücksichtigung der Gewichte beider Bestimmungen vereinigen werde, was genauer ist, so wie die Gewichte der beiden Bestimmungen ungleich sind. Es ist z. B. $P^{24} - P^{25}$ von Fuss $= -936,3$ Zoll aus 3 Sätzen gefunden, denen zusammen das relative Gewicht 16 zukommt; von Sawitsch $= -929,0$ Zoll, auch in 3 Sätzen bei ungünstigeren Bildern, die nur ein Gewicht $= 7,0$ geben. Das arithmetische Mittel wäre hier $-932,6$, wofür jetzt nach den Gewichten $-934,1$ folgt. Es fand sich indess, dass die Gewichte bei Fuss im allgemeinen gegen Sawitsch etwas zu gross angegeben sind, indem bei ersteren die Characteristik des Bildes *ruhig* offenbar einen weiteren Umfang hatte. Eine sorgfältige Untersuchung führte dahin, die Gewichte nach Fuss Angaben, so wie mehr als ein einziger ruhiger Satz beobachtet war, um $\frac{1}{8}$ zu verkleinern. In unserm Beispiele wird daher aus 16 jetzt 13, und das Mittel $-933,7$ mit dem relativen Gewichte $= 20$, oder so gut als beruhend auf $g = 20 : 8 = 2,5$ Normalsätzen, deren jedem das relative Gewicht 8 zukommt.

Diese Berücksichtigung der Gewichte in den Reihen (F) und (S) führte zu einer schärfern Untersuchung der Genauigkeit dieser Reihen, indem nunmehr die Gewichte zugezogen wurden, bei welcher

wieder von den in Tafel II, Seite xxxix, gegebenen $u'' - u'$ ausgegangen werden musste. Es ergab sich dass, für die mittlere Entfernung, in einem Normalsatz, dem das relative Gewicht 8 zukommt, der w. F. des durch ihn bestimmten u gleich 2,80 Zoll ist. Da ferner durchschnittlich jedes u von den einzelnen Beobachtern so gut bestimmt war, als wenn es auf 1,606 Normalsätzen beruhte, so folgt der w. F. eines u in jeder der beiden Reihen $= 2,80 : \sqrt{1,606} = 2,21$ Zoll. (Wir hatten oben, Seite XLIII, ohne die Gewichte zu berücksichtigen, dafür 2,40 Zoll gefunden). Dem jetzigen w. F. von 2,80 für ein aus einem einzigen Normalsatze abgeleitetes u , der sich auf den mittleren Abstand der Objecte bezieht, entspricht ein w. F. von 2'',90 in der aus einem Normalsatz gefolgerten Zenithdistanz. Da nun, nach Seite xx, der w. F. der Messung selbst beim Theodoliten 1'',60 beträgt: so bleibt für die Refraction $\sqrt{(2,90^2 - 1,60^2)} = 2'',42$ übrig. So viel beträgt also der von der Strahlenbrechung herführende w. F. einer von Fuss oder Sawitsch aus der Mitte in einem Normalsatz beobachteten Zenithdistanz eines der beiden Objecte. Vergleiche § 16. Durch die Kenntniss des Winkelwerths 2'',90 sind wir nunmehr auch im Stande bei der Bestimmung der w. F. in jedem einzelnen Falle die Entfernungen der Objecte vom Standpuncte zu berücksichtigen. Ist nemlich durch die Vereinigung der beiden Reihen (F) und (S) ein M mit dem absoluten Gewichte g gegeben, und sind die beiden Entfernungen D und D' ; so ist für das eine Object der w. F. der Höhe $f = D \cdot \sin 2'',90 : \sqrt{g}$, für das andere $f' = D' \cdot \sin 2'',90 : \sqrt{g}$, und für M daraus $\varphi = \sqrt{(f^2 + f'^2)}$. In unserm Beispiel $P^{24} - P^{25}$ findet sich $f = 0,99$, $f' = 2,09$, $\varphi = 2,26$ Zoll, oder $\varphi^2 = 5,09$.

2. Wegen der durch die Messung aus der Mitte herbeigeführten Compensation sind auch jetzt, in den Reihen Σ' , Σ'' und Σ''' , die ursprünglichen (w. F.)² respective mit 1,5 und 2,0 dividirt worden, nach § 32, Seite XLIX. Wir finden aber unter den 121 Intervallen von P^2 bis P^{125} , dass in 8 derselben eine oder die andere Beobachtung zur strengen Vollständigkeit fehlt. In einem solchen Falle ist die Messung aus der Mitte partiell nicht vorhanden, und auch die Reciprocität nicht vollständig. Aus dem ersten Grunde sind denn auch in allen diesen Fällen die ursprünglichen w. F. beibehalten worden, ohne die angezeigte Reduction zuzulassen. Man sieht dass in einem solchen V sich, wie gebührt, ein etwas grösserer w. F. herausstellt.
3. Das regelmässige Verfahren der Vereinigung der aus den verschiedenen Reihen entnommenen Grössen zu einem Werthe V , wie es für die 143 vollständigen Intervalle angewandt wurde, stellt sich in unserm Beispiel folgendermaassen dar :

Nach 1) ist, aus (F) und (S), $P^{24} - P^{25} = -933,7$ Zoll, mit dem (w. F.)² = 5,09.

Nach S. 280 ist aus Reihe $\frac{3}{2}(\Sigma')$:

aus p^{25} , $B^{25} - P^{23} = -661,6$ Zoll, mit dem Gewichte 1,00; w. F. = 1,07, (w. F.)² = 1,15

aus p^{24} , $P^{24} - B^{23} = -274,4$ " " " " 1,76; " " = 1,99, " " = 3,96

Also $\overline{P^{24} - P^{25}} = -936,0$ " 2,26 5,11

1,85 3,41 reducirt.

Ebendasselbst ergibt sich aus (Σ'') und (Σ''') :

aus p^{23} , $P^{24} - P^{23} = -936,8$ Zoll, mit dem Gewichte 0,60; w. F. = 4,97, (w. F.) ² = 24,73	} reciprok.
aus p^{24} , $= -934,0$ " " " " 1,17; " " = 3,56, " " = 12,69	
Mittel = $-935,4$ " " " " 3,06, " " = 9,36	
	2,16, " " = 4,68 reducirt.

Wir haben demnach für $P^{24} - P^{23}$

$M = -933,7$ Zoll, mit dem (w. F.) ² = 5,09	} reciprok.
$\Sigma' = -936,0$ " " " " " " = 3,41	
Mittel $B = -934,85$ " " " " " " 2,12	
$C = -935,4$ " " " " " " 4,68	
Endwerth $V^{23} = -935,0$ " " " " " " = 1,46	
w. F. = 1,21 " ;	

wobei die Vereinigung von B und C zum Endwerth V^{23} nach den ihnen zugehörigen angegebenen (w. F.)² geschah.

4. Bei diesem Rechnungsverfahren scheint es zuerst, als wenn das Princip der Messung von der Mitte aus, nur für den Werth M in Anwendung gebracht sei, weil die beiden hier für Σ' und für C aus (Σ'') und (Σ''') benutzten Grössen nicht von der Mitte aus correspondirend sind. Es ist aber zu beachten, dass die correspondirenden Grössen in den benachbarten Intervallen, in unserm Beispiel in V^{22} und V^{24} , so in Anwendung kommen, dass das Princip der Messung aus der Mitte bis zur Ableitung der B und C ganz streng erhalten ist, und nur in sehr geringem Maasse bei der Vereinigung von B und C zu V gestört wird, in dem Fall dass die (w. F.)² für B und C in den benachbarten V nicht dasselbe Verhältniss unter sich darbieten. Dieses kleine Opfer war aber bei der Vereinigung zu einem einzigen Theilwerth V für jedes $P^{n+1} - P^n$ ein unvermeidliches, und es lässt sich nachweisen dass es die Sicherheit der Resultate nur ganz unwesentlich gestört haben kann.

§ 36.

Das erste und letzte Intervall der ganzen Operation beruhen auf reciproken gleichzeitigen Beobachtungen verschiedener Beobachter. Für die Bestimmung von $V^1 = P^2 - P^1$, beobachteten Fuss und Sawitsch am 3. Nov. 1836, an 2 verschiedenen Standpuncten, die etwa 400 und 550 Fuss von P^1 ablagen, die Zenithdistanz von P^2 , während Sabler mit seinem Instrumente von p^2 aus die von P^1 nahm. Jeder machte 3 Sätze. Aus diesem Material hat Sabler $P^2 - P^1 = 1168,0$ Zoll, Seite 223, abgeleitet. Es ist aber klar, dass diese Zahl noch mit dem Einfluss der Biegungscoefficienten der 3 Instrumente behaftet ist. Diese zu bestimmen benutzte ich zunächst die von Sabler und Sawitsch an mehreren Puncten beobachteten Polhöhen. Da nemlich beide sowohl den Polarstern, als südliche Sterne beobachtet hatten, so musste sich der Biegungscoefficient in diesen Polhöhen aussprechen, und, unter Annahme dass die Biegung dem $\sin z$ proportional ist, bestimmen lassen. Bei den, Seite 379—381, von Sabler und, Seite 187—189, von Sawitsch berechneten Polhöhen sind die Königsberger Declinationen der südlichen Sterne benutzt worden. Statt ihrer wandte ich die auch durch die neuesten Untersuchungen als genauer erkannten Dorpater De-

clinationen dieser Sterne an, während der Ort des Polarsterns aus den Berliner Ephemeriden genommen keiner Verbesserung bedurfte.

Biegungscoefficient b des von SABLER gebrauchten gr. Universalinstruments.

Die angezeigten Beobachtungen geben zur Bestimmung von *b* folgende Gleichungen :

$$\begin{aligned} 0 &= +1,70 - 1,30 b, & \text{mit dem Gewicht } 3,2 \\ 0 &= +0,49 - 1,20 b, & \text{ " " " } 1,7 \\ 0 &= -0,83 - 1,20 b, & \text{ " " " } 1,2 \\ 0 &= +1,72 - 1,58 b, & \text{ " " " } 7,2 \end{aligned}$$

Hieraus findet sich nach der Methode der kl. Quadr.

$$b = +1,05, \text{ mit dem w. F. } 0,30.$$

Biegungscoefficient b' des von SAWITSCH gebrauchten Theodoliten.

Hierfür erhielt ich folgende Gleichungen :

$$\begin{aligned} 0 &= -3,26 - 1,27 b', & \text{mit dem Gewichte } 4,4 \\ 0 &= -4,19 - 1,22 b', & \text{ " " " } 1,6 \\ 0 &= +4,00 - 1,22 b', & \text{ " " " } 0,7 \\ 0 &= -0,92 - 1,26 b', & \text{ " " " } 0,7 \\ 0 &= +3,75 - 1,26 b', & \text{ " " " } 0,7 \\ 0 &= -4,91 - 1,39 b', & \text{ " " " } 2,7. \end{aligned}$$

Und hieraus

$$b' = -2,18, \text{ mit dem w. F. } 0,62.$$

Es verdient hervorgehoben zu werden, dass sich in den zwei gleichnamigen Polhöhen, nach Anbringung der gefundenen Biegung, eine treffliche Uebereinstimmung der beiden Beobachter darbietet. Es ist nemlich

	für Nowotscherkask, St. Nicolai-Kirche,	für Nicolajewka, Kirche
nach Sabler	$\varphi = 47^{\circ} 24' 35,3$	$46^{\circ} 58' 38,0$
nach Sawitsch	34,9	37,4

Biegungscoefficient b'' des von Fuss gebrauchten Theodoliten.

Für die Bestimmung dieses Coefficienten finden sich keine Polhöhenbeobachtungen. Aber Seite XLVIII ist mit grosser Sicherheit $b'' - b' = -4,44$ gefunden worden, woraus, mit $b' = -2,18$, sich $b'' = -6,62$ findet.

Wenden wir nun diese Biegungscoefficienten auf die Seite 223 gegebenen Zenithdistanzen, die schon auf die Signalmarken P^1 und P^2 centrirt sind, an, so erhalten wir folgendes :

	in P^1		in P^2	im Mittel	$P^2 - P^1 =$
	nach Sawitsch	nach Fuss	nach Sabler	$\frac{(z' - z)}{2} =$	
$3^h 7^m 5$	$z = 89^{\circ} 34' 45,7$	$z = 89^{\circ} 34' 43,1$	$z' = 90^{\circ} 26' 58,0$	$+ 26' 6,8$	1169,2 Zoll
37,5	40,4	37,8	54,8	7,8	1169,9 "
4 7,5	35,3	33,3	52,0	8,8	1170,7 "
	Mittel 40,5	38,1	54,9	7,8	1169,9 "

(w. F.)² waren von mir als β^2 und γ^2 berechnet, und wenn sie gehörig bestimmt waren, so mussten sie den Unterschieden $\Delta = B - C$, dieser beiden unabhängigen Grössen, im Mittel auf eine gewisse Art entsprechen. Ich suchte daher für alle 113 Fälle einen Coefficienten λ^2 durch Berechnung des Ausdrucks

$$\lambda^2 = \frac{0,6745^2 \cdot \Delta^2}{\beta^2 + \gamma^2}$$

Entsprachen die β und γ den $\Delta = B - C$, so musste im Mittel $\lambda^2 = 1$ werden. Das Resultat der Rechnung war, im Mittel aus 113 Bestimmungen $\lambda^2 = 1,0365$, $\lambda = 1,0180$.

Es ist also aus der Uebereinstimmung der Werthe B und C gefunden, dass der Gewichteinheit, für die ein w. F. der Höhe von 1,0 Zoll vorausgesetzt ist, genauer ein w. F. von 1,018 Zoll zukommt, so dass alle w. F. um $0,018 = \frac{1}{55}$, alle (w. F.)² um $0,036 = \frac{1}{28}$ zu vermehren sind.

Wenn wir nun aber betrachten, dass für unsere B und C , wie sie jetzt berechnet sind, zwar die Reciprocität gehörig wirksam war, dass aber die Compensation durch die Beobachtung aus der Mitte erst durch die benachbarten Δ , also z. B. für Δ^{25} , durch Δ^{22} und Δ^{24} herbeigeführt wird, so ersieht man, dass wir noch einen Factor μ^2 zu bestimmen haben, der kleiner als 1 sein muss, durch dessen Anwendung wir erst zu den richtigen (w. F.)² gelangen, die nunmehr $\beta^2 \cdot \lambda^2 \cdot \mu^2$ und $\gamma^2 \cdot \lambda^2 \cdot \mu^2$ werden. Nehmen wir 2 benachbarte $B - C$, die wir durch Δ und Δ' bezeichnen wollen, so gilt der Wahrscheinlichkeit nach zwischen ihnen die Bedingung, dass $(\Delta^2 + \Delta'^2) = (\Delta + \Delta')^2$, so wie keine Compensation statt findet. Ergibt sich aber, dass vorherrschend $(\Delta^2 + \Delta'^2) > (\Delta + \Delta')^2$, so ist dadurch das Vorhandensein einer noch nicht berücksichtigten Compensation ausgesprochen, welche bei $(\Delta^2 + \Delta'^2)$ doppelt so gross gewesen sein muss als bei $(\Delta + \Delta')^2$. Hieraus entsteht folgende Gleichung für den einzelnen Fall:

$$(\Delta^2 + \Delta'^2) - 2\omega^2 = (\Delta + \Delta')^2 - \omega^2 \text{ und } \omega^2 = (\Delta^2 + \Delta'^2) - (\Delta + \Delta')^2.$$

Ich konnte 110 Mal aus meinem Material die Grösse ω^2 bestimmen, und fand ein so entschiedenes Vorwalten eines positiven Werthes, dass sich $\Sigma \omega^2 = +424,2$ fand, während die $\Sigma \Delta^2$ sich auf 1279,2 belief. Hiermit erhalten wir als Mittelwerth

$$\mu^2 = \frac{1279,2 - 424,2}{1279,2} = \frac{855,0}{1279,2} = 0,6685; \mu = 0,8177.$$

Wir sehen hieraus dass, um der Compensation durch die benachbarten Intervalle zu genügen, die (w. F.)² mit fast genau $\frac{2}{3}$ zu multipliciren sind. Verbinden wir nunmehr beide Coefficienten λ^2 und μ^2 , so findet sich

$$\pi^2 = \lambda^2 \cdot \mu^2 = 1,0365 \cdot 0,6685 = 0,6928; \pi = 0,8326 = \frac{5}{6}.$$

Mit diesem Coefficienten $\pi^2 = 0,693 = 0,7 (1 - \frac{1}{100})$ habe ich alle diejenigen Fehlerquadrate multiplicirt, wo diese Compensation vorhanden ist.

§ 38.

In der nachfolgenden Tafel III stelle ich nun die allendlichen Werthe der Höhen über dem Asowschen Meere, für die 124 Signalmarken P^1 bis P^{124} zusammen. Auf der Horizontallinie mit jeder absoluten Höhe Q ist zur Beurtheilung ihrer Genauigkeit der w. F. derselben angegeben. So ist für P^{36} die Höhe 5358,5 Zoll mit dem w. F. = 5,18 Zoll. Der Unterschied zweier benachbarten absoluten Höhen gibt den Werth des Höhenunterschiedes V der beiden Signale, z. B. $V^{36} = P^{37} - P^{36} = -435,1$ Zoll. Der (w. F.)² des V steht zwischen den beiden Horizontalen der zugehörigen Höhen.

TAFEL III. Zusammenstellung der definitiven Werthe Q , der in englischen Zollen ausgedrückten Höhen über dem Asowschen Meere, für alle Hauptpuncte P^1 bis P^{124} .

(Alle Höhen beziehen sich auf die Mitten der Visirmarken.)

	Höhe Q	(w. F.) ² der V	w. F. der Q		Höhe Q	(w. F.) ² der V	w. F. der Q
P^1	146,0			P^{51}	2318,3	0,35	4,93
P^2	1315,7	0,40	0,63	P^{52}	2295,5	0,17	4,95
P^3	1838,4	0,10	0,71	P^{53}	2363,3	0,33	4,98
P^4	1257,6	1,85	1,48	P^{54}	2471,6	0,48	5,03
P^5	1677,5	0,60	1,72	P^{55}	2833,8	0,40	5,07
P^6	852,6	0,51	1,86	P^{56}	5358,5	1,15	5,18
P^7	1669,1	0,65	2,03	P^{57}	4923,4	0,84	5,26
P^8	917,3	3,18	2,70	P^{58}	5689,1	1,02	5,36
P^9	1156,9	3,35	3,26	P^{59}	7013,7	1,25	5,47
P^{10}	3230,4	1,48	3,48	P^{60}	6960,4	0,48	5,51
1836 P^{11}	1331,8	0,33	3,53	P^{61}	6872,2	0,66	5,57
Endpunct 1836	1206,8		3,53	P^{62}	9976,4	0,52	5,62
1837 P^{11}	1330,5		3,53	P^{63}	13539,7	0,22	5,64
P^{12}	2627,3	0,25	3,56	P^{64}	14775,7	0,32	5,67
P^{13}	3271,1	0,26	3,60	P^{65}	15431,7	0,85	5,74
P^{14}	3226,0	0,82	3,71	P^{66}	18767,7	0,96	5,82
P^{15}	3228,9	0,81	3,82	P^{67}	21446,7	0,79	5,89
P^{16}	4062,1	0,23	3,85	P^{68}	22265,1	0,28	5,92
P^{17}	3891,8	0,49	3,91	P^{69}	18331,2	0,22	5,93
P^{18}	4023,6	2,38	4,22	P^{70}	12216,4	0,67	5,99
P^{19}	4165,2	0,75	4,29	P^{71}	12910,4	0,16	6,00
P^{20}	4194,2	0,12	4,31	P^{72}	13284,7	0,36	6,03
P^{21}	4585,5	0,72	4,39	P^{73}	16834,1	0,63	6,09
P^{22}	4282,8	0,41	4,45	P^{74}	18343,7	0,02	6,09
P^{23}	3792,9	0,23	4,46	P^{75}	12077,6	0,85	6,16
P^{24}	2857,9	1,01	4,57	P^{76}	12455,5	0,71	6,21
P^{25}	3374,0	0,67	4,65	P^{77}	11663,8	0,41	6,25
P^{26}	3801,3	0,29	4,68	P^{78}	13500,8	0,62	6,30
P^{27}	4934,4	0,34	4,72	P^{79}	21959,1	0,97	6,37
P^{28}	3460,2	0,58	4,78	P^{80}	21683,4	0,59	6,42
P^{29}	2915,5	0,85	4,86	P^{81}	20404,9	0,59	6,47
P^{30}	2560,8	0,28	4,89	P^{82}	13361,6	0,27	6,49

TAFEL III. *Definitive Höhen der Hauptpunkte über dem Meere.*

	Höhe Q	(w. F.) ² der V	w. F. der Q		Höhe Q	(w. F.) ² der V	w. F. der Q		Höhe Q	(w. F.) ² der V	w. F. der Q
<i>P</i> ⁵³	16249,6	0,28	6,51	<i>P</i> ⁸⁴	6932,0	0,53	7,74	<i>P</i> ¹⁰⁵	2275,6	0,79	8,53
<i>P</i> ⁶⁴	16130,2	0,73	6,56	<i>P</i> ⁸⁵	6550,2	0,71	7,79	<i>P</i> ¹⁰⁶	2171,5	0,18	8,54
<i>P</i> ⁶⁵	11807,3	1,08	6,65	<i>P</i> ⁸⁶	6287,0	0,51	7,82	<i>P</i> ¹⁰⁷	1634,2	0,30	8,55
<i>P</i> ⁶⁶	11674,7	0,46	6,68	<i>P</i> ⁸⁷	5953,4	0,84	7,88	<i>P</i> ¹⁰⁸	1086,9	0,18	8,56
<i>P</i> ⁶⁷	12416,4	0,08	6,69	<i>P</i> ⁸⁸	5428,4	0,69	7,92	<i>P</i> ¹⁰⁹	1088,3	0,33	8,58
<i>P</i> ⁶⁸	13857,1	1,20	6,77	<i>P</i> ⁸⁹	5657,6	0,48	7,95	<i>P</i> ¹¹⁰	502,3	0,37	8,61
<i>P</i> ⁶⁹	13989,9	0,45	6,81	<i>P</i> ⁹⁰	5087,6	0,87	8,00	<i>P</i> ¹¹¹	210,6	0,34	8,62
<i>P</i> ⁷⁰	15434,1	1,27	6,90	<i>P</i> ⁹¹	5222,3	0,15	8,01	<i>P</i> ¹¹²	15,4	1,10	8,69
<i>P</i> ⁷¹	10245,0	1,23	7,00	<i>P</i> ⁹²	5263,5	0,20	8,03	<i>P</i> ¹¹³	-143,1	1,13	8,75
<i>P</i> ⁷²	11355,1	0,26	7,01	<i>P</i> ⁹³	4841,1	0,64	8,07	<i>P</i> ¹¹⁴	-233,8	0,35	8,77
<i>P</i> ⁷³	12278,3	1,14	7,09	<i>P</i> ⁹⁴	4560,4	0,78	8,11	<i>P</i> ¹¹⁵	-221,5	1,41	8,86
<i>P</i> ⁷⁴	13325,9	2,34	7,25	<i>P</i> ⁹⁵	4188,5	0,80	8,16	<i>P</i> ¹¹⁶	-297,6	0,84	8,90
<i>P</i> ⁷⁵	12854,1	1,88	7,38	<i>P</i> ⁹⁶	3809,2	0,43	8,19	<i>P</i> ¹¹⁷	-493,6	1,56	8,99
<i>P</i> ⁷⁶	12963,5	0,40	7,41	<i>P</i> ⁹⁷	3872,3	0,39	8,21	<i>P</i> ¹¹⁸	-413,8	0,76	9,03
<i>P</i> ⁷⁷	11146,2	1,77	7,52	<i>P</i> ⁹⁸	4041,1	0,45	8,24	<i>P</i> ¹¹⁹	-443,9	0,29	9,05
<i>P</i> ⁷⁸	10748,3	0,73	7,57	<i>P</i> ⁹⁹	3999,5	0,23	8,25	<i>P</i> ¹²⁰	-564,2	0,64	9,08
<i>P</i> ⁷⁹	10108,1	0,35	7,60	<i>P</i> ¹⁰⁰	3578,7	0,84	8,31	<i>P</i> ¹²¹	-436,3	0,82	9,13
<i>P</i> ⁸⁰	9196,4	0,51	7,63	<i>P</i> ¹⁰¹	3544,3	0,34	8,33	<i>P</i> ¹²²	-437,3	0,88	9,17
<i>P</i> ⁸¹	8528,9	0,35	7,65	<i>P</i> ¹⁰²	3470,3	0,25	8,34	<i>P</i> ¹²³	-438,1	0,38	9,20
<i>P</i> ⁸²	7656,4	0,48	7,69	<i>P</i> ¹⁰³	2854,0	2,17	8,47	<i>P</i> ¹²⁴	-743,6	1,86	9,29
<i>P</i> ⁸³	7232,3	0,38	7,71	<i>P</i> ¹⁰⁴	2756,6	0,16	8,48				

Die Summe der Quadrate der w. F. der Höhenbestimmung zwischen P^1 und P^{124} ist in der vorigen Tafel = 86,41, deren Quadratwurzel 9,29 Zoll den w. F. von $P^{124} - P^1$ ausdrückt, in so weit er von der Messung im verticalen Sinne abhängt. Hierzu haben wir noch, nach Seite xix, den aus der Unsicherheit der horizontalen Entfernungen hervorgehenden w. F. des Höhenunterschiedes derselben beiden Signale zu verbinden. Er ist dort = 2,46 Zoll angegeben, eine Grösse, die sich eigentlich auf die Höhenbestimmungen durch die kürzeren Entfernungen (Reihe *B*) bezieht, und für die *Q* aus der Verbindung von *B* und *C* entschieden noch etwas kleiner ist.

Es ist demnach zu 86,41 noch $(2,46)^2 = 6,05$ hinzuzufügen. So ergibt sich, für $P^{124} - P^1 = -889,6$ Zoll, der $(w. F.)^2 = 92,46$ und also der w. F. = 9,62 Zoll. Dieser w. F. begreift alle Fehlerquellen in sich, die bei dieser Operation haben einen Einfluss äussern können, so dass keine einzige übersehen, und jede gehörig gewürdigt worden. Vertheilen wir 92,46 auf die 123 Intervalle, so folgt im Mittel, für ein einzelnes $V^n = P^{n+1} - P^n$, der $(w. F.)^2 = 0,752$, und der w. F. = 0,87 Zoll. Dies ist also der w. F., dem ein aus

h*

dem Complexe der 5 Reihen abgeleiteter Höhenunterschied zweier benachbarter Hauptsignale, die 7 Werst von einander abstehen, unterworfen ist.

§ 39.

Fügen wir zu P^{124} — Asow. Meer = —743,6 noch den Höhenunterschied zwischen dem Signal P^{124} und dem mittleren Wasserstande des Caspischen Meeres hinzu, so ergibt sich $K = -743,6 - 281,8 = -1025,4$ Zoll. Der w. F. dieser Zahl ist noch mit der geringen Unsicherheit über den mittleren Stand des Wassers in beiden Meeren zu beschweren. Nach Seite 7, 9, 96, ist für den mittleren Stand des Asowschen Meeres etwa 2 Zoll als w. F. anzunehmen, und für den des Caspischen eher weniger als mehr. Setzen wir diesen also = 1,5 Zoll. Es ist demnach zu $92,46$ noch $4,0 + 2,25 = 6,25$ hinzuzufügen, wodurch wir $98,71$ erhalten, wovon die Quadratwurzel = $9,94$ ist. Somit sind wir endlich zum Schlussergebniss für den Hauptzweck der ausgeführten Operation gekommen.

Es lag im Jahre 1837,8 die Oberfläche des Caspischen Meeres, bei seinem mittleren Wasserstande, um 1025,4 englische Zoll tiefer als der mittlere Wasserstand des Asowschen Meeres, und dieser Werth ist einem wahrscheinlichen Fehler von nur 9,94 Zoll unterworfen. Wir haben folglich nach verschiedenen Maasseinheiten :

$$\begin{aligned}
 K &= -1025,4 \text{ engl. Zoll, mit dem w. F.} = 9,9 \text{ Zoll,} \\
 &— 85,45 \text{ engl. Fuss, " " " " = 0,83 Fuss,} \\
 &— 12,207 \text{ Saschen, " " " " = 0,118 Saschen,} \\
 &— 80,18 \text{ franz. Fuss, " " " " = 0,78 Fuss,} \\
 &— 26,045 \text{ Mètres, " " " " = 0,252 Mètre.}
 \end{aligned}$$

Die Genauigkeit dieses Resultats, die durch den kleinen w. F. von 9,9 Zoll angegeben wird, ist gewiss eine merkwürdige Thatsache, wenn man bedenkt, dass dasselbe auf einer Arbeit beruht, deren Operationslinie eine Länge von 823 Werst oder 118 geographische Meilen hat.

Aus der getrennten Behandlung der 5 Reihen (F), (S), (Σ'), (Σ''), (Σ''') war oben, Seite XLIX, der Werth $K = -1024,1$ Zoll \mp 11,3 Zoll gefunden worden. Die definitive in §§ 35 bis 39 durchgeführte Rechnung hat $K = -1025,4$ \mp 9,9 Zoll gegeben. Die beiden Werthe von K sind auf 1,3 Zoll einander gleich; dem zweiten gebührt aber, der strengeren Ableitung wegen, entschieden der Vorzug, auch ist er einem kleineren w. F. unterworfen, obgleich bei ihm Fehlerquellen mit zugezogen sind, die bei dem frühern noch ausser Acht gelassen waren. Die von Sabler, Seite 371, gegebene Tiefe des Caspischen Meeres = 1004,0 Zoll mit dem w. F. 14,8 Zoll weicht um 21,4 Zoll vom jetzt gefundenen Endwerthe ab.

§ 40.

Der Vollständigkeit wegen gebe ich jetzt in der nachstehenden Tafel IV die definitiven Höhen aller Basispunkte über dem Asowschen Meere, in englischen Zollen ausgedrückt. Sie sind aus der Tafel III mit Zuziehung der reciproken Höhenunterschiede (Seite 222 bis 248) abgeleitet worden. Für jedes β^n ergab sich eine doppelte Bestimmung, einmal aus der Höhe von P^n mit dem reciproken Unterschiede $\beta^n - P^n$ verbunden, das zweite Mal aus der Höhe von P^{n+1} mit dem Werthe $P^{n+1} - \beta^n$ vereinigt. Aus

beiden Werthen wurde das Mittel genommen. Die Uebereinstimmung dieser beiden Werthe zeigte, dass die auf diese Weise in Tafel IV gegebenen definitiven Höhen der Basissignale denen der Hauptsignale an Genauigkeit kaum nachstehen, und es wurde ihnen daher ein w. F. in der Tafel beigelegt, der ein Mittel aus den w. F. der jedesmal benachbarten beiden P ist.

Um die Höhen in Tafel IV, die sich alle auf die Visirmarken beziehen, auf die des Erdbodens zu verwandeln, sind an dieselben von B^1 bis B^{20} die Reductionen -62 Zoll, von β^{21} bis β^{122} dagegen -144 Zoll anzubringen. Ich bemerke hiebei dass, nach Anbringung dieser Reduction, Tafel IV ein genaueres Bild des Terrainprofils geben wird, als Tafel III, für welche die Reduction auf den Boden ebenfalls -144 Zoll beträgt, weil zu den Basen immer die allgemeine Fläche gewählt wurde, während die Hauptsignale meist auf künstlichen Erhöhungen, den Kurganen, sich befanden.

TAFEL IV. *Definitive Höhen der Basispunkte über dem Meere, in engl. Zollen.*

(Alle Höhen beziehen sich auf die Mitten der Visirmarken.)

		w. F.			w. F.			w. F.			w. F.
B^1	109,7	0,00	β^{25}	3300,2	4,67	α^{49}	13696,2	5,96	β^{75}	12051,2	7,17
B^2	1458,8	0,67	β^{26}	4260,4	4,70	α^{50}	10654,7	6,00	α^{74}	12892,6	7,32
B^3	160,9	1,10	β^{27}	3808,9	4,75	α^{51}	12284,9	6,02	β^{75}	12507,7	7,40
B^4	1107,6	1,60	β^{28}	2824,1	4,82	β^{52}	12192,2	6,06	β^{76}	11931,3	7,47
B^5	790,5	1,79	B^{29}	1860,3	4,88	α^{53}	16868,7	6,09	α^{77}	10812,9	7,55
B^6	493,8	1,94	β^{30}	2448,5	4,91	β^{54}	13585,0	6,13	β^{78}	10282,3	7,59
B^7	861,3	2,36	β^{31}	2156,6	4,94	β^{55}	11556,2	6,19	β^{79}	9497,1	7,62
B^8	967,6	2,98	β^{32}	2054,7	4,97	α^{56}	12471,0	6,23	β^{80}	8737,6	7,64
B^9	832,7	3,35	β^{33}	2195,5	5,01	β^{57}	11951,6	6,28	β^{81}	7808,3	7,67
B^{10}	2104,7	3,48	β^{34}	2438,9	5,05	α^{58}	14809,6	6,34	β^{82}	7214,0	7,70
B^{11}	1923,8	3,55	β^{35}	3476,7	5,13	β^{59}	20348,2	6,40	β^{83}	6951,5	7,73
A^{12}	2755,6	3,58	β^{36}	4423,5	5,22	β^{60}	18103,2	6,45	β^{84}	6716,6	7,77
B^{13}	3163,9	3,66	β^{37}	4495,2	5,31	β^{61}	13927,7	6,48	β^{85}	6402,6	7,81
B^{14}	2151,8	3,77	α^{38}	5915,9	5,42	β^{62}	15784,5	6,50	β^{86}	6045,4	7,85
B^{15}	3523,1	3,84	β^{39}	7009,9	5,49	β^{63}	15853,7	6,54	α^{37}	5462,5	7,90
B^{16}	3686,3	3,88	α^{40}	6646,9	5,54	β^{64}	12107,3	6,61	β^{88}	5330,3	7,94
B^{17}	3850,5	4,07	β^{41}	7266,8	5,60	β^{65}	9384,5	6,67	β^{89}	5162,2	7,98
B^{18}	3938,7	4,26	β^{42}	10282,8	5,63	β^{66}	11970,0	6,69	β^{90}	5134,7	8,01
B^{19}	4085,8	4,30	β^{43}	14069,4	5,66	β^{67}	10324,4	6,73	β^{91}	4793,5	8,02
B^{20}	4274,0	4,35	β^{44}	13738,3	5,71	β^{68}	13653,1	6,79	β^{92}	4643,5	8,05
β^{21}	4217,4	4,42	α^{45}	17497,4	5,78	β^{69}	14557,9	6,86	β^{93}	4428,4	8,09
β^{22}	3885,3	4,46	β^{46}	20435,3	5,86	β^{70}	13970,0	6,95	β^{94}	4069,0	8,14
β^{23}	3128,3	4,52	β^{47}	19182,8	5,91	β^{71}	9792,0	7,01	β^{95}	3874,5	8,18
β^{24}	2718,7	4,61	β^{48}	19652,5	5,93	α^{72}	10769,4	7,05	β^{96}	3672,8	8,20

TAFEL IV. *Definitive Höhen der Basispunkte über dem Meere.*

		w. F.									
β^{97}	3924,8	8,23	β^{104}	2308,7	8,51	β^{111}	— 52,6	8,66	α^{118}	—612,2	9,04
α^{98}	3533,8	8,25	β^{105}	1905,6	8,54	β^{112}	—208,6	8,72	β^{119}	—631,4	9,07
β^{99}	3628,6	8,28	β^{106}	1815,5	8,55	β^{113}	—269,5	8,76	β^{120}	—676,2	9,11
α^{100}	3515,8	8,32	α^{107}	1369,6	8,56	β^{114}	—368,3	8,82	β^{121}	—577,7	9,15
α^{101}	3155,2	8,34	α^{108}	983,6	8,57	α^{115}	—404,3	8,88	β^{122}	—842,2	9,19
β^{102}	2714,1	8,41	β^{109}	612,9	8,60	β^{116}	—482,0	8,95			
α^{103}	2731,7	8,48	β^{110}	150,3	8,62	β^{117}	—551,0	9,01			

§ 41.

In der nachfolgenden Tafel V sind endlich die definitiven Höhen der gelegentlich beobachteten festen Punkte über dem Niveau des Asowschen Meeres zusammengestellt. Diese waren in der Regel bestimmt erkenntliche Zielpunkte an den Kirchen, bei denen die Operationslinie vorbeiführte. Bei der Ableitung derselben aus den Höhen der Haupt- und Basispunkte wurde das Princip der Messung aus der Mitte möglichst berücksichtigt, und aus den mehrfachen Bestimmungen der verschiedenen Beobachter das Mittel genommen. Für die w. F. der Höhen in Tafel V sind die Mittel der w. F. der gebrauchten Vergleichspunkte gesetzt worden.

Nur vier Mal beziehen sich die Höhen in Tafel V auf den Erdboden selbst 1) beim Niveau des Kagalnikflusses in Kagalnitzkaja Stanitza, 2) bei der Schwelle der Kathedrale in Stawropol, 3) beim Niveau des Tereks auf dem Wege nach Kisljar, 4) bei Tschernoi-Rynok. Die Beobachter bedauern, dass der Mangel an Zeit, bei der nothwendigen raschen Förderung der Hauptoperation, ihnen nicht öfter gestattete die grade bei den Visirpunkten an den Kirchen wünschenswerthe Reduction der Höhe auf den Erdboden durch besondere kleine Operationen auszuführen, und sie verhinderte häufiger als 2 Mal die Höhen der Wasserflächen, in deren Nähe ihre Arbeit vorbeiging, zu ermitteln.

TAFEL V. *Definitive Höhen der gelegentlich beobachteten festen Punkte über dem Asowschen Meere, in engl. Zollen.*

Bezeichnung.	Höhe über dem Meere	Vergleichspunct	Beobachter	w. F.
Kagalnik, Kirche, Kuppel, Kreuzspitze	—2126,6	P^1	Σ, S, F	0,00
Nowo-Nicolajewka, Kirche, Kuppel, Kreuzspitze	1884,8	P^6, B^5, P^5	Σ, F	1,79
Nowo-Bataisk, Kirche, Kuppel, Kreuzspitze	1402,7	B^7, P^7	Σ, F	2,20
„ „ „ Knopf	1268,6	B^7	Σ	2,36
Kagalnitzkaja-Stanitza, Kirche, Kuppel, Kreuzspitze	1857,8	P^{10}	Σ, S, F	3,43
„ „ „ „ Knopf	1791,3	P^{10}	Σ	3,43
„ „ „ Glockenth., Kreuzspitze,	1612,2	P^{10}	Σ, S	3,43
Niveau des Kagalnik-Flusses bei Kagalnitzkaja-Stanitza	750,2	Gl. Th. Spitze	S	3,43
Nowo-Jegorlik, Kirche, Kuppel, Knopf	4345,1	B^{19}, P^{21}	Σ, F	4,35

TAFEL V. *Definitive Höhen der gelegentlich beobachteten festen Punkte über dem Asowschen Meere, in engl. Zollen.*

Bezeichnung.	Höhe über dem Meere	Vergleichungspunct	Beobachter	w. F.
<i>Sredni-Jegorlik</i> , Kirche, Kuppel, Knopf.....	2956,1	β^{24}	Σ	4,61
<i>Pestschanokopsk</i> , Kirche, Glockenthurm, Kugel.....	3854,0	P^{23}	<i>F</i>	4,78
<i>Letnützkoje</i> , Kirche, Kuppel, Kugel.....	2378,7	β^{31}	Σ	4,94
" " Glockenth., Kugel, unterer Rand	2456,9	P^{32}	<i>F</i>	4,95
<i>Nowotroitzk</i> , Kirche, Kuppel, Knopf.....	6335,1	β^{41}	Σ	5,60
" " " Kugel.....	6294,1	P^{41}	<i>F</i>	5,57
<i>Stawropol</i> , Cathedrale, Kuppel, Knopf.....	21553,7	P^{48}	Σ	5,92
" " " Kreuzspitze.....	21640,0	P^{48}	Σ	5,92
" " Glockenthurm, Spitze.....	21560,3	P^{48}	Σ	5,92
" " Schwelle der Hauptthür.....	20254	P^{48}	Σ	5,92
<i>Beschpagir</i> , Kirche, Kuppel, Kugel.....	14261,8	P^{53}	<i>F</i>	6,09
<i>Alexandrow</i> , Kirche, Kuppel, Kugel.....	12566,9	β^{61}, P^{63}	Σ, F	6,50
<i>Alexandria</i> , Kirche, Kuppel, Kreuzmitte.....	10750,0	β^{71}	Σ	7,01
" " " Querstange des Kreuzes	10800,6	β^{70}	<i>F</i>	6,95
<i>Georgiewsk</i> , Cathedrale, Kuppel, Kugel.....	11954,3	α^{72}	Σ	7,05
<i>Jekaterinograd</i> , Kirche, Kuppel, Fuss des Kreuzes..	7686,6	P^{84}	<i>F</i>	7,74
<i>Mosdok</i> , Cathedrale, Kuppel, Knopf.....	5693,6	P^{89}	<i>F</i>	7,95
<i>Naur</i> , Kirche, Kuppel, Kugel.....	3954,6	P^{97}	Σ, F	8,21
<i>Niveau des Terek</i> bei der ersten Ueberfahrt nach Kisljar	— 349,0	P^{114}	Σ	8,77
<i>Kisljar</i> , Armenische Kirche, Glockenthurm, Knopf..	+1254,7	P^{112}	Σ	8,69
" " " " Kugel..	+1333,0	P^{115}	<i>F</i>	8,86
<i>Tschernoi Rynok</i> , Belvedere, Dach.....	— 306,5	P^{123}	Σ, F	9,20
" " Gesimse des ersten Stocks.....	— 761,9	P^{123}	Σ	9,20
" " Erdboden am Hause.....	— 882	P^{123}	Σ, F	9,20

IV. Ueber die von verschiedenen Punkten der Operationslinie erhaltenen Höhenbestimmungen der Hauptspitzen des Caucasus über der Meeresfläche.

§ 42.

Seite 372 bis 378 des Textes sind die Berechnungen der Höhen der Bergspitzen des Caucasus zusammengestellt. Die Bestimmung der Höhe des Beschtau bot geringe Schwierigkeiten dar, da die Operationslinie in sehr mässiger Entfernung von demselben vorbeiging, und wurde durch gleichzeitige Beobachtungen von dem Hauptpuncte P^{70} und den beiden Hülfspuncten Q und D , die von der Spitze des

Berges um 28,7, 22,9 und 12,0 Werst abstanden, ermittelt. Unter der naturgemässen Annahme eines gleichen Refractionscoefficienten für die gleichzeitigen Beobachtungen von den 3 Puncten aus, liess sich dieser Coefficient selbst nebst der Berghöhe ableiten. Bei der geringen Entfernung konnte die Unsicherheit der Berghöhe über den Beobachtungspuncten nur wenig Zolle betragen.

Im Caucasus selbst wurden die 3 höchsten Spitzen bestimmt, der Elbrus, Anonymus und der Kasbek, die von mehreren Puncten der Operationslinie sichtbar waren. Es war nemlich beobachtet worden:

		Zahl der Beob.	
der Elbrus (1) von Stawropol, Entfernung	180,3 Werst,		22
	B^{70}	« 116,1	« 5
	P^{75}	« 110,9	« 3
	P^{82}	« 136,6	« 1
	B^{85}	« 143,1	« 1
	A^{87}	« 167,4	« 3
der Anonymus (2) von P^{75}	«	99,5	« 3
	B^{80}	« 96,9	« 3
	B^{81}	« 101,5	« 1
	P^{82}	« 104,4	« 2
	B^{82}	« 105,5	« 2
der Kasbek (3) von B^{79}	«	119,9	« 1
	B^{80}	« 118,0	« 3
	B^{81}	« 116,3	« 1
	P^{82}	« 116,8	« 2
	B^{82}	« 115,5	« 2
	B^{85}	« 112,5	« 1
	A^{87}	« 108,2	« 3

Die Beobachtungen des Elbrus von Stawropol und B^{70} , so wie die des Kasbek von B^{79} aus, sind nicht mit für die Höhenbestimmung benutzt worden, weil hier die andern Bergspitzen nicht sichtbar waren. Dagegen wurden von P^{75} aus Elbrus (1) und Anonymus (2), von B^{80} aus (2) und (3), von P^{82} aus (1), (2) und (3), von B^{82} aus (2) und (3), von B^{85} aus (1) und (3), von A^{87} aus (1) und (3) gleichzeitig beobachtet, und zwar so dass von jedem Objecte mehrfache Sätze zu verschiedenen Zeiten genommen wurden.

Es war ein glücklicher Umstand, dass die Entfernung des Elbrus von den Standpuncten von 110,9 Werst in P^{75} , bis 167,4 Werst in A^{87} zunahm, und dadurch der Einfluss der Refraction auf die Höhenbestimmung, der bekanntlich nahezu dem Quadrate der Entfernung proportional ist, sich im Verhältniss von 1 : 2,3 steigerte, während derselbe Einfluss bei den wenig ungleichen Abständen der andern beiden Spitzen verhältnissmässig geringeren Veränderungen unterworfen war. Hierdurch ward es möglich durch Verbindung der auf zwei Standpuncten jedesmal gleichzeitig gemachten Beobachtungen zweier Objecte, da die Höhen

der Standpunkte als absolut genau angesehen werden konnten, aus den 4 Beobachtungen die vier unbekanntes h , h' , die beiden Höhen, und r und r' ; die beiden Refractionscoefficienten, desto vortheilhafter abzuleiten, je grösser die Veränderungen in den Verhältnissen der Entfernungen und in diesen selbst sind. Nehmen wir allgemein an, dass 2 Objecte von n Punkten aus gleichzeitig beobachtet sind, so erhalten wir nemlich $2n$ Gleichungen, in welchen $n+2$ unbekanntes Grössen sind, die beiden Höhen h , h' und die n verschiedenen Refractionscoefficienten. In unserm Falle sind eigentlich 31 Beobachtungen, oder 31 Gleichungen gegeben, welche nur 18 unbekanntes Grössen enthalten, nemlich 15 Refractionscoefficienten, für die 15 verschiedenen Beobachtungszeiten, und die 3 Höhen der Bergspitzen. Es lässt sich demnach die Methode der kleinsten Quadrate auf unser Problem anwenden, und wird zu einer vollständigen Kenntniss der Genauigkeit der Resultate führen. Der Anwendung dieser Methode stellt sich aber die grosse Zahl der unbekanntes Grössen entgegen, und so haben unsere Rechner mit Recht den Weg einer Auflösung durch allmälige Annäherung gewählt.

Die im Texte, Seite 377, gegebenen Werthe bedürfen aber einer gedoppelten Verbesserung, einmal um den definitiven Höhen der Standpunkte, wie sie in Tafel III und IV gegeben sind, zu entsprechen, zweitens weil die Seite LV erkannten Biegungscoefficienten der 3 angewandten Instrumente zu berücksichtigen waren. Ich habe Sabler veranlasst mit diesen Grundlagen die Rechnungen zu wiederholen, mit Berücksichtigung der Seite XIV angezeigten Verminderung aller linearen Grössen von $\frac{1}{46000}$. Aus dieser neuen Rechnung sind folgende Werthe hervorgegangen :

Höhen über dem schwarzen Meere.

	engl. Zoll	engl. Fuss
Beshtau	55072	4589,3
Elbrus westl. Gipfel	222167	18513,9
« oestl. Gipfel	221365	18447,2
Anonymus	203233	16935,7
Kasbek	198538	16544,8

Die hier gegebenen Höhenbestimmungen der für unsere Beobachter unzugänglichen 3 höchsten Bergspitzen haben den besondern Vorzug, dass bei ihnen keine willkürliche Annahme über die Strahlenbrechung gebraucht ist, indem diese aus den Beobachtungen selbst abgeleitet wurde. Wir sind also befugt, diese Höhen für ausgezeichnet genau zu halten, wenn sie auch nicht so sicher sein können als die von Sabler für sie berechneten w. F. von respective 4, 36, 19, 42 und 23 Zoll angeben. Bei der Entwicklung dieser Zahlen ist nämlich nur die Uebereinstimmung der Resultate und nicht die Unsicherheit aller ihrer Berechnung zum Grunde liegenden Elemente berücksichtigt. Die definitiven Werthe der Höhen finden sich in VI, auf eine umfassendere Untersuchung der irdischen Strahlenbrechung begründet.

V. Ueber die aus den Operationen abgeleiteten geographischen Ortsbestimmungen.

§ 43.

Seite 396 des Textes enthält eine Zusammenstellung der Breiten und Längen von 32 Fixpuncten, welche aus der Verbindung der trigonometrischen Messungen mit den astronomischen Bestimmungen der Polhöhen, der Azimuthe, und der für einige Puncte durch Mondsculminationen und Sternbedeckungen gefundenen Längen, so wie des chronometrisch bestimmten Unterschiedes zwischen Nowotscherkask und Kagalnik, abgeleitet worden sind. Die Richtigkeit aller aus den geodätischen Verbindungen gefolgerten Relationen ist durch die von Fuss und Sabler unabhängig nach verschiedenen Methoden geführten Rechnungen, welche zu identischen Resultaten führten, verbürgt.

Als Grundlage aller Längen diene die aus der Verbindung der mehrfachen Längenbestimmungen abgeleitete Länge von Nowotscherkask $= 57^{\circ} 45' 5''.9$ östlich von Ferro, oder $= 2^{\text{h}} 40^{\text{m}} 21^{\text{s}}.99$ östlich von Greenwich, eine Bestimmung, die auf etwa 2 Zeitsecunden genau angesehen werden konnte, Seite 382 und 395. Seit kurzem sind wir aber zum Besitz einer neuen noch sichreren Längenbestimmung dieses Ortes durch unsere Chronometerexpeditionen gelangt, welche für Nowotscherkask $0^{\text{h}} 39^{\text{m}} 5^{\text{s}}.75$ von Pulkowa, also $2^{\text{h}} 40^{\text{m}} 24^{\text{s}}.41$ von Greenwich geben, $2^{\text{s}}.42$ grösser als von Sabler angenommen ist. Bei der Zuverlässigkeit dieses neuen Werthes, dessen w. F. unter $0^{\text{s}}.5$ ist, haben wir also alle aus der Caspischen Expedition abgeleiteten Längen um $2^{\text{s}}.42$ oder $36''.3$ in Bogen zu vergrössern. Ausserdem sind noch 2 kleine Verbesserungen anzubringen, die eine wegen der nach Seite xiv erforderlichen Verminderung aller Abstände um $\frac{1}{45855}$, die 2te in Folge des bei Beschpagir und Naur nicht berücksichtigten Biegungscoefficienten des von Fuss für die Polhöhe angewandten Theodoliten. Die nachfolgende Tafel VI enthält die so berichtigten Ortsbestimmungen.

TAFEL VI. *Definitive Breiten und Längen der Fixpuncte.*

Namen der Orte	Breite	Oestliche Länge		Oestliche Länge von Ferro
		von Pulkowa in Zeit	von Greenwich	
1. Nowo-Tscherkask, Stadt, Kirche des heil. Nicolaus	47°24'34",9	0 ^h 39 ^m 55,75	2 ^h 40 ^m 24,41	57°45'42",2
2. Kagalnik, Dorf, Kirche	47 4 26,3	35 59,66	37 18,32	56 59 10,8
3. Nowo-Nicolajewka, Dorf, Kirche	46 58 37,6	37 9,43	38 28,09	57 16 37,4
4. Nowo-Bataiskaja, Dorf, Kirche	46 53 49,1	37 49,70	39 8,36	57 26 41,5
5. Kagalnitzkaja, Stanitza, Kirche	46 52 59,7	39 17,01	40 35,67	57 48 31,0
6. Nowo-Jegorlitzkoje, Stanitza, Kirche	46 33 40,2	41 19,69	42 38,35	58 19 11,3
7. Sredni-Jegorlitzkoje, Dorf, Kirche	46 22 13,8	41 57,27	43 15,93	58 28 35,0
8. Pestschanokopskoje, Dorf, Kirche	46 12 8,6	43 1,19	44 19,85	58 44 33,8
9. Letnitzkoje, Dorf, Kirche	46 0 52,3	43 42,86	45 1,52	58 54 58,8
10. Nowo-Troitzkaja, Stanitza, Kirche	45 22 47,1	44 51,57	46 10,23	59 12 9,5
11. Roshestwenskaja, Stanitza, Kirche	45 12 50,6	45 59,77	47 18,43	59 29 12,5
12. Stawropol, Stadt, neue Cathedrale (Sobor)	45 3 11,0	46 39,13	47 57,79	59 39 2,8
13. Beschpagir, Stanitza, Kirche	45 0 59,3	48 13,41	49 32,07	60 2 37,1
14. Alexandrow, Flecken, Kirche	44 42 42,1	50 43,72	52 2,38	60 40 11,7
15. Alexandria, Stanitza, Kirche	44 13 26,9	52 5,48	53 24,14	61 0 38,1
16. Georgiewsk, Stadt, Kirche	44 8 52,0	52 36,52	53 55,18	61 8 23,7
17. Jekaterinogradskaja, Stanitza, Kirche	43 45 47,2	55 36,45	56 55,11	61 53 22,6
18. Pawlodolskaja, Stanitza, Kirche	43 43 10,0	56 34,93	57 53,59	62 7 59,8
19. Mosdok, Stadt, Russische Cathedrale	43 43 58,1	57 21,65	58 40,31	62 19 40,7
20. " " Armenische Kirche	43 44 14,8	57 20,44	58 39,10	62 19 22,5
21. Koliugai, Stanitza, Kirche	43 41 40,9	58 26,57	59 45,23	62 35 54,4
22. Istscherskaja, Stanitza, Kirche	43 43 0,5	59 12,03	3 0 30,69	62 47 16,3
23. Naur, Stanitza, Kirche	43 39 5,2	59 56,39	1 15,05	62 58 21,8
24. Suchoborodinsk, Station	43 52 29,8	1 4 58,69	6 17,35	64 13 56,2
25. Kisljar, Stadt, Russische Cathedrale	43 51 0,5	5 31,61	6 50,27	64 22 10,1
26. " " Armenische Kirche	43 51 32,6	5 33,28	6 51,94	64 22 35,1
27. Tschernoi-Rynok, Dorf, Herrenhaus	44 23 13,3	4 53,61	6 12,27	64 12 40,0
28. Beschtau, Berg in der Nähe von Pätigorsk	44 6 7,5	0 50 46,53	2 52 5,19	60 40 53,8
29. Elbrus, Berg, westlicher Gipfel	43 21 29,9	48 26,29	49 44,95	60 5 50,2
30. " " östlicher Gipfel	43 21 8,2	48 28,93	49 47,59	60 6 29,9
31. Anonymus, Berg	43 3 14,4	51 32,29	52 50,95	60 52 20,2
32. Kasbek, Berg	42 42 4,4	56 45,61	58 4,27	62 10 40,1

VI. Untersuchungen über die irdische Strahlenbrechung.

§ 44.

Das von mir in § 15, Seite xxv u. f., über die irdische Strahlenbrechung gesagte darf schon für sich als ein erhebliches Resultat angesehen werden, indem es die wichtige Thatsache, dass der Refractionscoefficient μ für die Zeit der ruhigen Bilder ein nahezu unveränderlicher ist, ausser Zweifel stellt. Ich hielt es indess für geeignet, das reichhaltige Material, welches unsere Expedition in Bezug auf die irdische Strahlenbrechung darbietet, einer vollständigeren und ganz consequenten Bearbeitung zu unterwerfen. Der nachstehende Abschnitt enthält die Darstellung der Ergebnisse dieser Untersuchung. Um jedem Missverständnisse vorzubeugen, bemerke ich hier sogleich, dass ich in nachfolgendem mit ρ den jedesmaligen Winkelwerth der Refraction, mit μ den jedesmaligen sogenannten Refractionscoefficienten bezeichne, wenn $\rho = \mu C$, und C wie früher die Amplitudo, d. h. den in Bogentheilen ausgedrückten Abstand des Objects vom Instrumente, bedeutet.

§ 45.

Die beiden § 15, Seite xxv, erwähnten, nach Sabler's Untersuchungen bestimmten Coefficienten der normalen, bei vollkommener Ruhe der Bilder am Nachmittage gültigen, Refraction sind:

$$\mu = 0,0876 \mp 0,0019, \text{ aus den kurzen Entfernungen, deren Mittelwerth } C = 115,4,$$

$$\mu = 0,0884 \mp 0,0013, \text{ aus den längern " " " " } C = 230,7.$$

Diese beiden Werthe von μ sind aber ohne Berücksichtigung des Biegungscoefficienten der drei angewandten Instrumente abgeleitet worden. Aus

$$\rho = 90^\circ + \frac{C}{2} - \frac{(z+z')}{2}$$

folgt:

$$d\rho = -\frac{1}{2} (dz + dz'); \text{ und } d\mu = \frac{d\rho}{C} = -\frac{dz + dz'}{2C}.$$

Statt dz und dz' sind hier die Seite LV bestimmten Biegungscoefficienten (Verbesserungen der beobachteten Zenithdistanzen) zu setzen, nämlich:

$$b = +1,05 \mp 0,30 \text{ für } \Sigma; b' = -2,18 \mp 0,62 \text{ für } S; \text{ und } b'' = -6,62 \mp 1,20 \text{ für } F.$$

Bei der ersten Bestimmung aus den kurzen Distanzen ist z die von Σ am Hauptsignale beobachtete Zenithdistanz, folglich $dz = +1,05 \mp 0,30$; und z' das Mittel der von S und F an den Basispunkten beobachteten Zenithdistanzen, also $dz' = -4,40 \mp 0,68$; es wird also:

$$-\frac{1}{2} (dz + dz') = +1,67 \mp 0,37, \text{ und hiernach } d\mu = \frac{+1,67 \mp 0,37}{115,4} = +0,0145 \pm 0,0032;$$

$$\mu = 0,1021 \mp 0,0037.$$

Mit noch grösserer Zuverlässigkeit ist der zweite Coefficient $\mu = 0,0884$ bestimmt worden, der auf Sabler's mit dem vollkommeneren Universalinstrumente an jedem Hauptpunkte beobachteten Zenith-

distanzen der benachbarten Hauptsignale beruht. Um mich von der Richtigkeit seiner Ableitung zu überzeugen, habe ich das ganze Material der reciproken, um einen Tag von einander abliegenden, an je zwei benachbarten Hauptpunkten angestellten Beobachtungen einer neuen Berechnung unterworfen, mit Berücksichtigung aller Entfernungen und relativen Gewichte. Die reciproken Beobachtungen in jedem P^n und P^{n+1} liefern nämlich zwei Gleichungen, die als Unbekannte μ und den Höhenunterschied u enthalten, und folglich nach Eliminirung von u sofort zur Kenntniss von μ führen. Durch diese neue Rechnung erhielt ich, aus den 115 verschiedenen Bestimmungen, $\mu = 0,0872 \mp 0,0013$. Dieser Werth stimmt mit dem von Sabler selbst gefundenen auf 0,0012 überein, und hat genau den von ihm angegebenen wahrscheinlichen Fehler. Um hieran die Verbesserung für die Biegung anzubringen, ist $dz = dz' = +1,05$, und wir erhalten $d\varrho = -1,05 \mp 0,30$; folglich $d\mu = -\frac{1,05 \mp 0,30}{230,7} = -0,0046 \mp 0,0013$; und hiemit

$$\mu = 0,0826 \pm 0,0018.$$

Beide μ beziehen sich auf eine Barometerhöhe von $B = 29,385$ engl. Zollen, Temp. des Quecksilbers $= 0$, und auf eine Lufttemperatur $T = +15^{\circ},9$ R., welche Grössen die Mittel der gleichzeitig an den verschiedenen Standpunkten beobachteten Angaben des Barometers und des Thermometers sind. Wenn wir beide auf dem späterhin erörterten Wege auf ein mittleres $b = 29,00$ und $t = +16^{\circ},0$ reduciren, so erhalten wir für den mittleren Refractionscoefficienten λ die Werthe :

	$c =$	Mittl. Höhe der Gesichtslinie
$\lambda = 0,0814 \mp 0,0018$	230,7	42 Fuss
$\lambda = 0,1006 \mp 0,0037$	115,4	16 "

Ich habe hier die mittlere Höhe der Gesichtslinie über dem Erdboden hinzugefügt, die späterhin zu beachten sein wird. Sie ist für jede der Gruppen aus einer sorgfältigen Untersuchung der Höhen der Signale und der Instrumente über dem Boden, der Höhen der Kurgane, worauf die Hauptsignale standen, und der Höhenunterschiede zwischen den Haupt- und Basissignalen abgeleitet worden, und als Mittelwerth auf etwa 2 bis 3 Fuss sicher.

§ 46.

Wenn sich aus den reciproken gleichzeitigen Beobachtungen an den Hauptpunkten P und den Basispunkten B , der Kleinheit der Refraction wegen, kein so genauer Werth des normalen Coefficienten μ ableiten lässt, wie aus grösseren Entfernungen, so führen sie dagegen mit Sicherheit zur Erkenntniss einer eigenthümlichen Thatsache. An je 3 benachbarten Punkten, B^{n-1} , P^n und B^n , beobachteten S , Σ und F gleichzeitig, jeden Nachmittag, die gegenseitigen Zenithdistanzen, so dass zwischen den ersten und letzten Zenithdistanzen ein Zeitraum von 1 Stunde bis 1 St. 50^m lag. In diesem Intervalle waren anfangs die Bilder *negativ unruhig*, dann trat die *Ruhe* derselben ein, und am Schluss waren die Bilder jedesmal *positiv unruhig*. Alle 3 Beobachter fanden fast ohne Ausnahme eine mit der Zeit fortgehende Abnahme der Zenithdistanzen, also eine Zunahme der Refraction, vom Anfange bis zum Schluss der Beobachtungen

jedes Tages. Die Tagebücher des Jahres 1837 bieten uns, vom 5. April bis 25. October, 107 gleichzeitig von Fuss und Sabler bestimmte Veränderungen der Refraction, und 108 von Sawitsch und Sabler erhaltene; Werthe, die durch die Veränderungen der Zenithdistanzen erkannt wurden, also von den Biegungscoefficienten der Instrumente unabhängig sind. Vereinigen wir die Bestimmungen von Fuss und Sawitsch, und ebenso die beiden mit ihnen correspondirenden Reihen Sabler's zu einem mittleren Resultate, so finden wir:

Aus 215 Bestimmungen für 84 Minuten Zwischenzeit

die von Σ beobachtete mittlere Zunahme der Refraction $d\rho = 14''41$ mit dem w. F. $\mp 0''51$,

“ “ F u. S “ “ “ “ “ “ $d\rho' = 20,70$ “ “ “ “ $\mp 0,66$.

Der geringe w. F. beider Werthe beweist, dass ihr Unterschied $d\rho' - d\rho = 6''29$ eine mit Sicherheit bestimmte Grösse, und nicht ein zufälliges Ergebniss der Unsicherheit der Bestimmungen ist, und wir haben als Mittel $d\rho' = 1,404 d\rho$, d. h. die gleichzeitige Veränderung der Refraction war an den Basispunkten fast um die Hälfte grösser als an den Hauptsignalen. Nahezu lagen der Anfang und das Ende der Messungen jedes Tages gleichweit nach beiden Seiten von der Zeit der Ruhe der Bilder. Nehmen wir für diese, aus § 45, den Refractionscoefficienten $\mu = 0,1021$, so erhalten wir, da der Abstand C im Mittel $115''4$ beträgt, für diese Zeit die Refraction $11''78$, und also:

	Für die Hauptpunkte		Für die Basispunkte	
42 ^m vor der Ruhe der Bilder	$\rho = 4''58$	$\mu = 0,0397$	$\rho' = 1''43$	$\mu' = 0,0124$
Zur Zeit “ “ “ “	$\rho = 11,78$	$\mu = 0,1021$	$\rho' = 11,78$	$\mu' = 0,1021$
42 ^m nach “ “ “ “	$\rho = 18,99$	$\mu = 0,1646$	$\rho' = 22,13$	$\mu' = 0,1918$

Wir kommen durch diese Zahlen zu folgendem Satze:

die Curve, welche der Lichtstrahl bei den nicht normalen Refractionen durchlief, war eine gegen die Chorde unsymmetrische. Der Winkel zwischen der Chorde und der Tangente der Curve war an den Hauptpunkten geringeren, an den Basispunkten grösseren Veränderungen in einem bestimmten Sinne unterworfen.

Sabler hat S. 250 u. f. des Textes auf diesen Satz schon aufmerksam gemacht, und dessen Erklärung mit den Worten gegeben: *Im Durchschnitt hatten die Signale eine etwas höhere Lage als die Basispunkte, daher findet man im Journale die Aenderungen der Zenithdistanzen bei letzteren im Durchschnitt auch grösser als bei ersteren.* In der That ist die Höhe des Auges des Beobachters am Hauptsignale, das sich auf einem ohngefähr 15 Fuss hohen Kurgane befand, etwa 20 Fuss über dem Grunde gewesen, während das des Beobachters am Basispunkte nur um 5 Fuss vom umliegenden Boden abstand. Aus dieser Ursache mussten die durch den Boden in der Strahlenbrechung hervorgebrachten Störungen an den Basispunkten die grösseren sein, und zwar in beiden Fällen, wenn diese Störungen negativ und wenn sie positiv wirkten. Jede solche Störung ist eine von der Oertlichkeit bedingte, und entzieht sich also fast ganz der Analyse und der Rechnung. Wollen wir daher irgend einen Schritt in der Erkenntniss der

irdischen Strahlenbrechung vorwärts machen, so müssen wir das ungestörte Phänomen erforschen, d. h. diejenigen Strahlenbrechungen untersuchen, bei denen durch die Ruhe der Bilder die Abwesenheit der Störung angezeigt worden ist, und die als normale Strahlenbrechungen betrachtet werden dürfen. Es scheint mir, dass unsere Kenntniss der irdischen Strahlenbrechung gerade deswegen so wenig gefördert ist, weil man das in der Ruhe der Bilder vorhandene Kriterium der normalen Refraction nicht erkannt hatte, und sich an die Erklärung der gestörten Erscheinungen früher wagte, als man die Gesetze der ungestörten ermittelt hatte.

§ 47.

Den wichtigsten Beitrag zur Kenntniss der irdischen Strahlenbrechung und deren Veränderungen liefern uns nun die von 11 Standpuncten der Operationslinie und von 2 Hülfpuncten aus gemessenen Zenithdistanzen der 5 Bergspitzen: Beschtau, Elbrus Westkuppe, Elbrus Ostkuppe, Kasbek und Anonymus. Es sind von unsern Astronomen die Höhen dieser Spitzen über dem Meere, mit Eliminirung der Refraction, aus denjenigen ausgewählten Beobachtungen abgeleitet worden, welche gleichzeitige Zenithdistanzen zweier in bedeutend ungleicher Entfernung gesehenen Bergspitzen darbieten; wobei die Höhen der Standpuncte, die wirklich bis auf wenige Zolle sicher sind, als fehlerfrei angesehen werden durften. Umgekehrt können wir jetzt die gefundenen Berghöhen zur Bestimmung der Refraction für jede einzelne Beobachtung ohne Ausnahme verwenden, und so zu genäherten Werthen der jedesmaligen Refraction gelangen, die nur noch denjenigen Unsicherheiten unterliegen, die den Fehlern der vorausgesetzten Berghöhen entsprechen. Berechnen wir, aus dem Höhenunterschiede des Berges und des Standpunctes $B - S = u$, diejenige Zenithdistanz z' , die stattfinden würde, wenn die Wirkung der Refraction Null wäre, so erhalten wir, durch Vergleichung dieses z' mit dem beobachteten z , sofort den Winkelwerth der Refraction $\rho = (z' - z)$.

Ist u der Höhenunterschied, C , wie immer, der in Secunden ausgedrückte geodätische Bogen zwischen dem Standpunct und dem Berge, und D' die diesem zugehörigen Chorde, in der Höhe des Standpunctes genommen, so findet sich z' am einfachsten, unter Benutzung der Gaussischen Logarithmen, durch folgende Formeln:

$$u' = u \cos \frac{1}{2} C; \quad d = u \sin \frac{1}{2} C,$$

$$\text{tang } q = u' : (D + d); \quad z' = 90^\circ + \frac{1}{2} C - q.$$

Hiermit wird:

$$\rho = z' - z, \text{ die beobachtete Refraction,}$$

$$\mu = \frac{\rho}{C}, \text{ der beobachtete Refractionscoefficient.}$$

Wenn wir für die Höhe des Berges H eine Verbesserung dH annehmen, so wird $du = dH$, $dz' = -\frac{du}{D' \sin 1''}$ und $d\mu = \frac{-du}{C \cdot D' \sin 1''}$.

§ 48.

Die nachfolgende Tafel enthält alle zur Berechnung der z' erforderlichen Hilfsgrößen, diese z' selbst, berechnet aus den von Sabler, Seite lxy, bestimmten Höhen der Bergspitzen über dem Meere, nämlich Beschtau = 55072, Elbrus W = 222167, Elbrus O = 221365, Kasbek = 198538 und Anonymus = 203233 engl. Zoll, und den definitiven Höhen der Instrumente an den Standpuncten.

Standpunct	Beobachteter Berg	Log. D' in engl. Zollen	Log. $D' \cdot \sin 1''$	Amplitudo C	Log. C	Höhe des Instruments über d. Meere in engl. Zollen	Höhe des Berges über dem Instrument in engl. Zollen $u =$	Berechnete Zenithdistanz $z' =$
P^{70}	Beschtau	6,080845	0,76642	989",2	2,99529	15346	39726	88° 14' 55",3
Q	Beschtau	5,982632	0,66821	788,5	2,89680	17671	37401	87 52 49,5
D	Beschtau	5,704786	0,39036	415,6	2,61868	18047	37025	85 52 44,8
B^{70}	Beschtau	6,085853	0,77143	1000,6	3,00026	13886	41186	88 12 12,0
	Elbrus W	6,688519	1,37409	4012,8	3,60345		208281	88 6 54,4
	Elbrus O	6,687847	1,37342	4007,0	3,60282		207479	88 7 11,9
P^{75}	Beschtau	6,324323	1,00990	1731,4	3,23840	12777 12760	42295 Σ 42312 FS	89 5 32 3 30,7
	Elbrus W	6,669313	1,35489	3834,6	3,58372		209390 Σ 209407 FS	87 57 59,1 58,5
	Elbrus O	6,666933	1,35251	3813,3	3,58130		208588 Σ 208605 FS	87 57 33,4 32,7
	Anonymus	6,621176	1,30675	3439,2	3,53646		190456 Σ 190473 FS	87 52 12,0 11,1
B^{79}	Beschtau	6,514646	1,20022	2684,4	3,42884	9405	45667	89 34 22,8
	Kasbek	6,702196	1,38777	4143,9	3,61741		189133	88 25 34,3
B^{80}	Beschtau	6,546028	1,23160	2885,5	3,46022	8649	46423	89 38 39,8
	Anonymus	6,609770	1,29534	3346,7	3,52462		194584	87 43 47,5
	Kasbek	6,691420	1,37700	4042,8	3,60668		189889	88 20 57,8
B^{81}	Anonymus	6,629657	1,31523	3502,5	3,54438	7720	195513	87 51 40,7
	Kasbek	6,688979	1,37455	4020,0	3,60423		190818	88 19 22,4
P^{82}	Anonymus	6,641859	1,32743	3602,6	3,55661	7567	195666	87 56 45,3
	Kasbek	6,691038	1,37661	4039,5	3,60633		190971	88 20 3,8
	Elbrus W	6,759794	1,44537	4720,3	3,67397		214600	88 31 11,6
	Elbrus O	6,756922	1,44250	4688,7	3,67105		213798	88 30 33,8
B^{82}	Anonymus	6,646447	1,33202	3645,3	3,56173	7114	196119	87 58 22,0
	Kasbek	6,685870	1,37144	3991,7	3,60116		191424	88 17 44,7
B^{83}	Kasbek	6,674160	1,35974	3895,5	3,59056	6860	191678	88 13 4,0
	Elbrus O	6,778918	1,46449	4931,5	3,69298		214505	88 38 31,4
A^{87}	Kasbek	6,657472	1,34305	3740,2	3,57289	5371	193167	88 5 11,6
	Elbrus W	6,847882	1,53346	5779,9	3,76192		216796	89 2 28,0
	Elbrus O	6,845257	1,53083	5746,3	3,75939		215994	89 1 56,4
Stawropol	Elbrus W	6,878202	1,56378	6217,8	3,79364	20389	201778	89 20 3,8
	Elbrus O	6,880370	1,56594	6248,4	3,79577		200976	89 21 8,2

§ 49.

Die an den 13 Standpunkten beobachteten Zenithdistanzen der 5 Bergspitzen finden sich Seite 174 bis 178 des Textes, bedürfen aber noch, wegen der Biegungscoefficienten der 3 Instrumente, der Verbesserungen $+1''1$ für Sabler's Beobachtungen, $-2''2$ für Sawitsch und $-6''6$ für Fuss. Nachdem diese angebracht sind, werden die so erhaltenen z , von den in § 48 gegebenen zugehörigen z' abgezogen, sofort die beobachtete Refraction ρ geben, und durch $\frac{\rho}{C}$ den beobachteten Refractionscoefficienten μ . So ist zum Beispiel für p^{70} Beschtau in § 48, $z' = 88^{\circ}14'55''3$, und Seite 175, für $3^h 47^m, 5$ am 13. Juli, das beobachtete $z = 88^{\circ}13'47''9 - 2''2 = 88^{\circ}13'45''7$; woraus $\rho = 1'9''6 = 69''6$, und, durch Division mit $C = 989''2$, $\mu = 0,0704$ folgt. Dies sind die Zahlen der ersten Zeile der nachfolgenden Zusammenstellung. Auf gleiche Weise sind die übrigen abgeleitet. B ist die Angabe des Barometers in englischen Zollen, die Temperatur des Quecksilbers auf 0° gebracht, und T die beobachtete Lufttemperatur nach der Réaumur'schen Scale.

Werthe der irdischen Strahlenbrechung, abgeleitet aus den beobachteten Zenithdistanzen, den definitiven Höhen der Standpunkte und den von SABLER bestimmten Höhen der Berge, Seite LXV.

1. Standpunct p^{70} . 1837 Juli 13.

Beobachter	Wahre Zeit	Bild	B	T	Beschtau	
					ρ	μ
S	$3^h 47^m$	ruhig	$28,94$	$+17,6$	$69''6$	0,0704
S	4 37	ruhig	$28,94$	$+16,0$	$71,9$	0,0727

2. Standpunct q . 1837 Juli 13.

Beobachter	Wahre Zeit	Bild	B	T	Beschtau	
					ρ	μ
Σ	$4^h 37^m$	ruhig	$28,65$	$+15,7$	$60''1$	0,0762

3. Standpunct d . 1837 Juli 13.

Beobachter	Wahre Zeit	Bild	B	T	Beschtau	
					ρ	μ
F	$4^h 37^m$	ruhig	$28,62$	$+15,7$	$30''3$	0,0729

4. Standpunct b^{70} . 1837 Juli 14.

Beobachter	Wahre Zeit	Bild	B	T	Beschtau		Elbrus O		Elbrus W	
					ρ	μ	ρ	μ	ρ	μ
S	$17^h 40^m$	wenig unruhig	$28,72$	$+15,0$	$98''1$	$0,0980^*$	$300''5$	$0,0750$	$298''8$	$0,0745$
F	17 49		$28,72$	$+15,1$	$104,5$	$0,1044^*$	$312,6$	$0,0780$	$305,2$	$0,0761$
Σ	18 3	etwas wallend	$28,71$	$+15,4$	$103,6$	$0,1035^*$	$296,3$	$0,0739$	$298,1$	$0,0743$
F	18 32		$28,69$	$+15,9$	$95,1$	$0,0951^*$	$300,6$	$0,0750$	$299,4$	$0,0746$
S	21 40	unruhig	$28,58$	$+19,0$	$66,6$	$0,0666^*$	$281,2$	$0,0706^*$	$280,2$	$0,0698^*$

5. Standpunkt p^{75} . 1837 August 15.

Beob- achter	Wahre Zeit	Bild	Beschtau				Elbrus O		Elbrus W		Anonymus	
			B	T	ρ	μ	ρ	μ	ρ	μ	ρ	μ
F	17 ^h 38 ^m	unr. \odot Aufg.	28,92	+13,5	239,6	0,1384*			297,5	0,0776		
F	18 22	etwas unruhig	28,92	+14,0	196,1	0,1132*			295,2	0,0770		
S	18 43	etwas unruhig	28,92	+14,5	174,9	0,1010*	282,6	0,0741	286,7	0,0748		
Σ	18 54	{ etw. unr. für B ruh. für E u. A	28,92	+14,8	164,7	0,0951*	274,7	0,0720	275,6	0,0719	247,0	0,0718
Σ	20 25	unruhig	28,92	+18,0	108,8	0,0628*	251,3	0,0659*	253,6	0,0661*	225,7	0,0656*
S	20 30	unruhig	28,92	+18,2	111,3	0,0643*	247,3	0,0648*	256,0	0,0668*	226,4	0,0658*
F	21 17	unruhig	28,91	+23,0	86,9	0,0502*			241,6	0,0630*	226,7	0,0659*

6. Standpunkt b^{79} . 1837 August 21.

Beob- achter	Wahre Zeit	Bild	Beschtau				Kasbek	
			B	T	ρ	μ	ρ	μ
S	6 ^h 30 ^m	ruhig	29,13	+17,8	203,4	0,0758	288,2	0,0695

7. Standpunkt b^{80} . 1837 August 21.

Beob- achter	Wahre Zeit	Bild	Beschtau				Anonymus		Kasbek	
			B	T	ρ	μ	ρ	μ	ρ	μ
F	18 ^h 43 ^m		29,20	+12,0	231,6	0,0803*	272,1	0,0813*	340,6	0,0843*
F	19 30	ziemlich ruhig	29,19	+14,5	213,5	0,0740	262,1	0,0783	319,5	0,0790
S	19 30	ziemlich ruhig	29,19	+14,5	219,3	0,0760	254,3	0,0760	307,5	0,0760
S	20 7	etwas unruhig	29,19	+16,5	205,2	0,0711			298,0	0,0737

8. Standpunkt b^{81} . 1837 August 23.

Beob- achter	Wahre Zeit	Bild	Anonymus				Kasbek	
			B	T	ρ	μ	ρ	μ
S	4 ^h 38 ^m	ruhig	29,11	+23,5			273,0	0,0679
S	5 28	ruhig	29,11	+22,2			275,9	0,0686
S	6 10	zieml. ruh.	29,11	+20,8	241,1	0,0688	286,0	0,0711

9. Standpunkt p^{82} . 1837 August 23.

Beob- achter	Wahre Zeit	Bild	Elbrus O				Elbrus W		Anonymus		Kasbek	
			B	T	ρ	μ	ρ	μ	ρ	μ	ρ	μ
Σ	4 ^h 12 ^m	fast ruhig	29,14	+23,2					236,4	0,0656	264,9	0,0655
Σ	6 11	ruhig	29,15	+19,3	317,2	0,0676	319,2	0,0676	248,6	0,0690	278,5	0,0689

10. Standpunkt b^{82} . 1837 August 23.

Beob- achter	Wahre Zeit	Bild	Anonymus				Kasbek	
			B	T	ρ	μ	ρ	μ
F	4 ^h 27 ^m	ruhig	29,20	+22,0	247,1	0,0678	262,8	0,0658
F	5 27	ruhig	29,20	+19,6	260,2	0,0714	272,2	0,0682

11. Standpunct b^{85} . 1837 August 24.

Beob- achter	Wahre Zeit	Bild	B	T	Elbrus O		Kasbek	
					ρ	μ	ρ	μ
S	20 ^h 0 ^m	ruhig	29,25	+19,0	377,2	0,0765*	290,4	0,0746

12. Standpunct a^{87} . 1837 August 29.

Beob- achter	Wahre Zeit	Bild	B	T	Elbrus O		Elbrus W		Kasbek	
					ρ	μ	ρ	μ	ρ	μ
F	5 ^h 29 ^m	ruhig	29,38	+20,0			399,6	0,0691	258,6	0,0691
F	6 2	ruhig	29,38	+18,7			418,9	0,0725	269,9	0,0722
S	6 9	ziemlich ruhig	29,39	+19,0	400,7	0,0697	416,0	0,0720	265,1	0,0709

13. Standpunct Stawropol.

Datum	Beob- achter	Wahre Zeit	B	T	Elbrus O		Elbrus W	
					ρ	μ	ρ	μ
1836 Dec. 24	S	20 ^h 15 ^m	28,30	+ 4,6	514,2	0,0823	499,3	0,0803
" " 25	S	0 1	28,27	+ 5,5	462,7	0,0740	452,0	0,0727
" " "	S	4 0	28,27	+ 4,6	491,0	0,0786	472,2	0,0759
1837 Jan. 7	S	21 0	28,65	- 7,0	666,4	0,1066	667,9	0,1074
" " "	S	21 30	28,65	- 7,0	656,0	0,1050	650,5	0,1046
" " 8	S	0 30	28,62	- 3,3	612,0	0,0980	597,9	0,0962
" " "	S	3 50	28,55	- 2,7	584,2	0,0935	585,2	0,0941
" " "	S	23 40	28,55	- 1,7	568,0	0,0909	551,9	0,0888
" " 9	S	20 25	28,46	- 0,3	536,7	0,0859	521,9	0,0840
" " "	S	21 20	28,46	+ 0,3	537,0	0,0859	522,4	0,0840
" " 10	S	20 28	28,37	+ 0,3	536,0	0,0858	519,9	0,0836
" " 11	S	4 10	28,32	+ 0,2	521,0	0,0834	519,9	0,0836
" " 12	F	0 32	28,22	- 0,2	577,2	0,0924	578,6	0,0931
" " 14	S	1 14	28,37	- 1,0	543,0	0,0869	533,9	0,0859
" " 30	S	0 45	28,55	-11,0	655,0	0,1048	657,4	0,1057
" " 31	F	1 10	28,42	- 6,0	664,2	0,1063	655,7	0,1054
" Febr. 21	S	20 48	28,40	- 4,5	617,0	0,0987	596,2	0,0959
" " 22	S	20 25	28,31	- 3,0	657,0	0,1051	646,9	0,1040
" " 26	S	23 45	28,40	- 2,0	553,0	0,0885	538,9	0,0867
" " 27	S	5 16	28,47	- 2,5	598,0	0,0957	592,9	0,0954
" " "	S	19 55	28,55	-10,0	707,0	0,1131	674,9	0,1085
		Mittel	28,436	- 2,224		0,09340		0,09218

k*

§ 50.

Anmerkungen zur Zusammenstellung der beobachteten Refractionen in § 49.

Anmerkung zu 1. 2. und 3. Die Beobachtungen des Beschtai am 13. Juli sind die einzigen, welche bei bewölktem Himmel angestellt sind. Für alle übrigen Punkte 4 bis 13 fand wolkenfreier Himmel und Sonnenschein statt, als unerlässliche Bedingung der Sichtbarkeit der hohen Berggipfel, die bedeutend über die Wolkenhöhe hinausragten.

Anmerkung zu 4. und 5. Diese Morgenbeobachtungen sind von besonderem Interesse in Bezug auf die Veränderung der Strahlenbrechung bei den in so verschiedenen Entfernungen befindlichen Bergen. Am 14. Juli geht die Sonne unter $44^{\circ}15'$ Breite ungefähr um 16^h24^m wahrer Zeit auf. Die ersten Beobachtungen in b^{70} um 17^h40^m sind also 1^h16^m nach Sonnenaufgang gemacht. Das Bild der 3 Objecte ist noch nicht ruhig, ändert aber während einer Stunde seinen Zustand wenig, auch schwankt die Strahlenbrechung nur geringe. Nehmen wir aus den 4 Beobachtungen von 17^h40^m bis 18^h32^m das Mittel, so ergibt sich:

	Beschtai	Elbrus O	Elbrus W	
um $18^h 1^m$, $\rho =$	100,3	302,5	300,4	Bild etwas unruhig.
und später um 21^h40^m , $\rho =$	66,6	281,2	289,2	« unruhig.
Veränderung $d\rho =$	-33,7	-21,3	-20,2	

Die Abnahme der Refraction, in 3 Stunden 39^m , ist also hier für den nähern Beschtai sogar etwas grösser als für die in 4facher Entfernung liegenden Spitzen des Elbrus. Beide Berge hatten fast genau dieselbe Zenithdistanz, $88^{\circ}12'$ und $88^{\circ}6'$; es folgt also, dass die ganze Veränderung der Refraction in der Luftschicht zwischen dem Beobachtungspuncte und der Höhe des Beschtai vorgegangen ist; und sie war für diesen Berg deswegen eine grössere, weil der Lichtstrahl nach ihm näher über ein ansteigendes flaches Land ging. Die eigentliche Ruhe der Bilder ist erst zwischen 18^h32^m und 21^h40^m eingetreten. Leider fehlen für dies wichtigste Moment die Beobachtungen. Noch auffallender sind die Beobachtungen in p^{75} am 15. August. Sie beginnen um 17^h38^m mit Sonnenaufgang, und gehen bis 21^h17^m . Für diese äussersten Zeiten finden wir:

	Beschtai	Elbrus W	
um 17^h38^m , $\rho =$	239,6	297,5	Bild unruhig
um 21^h17^m , $\rho =$	86,9	241,6	« «
Veränderung $d\rho =$	-152,7	-55,9	

Ohnerachtet der doppelten Entfernung des Elbrus, ist für diesen Berg $d\rho$ nur ein Drittheil des für den Beschtai gefundenen $d\rho$. Hier waren offenbar Localeinwirkungen. Der Beschtai erhob sich nur $0^{\circ}55'$ über die Horizontalfläche, und der Elbrus $2^{\circ}2'$, ausserdem aber streifte der Lichtstrahl zum Beschtai dicht über ein langes aufsteigendes Plateau, während die Gesichtslinie zu den andern Bergen theils über ein Thal ging, theils sich auch des grösseren Höhenwinkels wegen rascher vom Boden entfernte. Die für 18^h54^m von Sabler gegebene Charakteristik *ruhig* bezieht sich auch nur auf den

Elbrus und Anonymus, indem für dieselbe Zeit dem nähern Beschtau noch die Bezeichnung *etwas unruhig* gegeben wird. Die eigentliche Ruhe für Beschtau ist offenbar erst nach $18^{\text{h}}54^{\text{m}}$ eingetreten, war aber um $20^{\text{h}}25^{\text{m}}$ für alle 4 Bergspitzen schon vorbei.

Anmerkung zu 11. Die Beobachtung von Elbrus O ist von der Untersuchung ausgeschlossen worden, weil in Bezug auf Elbrus W ausdrücklich gesagt ist, dass die Bergspitze in Wolken gehüllt war, ein Umstand, der auch Elbrus O verdächtigt.

Anmerkung zu 13. Von den 21 während 2 Monaten in Stawropol von Sawitsch und Fuss beobachteten Zenithdistanzen beider Kuppen des Elbrus, sind die 3 ersten im December zu einer Zeit angestellt, als die Gegend um Stawropol und das zum Gebirge hin liegende Thal noch ohne Schneedecke war. Die übrigen 18 Messungen, vom 7. Januar bis zum 27. Februar, sind vollkommene Winterbeobachtungen, da die ganze Gegend von Stawropol bis zum Gebirge damals mit Schnee bedeckt war. Das Thermometer war jetzt fast immer unter Null, und erhob sich nur einige Male bei Tage bis auf wenige Zehnthelle über den Gefrierpunct. Bei den Stawropolschen Beobachtungen haben die Beobachter keine Characteristik des Bildes gegeben, eine Angabe, deren Bedeutsamkeit erst bei der Wiederaufnahme der Arbeiten im Felde, im April 1837, vollständig erkannt wurde. Wir sind aber berechtigt anzunehmen, dass bei allen diesen Beobachtungen das Bild des Berges nicht weit von der Ruhe abwar, weil die Sichtbarkeit des Berges bei jedem starken Wallen des Bildes aufgehört haben würde, da er in der grossen Entfernung von $C = 1^{\circ}44' = 180$ Werst, nur wie ein schwaches über dem Horizonte hervorragendes Wölkchen erschien. Auch können wir deswegen das Mittel der Stawropolschen Messungen als der Ruhe der Bilder nahezu entsprechend ansehen, weil die Mittel der Zeiten der Beobachtungen, Vormittags und Nachmittags besonders genommen, sehr nahe auf die Zeit der Ruhe der Bilder fallen, die in der Regel um 0,7 des halben Tagebogens vom Mittage absteht. Freilich müssen wir bei den einzelnen Messungen auf grössere Abweichungen gefasst sein, als bei den Beobachtungen, wo die Ruhe der Bilder als vorhanden angezeigt ist. Dass aus einer Entfernung von 180 Werst keine sichere absolute Höhenbestimmung des Berges möglich ist, sieht man leicht ein. Dagegen aber mussten die Beobachtungen zu einem sicherern Werthe des winterlichen Refractionscoefficienten führen und zugleich zu einer guten Bestimmung des Höhenunterschiedes beider Kuppen. Ich finde im Mittel aus den 21 gleichzeitigen Messungen den Höhenunterschied beider Spitzen E. W. — E. O. = 523 Zoll mit dem w. F. = ∓ 47 Zoll, abgeleitet aus dem w. F. von 216 Zoll für ein einzelnes E. W. — E. O., der einer Unsicherheit von $5''9$ in den einzelnen Unterschieden der Zenithdistanzen, oder von $5''9 : \sqrt{2} = 4''1$ in der Zenithdistanz einer einzelnen Kuppe entspricht. Der Unterschied E. W. — E. O. ist aber aus den nähergelegenen Puncten der Operationslinie zu 802 Zoll mit noch erheblich grösserer Sicherheit ermittelt worden, Seite LXV, so dass sich hier eine Abweichung von 279 Zoll = 23,3 Fuss ausspricht. Es ist indess nicht schwer, die Ursache dieser Abweichung nachzuweisen. Unsere Beobachter sahen den Elbrus zuerst aus Stawropol in ungeheurer Entfernung. Späterhin auf der Operationslinie, als sie ihm bedeutend näher gerückt waren, erkannten sie sofort, bei der ersten Messung in b^{70} , auf dem äussersten westlichen Rande der Westkuppe ein

hervorragendes Felshorn, eine Zacke, und massen von nun an immer die Höhe der äussersten Spitze dieser Zacke, als des erhabensten Punctes der Westkuppe. Da sie in Stawropol von dem Vorhandensein dieses Horns keine Ahnung hatten so beziehen sich die Höhenmessungen daselbst auf die allgemeine obere Begränzung des Berges, nicht auf die Spitze des Horns. Sabler erinnert sich sehr bestimmt, dass er in b^{70} die Spitze des Horns, nach dem Abstand der parallelen Horizontalfäden seines Instruments, um reichlich 10 Secunden über der übrigen Oberfläche der Kuppe erhaben schätzte. Aus dieser Winkelgrösse findet sich die senkrechte Höhe des Horns, $10 \cdot D' \sin 1'' = 237$ Zoll. Der nachbleibende Unterschied von 42 Zoll zwischen 279 und 237 Zoll liegt schon innerhalb des w. F. der ersten Zahl. Wir sehen nun auch, dass E. W. in fast allen einzelnen Fällen einen kleineren Refractionscoefficienten μ giebt als E. O., so dass der Unterschied im Mittel $0,09340 - 0,09218 = 0,00122$ ist, der ganz genau dem Höhenfehler von 279 Zoll für E. W. entspricht. Es ist hieraus ersichtlich, dass von den Stawropolschen Beobachtungen nur die der Ostkuppe, in Verbindung mit den Beobachtungen an den andern Standpuncten, zu einer Untersuchung über die Refraction benutzt werden dürfen.

§ 51.

Die Aufgabe, welche ich mir jetzt stellte, war folgende mehrfache :

- 1) aus den vorliegenden Beobachtungen zu untersuchen, ob die Refraction bei ruhigen Bildern sich wirklich als eine lineare Function der Amplitudo ansehen lasse, unabhängig von der Höhe des Objects über dem Standpuncte;
- 2) zu bestimmen, in welcher Art der Werth des normalen Refractionscoefficienten von B und T , den Angaben des Barometers und des Thermometers am Beobachtungsorte, abhängig ist, und sich also durch eine Formel ausdrücken lässt, die B und T als variable Grössen enthält;
- 3) zu ermitteln, welche Zuverlässigkeit der nach der gefundenen Formel berechneten Refraction für den jedesmaligen Fall der Anwendung zuzuschreiben sei; und hieraus
- 4) abzuleiten, welche Genauigkeit den allendlich erhaltenen Höhen der Bergspitzen des Caucasus zuzuschreiben sei.

Das Material zur Beantwortung dieser Fragen ist in den Ergebnissen aus dem eigentlichen Nivellement zwischen beiden Meeren, verbunden mit den von 13 Puncten aus beobachteten Messungen der 5 Bergspitzen enthalten. § 49 liefert uns 71 beobachtete μ , bei denen die Ruhe der Bilder wenigstens nahezu stattfand, und zwar :

- 1ste Gruppe, 27 im Sommer erhaltene nachmittägige Werthe von μ , bei welchen das Bild 20 Mal das Praedicat *ruhig*, 2 Mal *fast ruhig*, und 5 Mal *ziemlich ruhig* hatte, und die Lufttemperatur zwischen $+23^{\circ},5$ und $+15^{\circ},7$ R. war;
- 2te Gruppe, 23 im Sommer erhaltene vormittägige Werthe von μ , bei welchen indess das Bild nur 5 Mal als *ruhig* bezeichnet war, die übrigen 18 Male als *ziemlich ruhig* oder *etwas unruhig*, und die Lufttemperatur zwischen $+23^{\circ},2$ und $+14^{\circ},0$ war;

3te Gruppe, 21 im Winter von Stawropol aus erhaltene Werthe von μ , welche zwar alle ohne Praedicat des Bildes sind, aber, nach Anmerkung zu 13 Seite LXXVII, im Mittel nahezu der normalen Refraction angehören. In dieser Gruppe waren die Thermometerangaben zwischen $+5^{\circ},5$ und $-11^{\circ},0$, so dass unser ganzes Material Messungen enthält, bei denen die äussersten Temperaturen um $34^{\circ},5$ von einander abstehen.

Ausgeschlossen von der Untersuchung sind die 20 vormittägigen Sommerwerthe von μ , bei welchen durch das Praedicat *unruhig*, und nach den Anmerkungen zu 4 und 5 und 11, Seite LXXVI u. f., erkannt war, dass sie gestörten Refractionen angehörten. Es sind die in § 49 mit * bezeichneten.

Aus dem hier über die Praedicate gesagten folgt, dass, so wie das Material der Rechnung unterworfen werden sollte, den drei angezeigten Gruppen verschiedene Genauigkeiten und Gewichte für die einzelnen Werthe zukommen mussten, die grössten der ersten Gruppe, geringere der 2ten, und die geringsten der letzten.

§ 52.

Die Grösse der Refraction wird, abgesehen von der Amplitudo, zunächst durch die Abnahme der Dichtigkeit der Luftschichten nach dem Mariotteschen Gesetze bedingt, dann aber auch durch die mit der Höhe eintretende Veränderung der Temperatur der Luft, welche eine vom Mariotteschen Gesetze unabhängige, in der Regel entgegengesetzte Veränderung der Dichtigkeiten der Luftschichten zur Folge hat. Wir können uns denken, dass aus beiden Ursachen ein solches Gesetz der Abnahme der Dichtigkeit mit der Höhe hervorgeht, dass, wie bei der astronomischen Strahlenbrechung in nicht zu grossen Zenithdistanzen, die Refraction der Dichtigkeit der Luft am Ort des Beobachters proportionirt ist, oder dass, wenn λ den normalen Refractionscoefficienten für einen mittleren Barometer- und Thermometerstand b und t bedeutet, für ein anderes B und T nun

$$\mu = \lambda \cdot \frac{B}{b} \cdot \left(\frac{1 + 0,0045 t}{1 + 0,0045 T} \right) \quad (\text{I})$$

wird, wobei angenommen ist, dass das Volumen der Luft zwischen 0° und 80° R. sich von 1 auf 1,360 ändert. Um näherungsweise zu untersuchen, in wie weit diese Formel den 71 beobachteten normalen Refractionscoefficienten genüge, habe ich diese nach den Temperaturen geordnet, und aus 10, 12, 14, 14 und 21 Werthen folgende 5 Mittelwerthe abgeleitet:

B engl. Zoll	T	μ	reducirt auf $b = 29,000$ $\mu =$	berechnet nach (I).	berechnet nach (II).	Beob.-Ber. nach (II).
29,188	$+21^{\circ},77$	0,06793	0,06750	0,06750	0,06750	0,00000
29,265	$+19,15$	0,07038	0,06974	0,06823	0,06970	$+0,00004$
28,593	$+16,17$	0,07316	0,07420	0,06908	0,07242	$+0,00178$
29,007	$+14,53$	0,07503	0,07501	0,06956	0,07400	$+0,00101$
28,436	$-2,22$	0,09340	0,09524	0,07486	0,09524	0,00000

Von $T = +21^{\circ},77$ bis $T = -2^{\circ},22$ giebt die Beobachtung $d\mu = 0,02774$, während die Formel (I) nur $d\mu = 0,00736$ darbietet. Wir schliessen hieraus, dass der Coefficient 0,0045 für T bei der irdischen

Strahlenbrechung nicht gültig ist, und finden genähert aus der Vergleichung des 1sten und 5ten Werthes statt dessen 0,0165, einen 3,7 Mal so starken Coefficienten, oder

$$\mu = \lambda \cdot \frac{b}{B} \cdot \left(\frac{1 + 0,0165 t}{1 + 0,0165 T} \right) \quad (\text{II})$$

eine Formel, welche die 5 verschiedenen μ , wie die letzte Columne zeigt, schon ziemlich gut darstellt.

§ 53.

Da im vorigen § gezeigt worden, dass die normale Refraction nicht der Dichtigkeit der Luft am Beobachtungsorte proportionirt ist: so hat auch die daselbst gewählte Form des Ausdrucks für μ keine Begründung. Nach einiger Ueberlegung wählte ich nun folgenden Ausdruck:

$$\mu = \lambda \cdot \frac{B}{b} \cdot (1 + \gamma)^{t-T};$$

oder, wenn $\frac{B}{b} = \beta$ und $t - T = \tau$ gesetzt wird:

$$\mu = \lambda \cdot \beta \cdot (1 + \gamma)^\tau. \quad (\text{III})$$

Dieser Ausdruck beruht auf den, wie mir scheint, naturgemässen Annahmen, dass erstlich die Refraction dem Barometerstande am Orte des Beobachters proportionirt ist, und zweitens, dass eine Abnahme der Temperatur von einem Grade die Refraction jedesmal um einen bestimmten aliquoten Theil vergrössert.

Wir kommen sofort zu einem genäherten Werth von $1 + \gamma$, wenn wir die Mittelwerthe der Refractionen aus den Sommer- und Winterbeobachtungen vergleichen. Vereinigen wir die in § 52 gegebenen 4 ersten Werthe zu einem Mittel, ohne noch die Gewichte zu beachten, so findet sich, bei $b = 29,00$ Zoll

$$\text{für } T = +17^\circ,90 \quad \mu = 0,07161;$$

und der letzte Werth daselbst gibt unmittelbar

$$\text{für } T = -2^\circ,22 \quad \mu = 0,09525.$$

Hieraus folgt die Gleichung:

$$0,07161 \cdot (1 + \gamma)^{20,12} = 0,09525, \text{ oder } \log(1 + \gamma) = \frac{\log 9525 - \log 7161}{20,12} = 0,006155;$$

$$\text{also } 1 + \gamma = 1,01427.$$

Wenn wir ebenso die 4 Sommerwerthe in § 52 mit ihrem Mittel für $+17^\circ,90$ vergleichen, so erhalten wir zur Bestimmung von $(1 + \gamma)$ folgende 4 Gleichungen:

$$\log 7161 - \log 6750 = 0,02567 = 3,87 \cdot \log(1 + \gamma)$$

$$\log 7161 - \log 6974 = 0,01149 = 1,25 \cdot \log(1 + \gamma)$$

$$\log 7420 - \log 7161 = 0,01543 = 1,73 \cdot \log(1 + \gamma)$$

$$\log 7504 - \log 7161 = 0,02015 = 3,37 \cdot \log(1 + \gamma).$$

Nach den kleinsten Quadraten findet sich hieraus $\log(1 + \gamma) = 0,006730$, folglich

$$1 + \gamma = 1,01562.$$

Werden die Winterbeobachtungen in Stawropol für sich auf gleiche Weise behandelt, indem die einzelnen μ mit dem für $-2^\circ,2$ geltenden Mittelwerth $\mu = 0,0952$ verglichen werden, so erhält man

nach den kleinsten Quadraten $1+\gamma = 1,02367$. Dieser Werth ist erheblich grösser, unterliegt aber einem nicht geringen w. F. Ausserdem musste er nothwendiger Weise zu gross ausfallen, weil er aus Beobachtungen abgeleitet war, in denen sich die Wirkung der Wärme mit der täglichen periodischen Störung der Refraction vereinigte, und zwar so, dass die positive Störung mit den niedrigsten Temperaturen am Abend und Morgen, die negative mit den höchsten um Mittag zusammenfiel.

Die nahe Uebereinstimmung der beiden Werthe von $1+\gamma$, deren erster 1,01427 auf der Vergleichung der Sommer- und Winterbeobachtungen, letzterer 1,01562 aber auf der Vergleichung der Sommerbeobachtungen allein unter sich beruht, war es, die mich vor allem ermuthigte, die Untersuchung weiter zu führen, indem sie mir die Ueberzeugung gewährte, dass ich in (III) eine der Natur entsprechende Form des Ausdrucks der Refraction gewählt hatte.

Ich werde im folgenden den mittleren Refractionscoefficienten λ auf den Barometerstand $b = 29,00$ engl. Zoll und auf die Lufttemperatur $t = +16^{\circ},0$ R. beziehen, wodurch $\beta = \frac{B}{29,00}$ und $\tau = 16,0 - T$ wird. Wenn man nun, für beide in der Formel (III) zu bestimmende Grössen λ und γ , schon genäherte Werthe λ' und γ' gefunden hat, so dass diese nur noch kleiner Verbesserungen $d\lambda' = \xi$ und $d\gamma' = \eta$ bedürfen: so führt jeder durch Beobachtung bestimmte Refractionscoefficient μ , so wie man ihn mit dem aus λ' und γ' berechneten Werthe μ' vergleicht, und $\mu - \mu' = n$ setzt, zur linearischen Gleichung

$$a\xi + q\eta = n, \text{ worin } a = \frac{\mu'}{\lambda'} \text{ und } q = \frac{\mu'\tau}{1+\gamma'}. \quad (\text{IV})$$

Diese Coefficienten a und q ergeben sich nämlich aus der Differentiirung der Formel (III), wonach

$$\begin{aligned} d\mu &= \beta(1+\gamma)^{\tau} d\lambda + \lambda\beta\tau(1+\gamma)^{\tau-1} d\gamma \\ &= \frac{\mu}{\lambda} d\lambda + \frac{\mu\tau}{1+\gamma} d\gamma. \end{aligned}$$

Für die Rechnung ist es am bequemsten, wenn man sich unter ξ , η und n Einheiten der 4ten Decimalstelle vorstellt, und ein beobachtetes $\mu = 0,0704$, verglichen mit einem berechneten $\mu' = 0,0722$, gibt ein $n = -18$.

Einen sehr genäherten Werth $\lambda' = 0,0740$, für $b = 29,00$ und $t = +16,0$, bietet der 3te Mittelwerth in § 52 dar, wo wir, für $b = 29,00$ und $T = +16,17$, ein $\mu = 0,0742$ haben. Als Näherung für γ setze ich nach den Sommerbeobachtungen $\gamma' = 0,0155$. Mit diesen zum Grunde gelegten Constanten berechnete ich nun für jedes nach § 49 beobachtete μ , sein dem B und T entsprechendes μ' , und gelangte so, durch Benutzung des Materials der Sommer- und Winterbeobachtungen zu 71 Bedingungs-gleichungen von der Form $a\xi + q\eta = n$, aus deren Auflösung sich ξ und η , die Verbesserungen der angenommenen Werthe λ' und γ' ergeben mussten. Es gehörten aber diese 71 Gleichungen zu drei Gruppen, bei denen, wie oben schon angedeutet ist, verschiedene Gewichte anzunehmen sind. Diese nahm ich nach einer Schätzung zu 1 , $\frac{4}{9}$ und $\frac{1}{9}$ an, indem ich den Gleichungen aus den Abendbeobachtungen im Sommer, als den sichersten, die Genauigkeit 1 ertheilte, den Morgenbeobachtungen $\frac{2}{3}$, und den Winterbeobachtungen in Stawropol die Genauigkeit $\frac{1}{3}$. Mit diesen Annahmen erhielt ich:

und da $\xi = -3,11 \mp 1,72; \eta = +2,25 \mp 3,46;$
 $\lambda' = 0,0740 \quad \gamma' = 0,0155$ vorausgesetzt war,
 $\lambda = 0,073689 \mp 1,72; \gamma = 0,015725 \mp 3,46;$

also zur Berechnung des jedesmaligen normalen Refractionscoefficienten den Ausdruck:

$$\mu = 0,073689 \cdot \frac{B}{29,00} \cdot 1,015725^{\tau} \quad (\text{V})$$

wo τ , wie immer, $= 16,0 - T$.

Zu gleicher Zeit ergab sich für ein einzelnes beobachtetes μ :

					Mittlere Amplitudo
im Mittel der 1sten Gruppe der Abendbeob.	der w. F.	10,54	} Einheiten der 4ten Decimale	C = 3811"	
" " " 2ten " " Morgenbeob.	" " " " " "	13,82			3741
" " " 3ten " " Winterbeob.	" " " " " "	34,37			6248

§ 54.

So befriedigend das Resultat des vorigen § zumal dadurch erscheint, dass es zeigt, wie regelmässig besonders die nachmittägige Refraction bei ruhigen Bildern ist, indem die wahrscheinliche Abweichung der Formel von der Beobachtung im einzelnen Falle nur $10\frac{1}{2}$ Einheiten der 4ten Decimale, oder $\frac{10,5}{737} = \frac{1}{70}$ des Betrages der Refraction gefunden wurde: so können wir doch auf keine Weise die erhaltenen λ und γ für so genau ansehen, dass sie keiner weiteren Verbesserung bedürfen, und können ebenso wenig die denselben beigelegten w. F. für die richtigen Kriterien ihrer Genauigkeit ausgeben. Zu beiden wären wir nur in dem Falle berechtigt, wenn die, für die Ableitung der beobachteten Refractionen, in § 48 zum Grunde gelegten Höhen der Berge H , und die aus ihnen gefolgerten Höhenunterschiede u zwischen den Bergen und den Standpuncten absolut genau gewesen wären. Wir sind aber nicht einmal im Stande, ein richtiges Urtheil über die Zuverlässigkeit der angewandten Berghöhen zu fällen, da die Data zur sicheren Ableitung der w. F. derselben zu unvollständig sind, und vermögen daher auch nicht zu ermitteln, um wieviel die w. F. von λ und γ , die der vorige § gegeben hat, wegen der Unsicherheit der Berghöhen vergrössert werden müssen.

Fassen wir nun unsere Aufgabe schärfer auf, so finden wir, dass wir eigentlich aus den vorhandenen Beobachtungen nicht weniger als 7 unbekante Grössen zu bestimmen haben, nämlich die 5 Berghöhen, den mittleren Refractionscoefficienten λ , und den Thermometercoefficienten γ , und dass uns zu dieser Bestimmung 71 Gleichungen zu Gebote stehen, deren jeder ein besonderes, erst bei der Auflösung selbst zu erkennendes Gewicht zukommt. Hierbei setzen wir überdies für die Meereshöhen der Instrumente auf den Standpuncten, eine solche Genauigkeit voraus, dass ihre Unsicherheit als unerheblich angesehen werden kann. In der That zeigt auch Tafel IV, Seite 61, für die Marke β^{70} am ersten der 12 Sommerstandpuncte den w. F. 6,95 Zoll an, und für die Marke α^{87} am letzten Standpuncte den w. F. 7,90, woraus für den Höhenunterschied $\alpha^{87} - \beta^{70}$ der w. F. $\sqrt{(7,90^2 - 6,95^2)} = 3,76$ Zoll folgt, den wir ohne Bedenken vernachlässigen dürfen.

§ 55.

Unsere auf 12 Standpuncten gemachten 50 Sommerbeobachtungen theilen sich in :

	8 Messungen des Beschtau, von 5 Standpuncten aus,					
11	«	«	Elbrus W.	«	4	«
8	«	«	Elbrus O.	«	4	«
15	«	«	Kasbek	«	7	«
8	«	«	Anonymus	«	5	«

Zu diesen kommen noch hinzu als Winterbeobachtungen am 13ten Standpunct : 21 Messungen des Elbrus O. von Stawropol aus, so dass für Elbrus O. im ganzen 29 Messungen von 5 Standpuncten aus vorhanden sind.

Ich werde jetzt alle Höhen eines jeden Berges zusammenstellen, welche aus den beobachteten Zenithdistanzen sich ergeben, wenn wir die Refraction nach der Formel (V) in § 53 berechnen. Die zur Ausführung der Rechnung erforderlichen Hülfgrössen, nämlich die jedesmalige Höhe des Instrumentes über dem Meere, die C , D' u. s. w., finden sich in § 48 zusammengestellt. Für eine bequeme Berechnung der μ hatte ich ausserdem die Formel (V) § 53 in eine Tafel gebracht, welche, für jeden Grad von $+24^\circ$ bis -12° , den zu $b = 29,00$ zugehörigen $\log \mu$ gab, und ausserdem $\log \frac{B}{29,00}$ für die einzelnen Zehntel des Zolls enthielt. Ist der einem B und T entsprechende $\log \mu$ aus der Tafel gefunden, so erhält man $\log \rho = \log \mu + \log C$, woraus die berechnete Refraction ρ folgt. — Ist nun z die beobachtete Zenithdistanz, und setzt man $90^\circ - (z + \rho) = h$, den für Refraction corrigirten Höhenwinkel des Berges, so ist bekanntlich die Höhe desselben über dem Instrumente gegeben durch :

$$\frac{D' \sin (h + \frac{1}{2} C)}{\cos (h + C)};$$

woraus sich die Höhe über dem Asowschen Meere H , durch Hinzufügung der Höhe des Instrumentes über dem Meere, in § 48, ergibt.

Ich ordne die Messungen eines jeden Berges nach den wachsenden Amplituden, Entfernungen vom Instrumente, und bemerke noch, dass die hier gegebenen z die wegen der Biegung schon verbesserten sind. In den beiden letzten Spalten habe ich die w. F. der h und der berechneten Höhen hinzugefügt, wie sie sich aus der späteren Untersuchung in § 58 und § 63 herausstellen.

I. Nach der Formel § 53 (V) berechnete Höhen des Beschtau.

	Stand-punct	Ampli-tudo C	Beob-achter	Datum und wahre Zeit	B	T	Berech-nete Re-fraction ρ	Beobachtete Zenithdistanz z	$h = 90^\circ - (z + \rho)$	Höhe des Berges in engl. Zoll.	Wahrsch. Fehler der h $\psi =$	der Höhe $\epsilon =$
1	D	415 ^{''} 6	F	13. Juli 4 ^h 37 ^m	28,62	15,7	30 ^{''} 4	85° 52' 14 ^{''} 5	4° 7' 15 ^{''} 1	55072	2 ^{''} 04	5,0 Zoll
2	Q	788,5	Σ	" " 4 37	28,65	15,7	57,7	87 51 49,4	2 7 12,9	55083	1,39	6,4
3	p^{70}	989,2	S	" " 3 47	28,94	17,6	70,9	88 13 45,7	1 45 3,4	55064	1,97	11,5
4	"	"	S	" " 4 37	28,94	16,0	72,7	13 43,4	1 45 3,9	55068	1,98	11,6
5	b^{79}	2684,4	S	21. Aug. 6 30	29,13	17,8	193,2	89 30 59,4	0 25 47,4	55233	3,17	50,2
6	b^{80}	2885,5	F	" " 19 30	29,19	14,5	219,1	89 35 6,3	0 21 14,6	54975	4,21	71,8
7	"	"	S	" " 19 30	29,19	14,5	219,1	35 0,5	21 20,4	55075	4,08	69,6
8	"	"	S	" " 20 7	29,19	16,5	212,4	35 14,6	21 13,0	54941	3,99	67,9
Mittel $M^I =$										55073		

II. Nach der Formel § 53 (V) berechnete Höhen des Elbrus, Westkuppe.

	Stand-punct	Ampli-tudo C	Beob-achter	Datum und wahre Zeit	B	T	Berech-nete Re-fraction ρ	Beobachtete Zenithdistanz z	$h = 90^\circ - (z + \rho)$	Höhe des Berges in engl. Zoll.	Wahrsch. Fehler der h $\psi =$	der Höhe $\epsilon =$
1	p^{75}	3834 ^{''} 6	F	15. Aug. 18 ^h 22 ^m	28,92	14,0	290 ^{''} 7	87° 53' 3 ^{''} 3	2° 2' 6 ^{''} 0	222271	5 ^{''} 31	120,2 z.
2	"	"	S	" " 18 43	28,92	14,5	288,5	53 11,8	2 1 59,7	222128	5,18	117,3
3	"	"	Σ	" " 18 54	28,92	14,8	287,1	53 23,5	2 1 49,4	221911	4,99	113,0
4	b^{70}	4012,8	S	14. Juli 17 40	28,72	15,0	297,5	88 1 55,6	1 53 6,9	222197	5,32	126,0
5	"	"	F	" " 17 49	28,72	15,1	297,0	1 49,2	1 53 13,8	222359	5,41	128,0
6	"	"	Σ	" " 18 3	28,71	15,4	295,6	1 56,3	1 53 8,1	222224	5,14	121,6
7	"	"	F	" " 18 32	28,69	15,9	293,0	1 55,0	1 53 12,0	222317	5,34	126,5
8	p^{82}	4720,3	Σ	23. Aug. 6 11	29,15	19,3	332,1	88 25 52,4	1 28 35,5	221807	4,76	132,8
9	a^{87}	5779,9	F	29. Aug. 5 29	29,38	20,0	405,4	88 55 48,4	0 57 26,2	221968	5,92	202,4
10	"	"	F	" " 6 2	29,38	18,7	413,7	55 29,1	0 57 37,2	222345	6,03	205,9
11	"	"	S	" " 6 9	29,39	19,0	411,9	55 32,0	0 57 36,1	222307	5,91	201,9
Mittel $M^{II} =$										222167		

III. Nach der Formel § 53 (V) berechnete Höhen des Elbrus, Ostkuppe.

A. Sommerbeobachtungen.

	Stand-punct	Ampli-tudo C	Beob-achter	Datum und wahre Zeit	B	T	Berech-nete Re-fraction ρ	Beobachtete Zenithdistanz z	$h = 90^\circ - (z + \rho)$	Höhe des Berges in engl. Zoll.	Wahrsch. Fehler der h $\psi =$	der Höhe $\epsilon =$
1	p^{75}	3813 ^{''} 3	S	15. Aug. 18 ^h 43 ^m	28,92	14,5	286 ^{''} 9	87° 52' 50 ^{''} 1	2° 2' 23 ^{''} 0	221267	5 ^{''} 14	115,8 z.
2	"	"	Σ	" " 18 54	28,92	14,8	285,5	52 58,7	2 2 15,8	221122	4,96	111,7
3	b^{70}	4007,0	S	14. Juli 17 40	28,72	15,0	297,1	88 2 11,4	1 52 51,5	221440	5,31	125,4
4	"	"	F	" " 17 49	28,72	15,1	296,5	1 59,3	1 53 4,2	221741	5,40	127,6
5	"	"	Σ	" " 18 3	28,71	15,4	295,2	2 15,6	1 52 49,2	221384	5,13	121,2
6	"	"	F	" " 18 32	28,69	15,9	292,6	2 11,3	1 52 56,1	221549	5,33	125,9
7	p^{82}	4688,7	Σ	23. Aug. 6 11	29,15	19,3	329,9	88 25 16,6	1 29 13,5	221011	4,68	129,6
8	a^{87}	5746,3	S	29. " 6 9	29,39	19,0	409,5	88 55 15,7	0 57 54,8	221063	5,89	200,0
Mittel $M^{III} =$										221322		

B. Winterbeobachtungen von Stawropol aus.

	Ampli- tudo C	Beob- achter	Datum und wahre Zeit	B	T	Berech- nete Re- fraction ρ	Beobachtete Zenithdistanz z	$h = 90^\circ - (z + \rho)$	Höhe des Berges in engl. Zollen.	Wahrsch. Fehler der h $\psi =$	der Höhe $\varepsilon =$
1	6248,4	S	24. Dec. 20 ^h 15 ^m	28,30	+ 4,6	536,9	89° 12' 34,0	0° 38' 29,1	220528	18,99	698,7 z.
2	"	S	25. " 0 1	28,27	+ 5,5	528,8	13 25,5	37 45,7	218930	18,70	688,4
3	"	S	" " 4 0	28,27	+ 4,6	536,3	12 57,2	38 6,5	219699	18,97	698,0
4	"	S	7. Jan. 21 0	28,65	- 7,0	651,3	10 1,8	39 6,9	221922	23,00	846,6
5	"	S	" " 21 30	28,65	- 7,0	651,3	10 12,2	38 56,5	221538	23,00	846,6
6	"	S	8. " 0 30	28,62	- 3,3	614,1	10 56,2	38 49,7	221288	21,69	798,4
7	"	S	" " 3 50	28,55	- 2,7	606,9	11 24,0	38 29,1	220528	21,44	789,3
8	"	S	" " 23 40	28,55	- 1,7	597,5	11 40,2	38 22,3	220278	21,11	776,9
9	"	S	9. " 20 25	28,46	- 0,3	582,7	12 11,5	38 5,8	219669	20,60	758,1
10	"	S	" " 21 20	28,46	+ 0,3	577,3	12 11,2	38 11,5	219879	20,40	750,9
11	"	S	10. " 20 28	28,37	+ 0,3	575,5	12 12,2	38 12,3	219909	20,34	748,5
12	"	S	11. " 4 10	28,32	+ 0,2	575,4	12 27,2	37 57,4	219360	20,34	748,5
13	"	F	12. " 0 36	28,22	- 0,2	577,0	11 31,0	38 52,0	221373	20,42	751,4
14	"	S	14. " 1 14	28,37	- 1,0	587,3	12 5,2	38 7,5	219732	20,76	764,0
15	"	S	30. " 0 45	28,55	-11,0	690,8	10 13,2	38 16,0	220045	24,41	898,2
16	"	F	31. " 1 10	28,42	- 6,0	636,1	10 4,0	39 19,9	222401	22,49	827,5
17	"	S	21. Febr. 20 48	28,40	- 4,5	620,9	10 51,2	38 47,9	221221	21,93	807,2
18	"	S	22. " 20 25	28,31	- 3,0	604,6	10 11,2	39 44,2	223297	21,36	786,3
19	"	S	26. " 23 45	28,40	- 2,0	597,1	11 55,2	38 7,7	219739	21,10	776,5
20	"	S	27. " 5 16	28,47	- 2,5	603,3	11 10,2	38 46,5	221169	21,32	784,7
21	"	S	" " 19 55	28,55	-10,0	680,2	9 21,2	39 18,6	222353	24,02	883,9

IV. Nach der Formel § 53 (V) berechnete Höhen des Kasbek.

	Stand- punct	Ampli- tudo C	Beob- achter	Datum und wahre Zeit	B	T	Berech- nete Re- fraction ρ	Beobachtete Zenithdistanz z	$h = 90^\circ - (z + \rho)$	Höhe des Berges in engl. Zoll	Wahrsch. Fehler der h $\psi =$	der Höhe $\varepsilon =$
1	a^{87}	3740,2	F	29. Aug. 5 ^h 29 ^m	29,38	20,0	262,3	88° 0' 53,0	1° 54' 44,7	198452	4,11	90,5 z.
2	"	"	F	" " 6 2	29,38	18,7	267,7	0 41,7	1 54 50,6	198582	4,18	92,1
3	"	"	S	" " 6 9	29,39	19,0	266,5	0 46,5	1 54 47,0	198503	4,05	89,2
4	b^{83}	3895,5	S	24. Aug. 20 0	29,25	19,0	276,3	88 8 13,6	1 47 10,1	198857	4,98	114,0
5	b^{82}	3991,7	F	23. " 4 27	29,20	22,0	269,7	88 13 21,9	1 42 8,4	198379	4,21	99,0
6	"	"	F	" " 5 27	29,20	19,6	280,0	13 12,5	1 42 7,5	198358	4,33	101,9
7	b^{81}	4020,0	S	23. " 4 38	29,11	23,5	264,5	88 14 49,4	1 40 46,1	198743	4,02	95,2
8	"	"	S	" " 5 28	29,11	22,2	269,9	14 46,5	1 40 43,6	198684	4,10	97,1
9	"	"	S	" " 6 10	29,11	20,8	275,9	14 36,4	1 40 47,7	198781	4,18	99,0
10	p^{82}	4039,5	Σ	23. " 4 12	29,14	23,2	267,3	88 15 38,9	1 39 53,8	198484	3,94	93,8
11	"	"	Σ	" " 6 11	29,15	19,3	284,2	15 25,3	1 39 50,5	198406	4,07	96,9
12	b^{80}	4042,8	F	21. " 19 30	29,19	14,5	307,0	88 15 38,3	1 39 14,7	198839	5,54	132,7
13	"	"	S	" " 19 30	29,19	14,5	307,0	15 50,3	1 39 2,7	198552	5,47	130,3
14	"	"	S	" " 20 7	29,19	16,5	297,5	15 59,8	1 39 2,7	198552	5,32	126,8
15	b^{79}	4143,9	S	21. " 6 30	29,13	17,8	298,2	88 20 46,1	1 34 15,7	198295	4,44	108,5
Mittel $M'' =$										198564		

V. Nach der Formel § 53 (V) berechnete Höhen des Anonymus.

	Stand- punct	Ampli- tudo C	Beob- achter	Datum und wahre Zeit	B	T	Berech- nete Re- fraction ρ	Beobachtete Zenithdistanz z	$h = 90^\circ - (z + \rho)$	Höhe des Berges in engl. Zoll.	Wahrsch. Fehler der h $\psi =$	der Höhe $\epsilon =$
1	b^{80}	3346,7	F	21. Aug. 19 ^h 30 ^m	29,19	14,5	254,1	87° 39' 25,4	2° 16' 20,5	203394	4,74	93,6 Zoll.
2	"	"	S	" " 19 30	29,19	14,5	254,1	87 39 33,2	2 16 12,7	203258	4,63	91,4
3	p^{75}	3439,2	Σ	15. " 18 54	28,92	14,8	257,5	87 48 5,0	2 7 37,5	203016	4,51	91,4
4	b^{81}	3502,5	S	23. " 6 10	29,11	20,8	240,4	87 47 39,6	2 8 20,0	203248	3,72	76,9
5	p^{82}	3602,6	Σ	23. " 4 12	29,14	23,2	238,4	87 52 48,9	2 3 12,7	203186	3,60	76,5
6	"	"	Σ	" " 6 11	29,15	19,3	253,4	87 52 36,7	2 3 9,9	203127	3,67	78,0
7	b^{82}	3645,3	F	23. " 4 27	29,20	22,0	246,3	87 54 14,9	2 1 38,8	203248	3,93	84,4
8	"	"	F	" " 5 27	29,20	19,6	255,7	87 54 1,8	2 1 42,5	203328	4,04	86,8
Mittel $M' =$										203226		

§ 56.

Wären die in der Formel § 53 (V) zum Grunde liegenden Constanten $\lambda' = 0,073689$, $\gamma' = 0,015725$ schon die aus unserm Beobachtungsmaterial folgenden wahrscheinlichsten Werthe derselben, so würden auch die in § 55 zusammengestellten mehrfachen Bestimmungen der Berghöhen die aus denselben allendlich abzuleitenden sein; und wir hätten sie nur mit Berücksichtigung ihrer Gewichte zu einem Endresultate zu vereinigen. Das oben, ohne Beachtung der Gewichte, für jeden Berg gefundene arithmetische Mittel der Berghöhen M ist jedenfalls nur als eine Annäherung zu betrachten, statt deren der wahrscheinlichste Werth $M + \gamma$ sein wird. Dieser ist derjenige, welcher den wahrscheinlichsten Werthen von λ und γ entsprechen wird, die ich mit $0,073689 \cdot (1 + \frac{x}{100})$ und $0,015725 + \eta$ bezeichnen will. Ist nun H die in einem einzelnen Falle des vorigen § durch Rechnung gefundene Höhe, so findet zwischen den zu betrachtenden Grössen folgende Relation statt:

$$M + \gamma = H - px + q\eta,$$

woraus sich, wenn ich $H - M = n$ setze, die Bedingungsgleichung

$$\gamma + px - q\eta = n$$

ergibt. Solcher Bedingungsgleichungen werden wir also für Beschtau 8, für Elbrus W. 11, für Elbrus O. 8 + 21 = 29, für Kasbek 15, und für Anonymus 8 zu bilden haben.

Die Coefficienten p und q bestimmen sich aus folgender Betrachtung. Wird die Refractionsconstante λ' um $\frac{1}{100}$ ihres Werthes vermehrt, so ist zu jeder nach der Formel berechneten Refraction ρ noch $0,01\rho$ hinzuzufügen, und die berechnete Höhe des Berges wird kleiner ausfallen um $0,01\rho \cdot D' \sin 1''$ in Zollen. Wird ferner die Constante γ' um eine Einheit der 4ten Decimale vermehrt, so ist, nach § 53 (IV), $d\mu' = \frac{\mu'\tau}{1+\gamma'} d\gamma = \frac{\mu'\tau}{10157,25}$; und $d\rho = C \cdot d\mu' = \frac{C\mu'\tau}{10157,25} = \frac{\rho \cdot \tau}{10157,25}$, also positiv für $T < 16^\circ$, negativ für $T > 16^\circ$, weil $\tau = 16^\circ - T$. Einem $d\rho$ entspricht aber ein $dH = -d\rho \cdot D' \sin 1''$. Diesem gemäss haben wir folgende 2 Ausdrücke unserer Coefficienten:

$$p = \frac{\rho}{100} D' \cdot \sin 1'';$$

$$q = \frac{\rho(T-16,0)}{10157,25} \cdot D' \sin 1'' = \frac{p(T-16,0)}{101,5725}.$$

Da, in § 55, für jede einzelne Beobachtung die berechnete Refraction ρ gegeben ist, und sich ebenfalls T die Temperatur daselbst findet, so ist die Berechnung der Coefficienten p und q mit Zuziehung der respectiven $\log D \cdot \sin 1''$ in § 48 eine leichte.

§ 57.

Wir erhalten nunmehr aus den in § 55 zusammengestellten berechneten Höhen der 5 Bergspitzen folgende Bedingungsgleichungen zur weiteren Verarbeitung für unseren Zweck. Die Morgenbeobachtungen, denen ihrer Natur nach ein geringeres Gewicht zukommt, sind durch ein vorgesetztes (m) bezeichnet.

I. Ursprüngliche Bedingungsgleichungen für den Beschtau. — Gesuchte Höhe des Berges $55073 + y^I$ Zoll.

		Gewicht G
1.	$y^I + 0,75 x + 0,002 \eta = - 1$	400,3
2.	$y^I + 2,69 x + 0,008 \eta = + 10$	240,1
3.	$y^I + 4,14 x - 0,065 \eta = - 9$	75,75
4.	$y^I + 4,24 x + 0,000 \eta = - 5$	74,82
5.	$y^I + 30,63 x - 0,543 \eta = + 160$	3,974
(m) 6.	$y^I + 37,35 x + 0,552 \eta = - 98$	1,943
(m) 7.	$y^I + 37,35 x + 0,552 \eta = + 2$	2,063
(m) 8.	$y^I + 36,20 x - 0,178 \eta = - 132$	2,167

II. Ursprüngliche Bedingungsgleichungen für Elbrus W . — Gesuchte Höhe des Berges $222167 + y^{II}$ Zoll.

		Gewicht G
(m) 1.	$y^{II} + 65,8 x + 1,30 \eta = + 104$	0,692
(m) 2.	$y^{II} + 65,3 x + 0,96 \eta = - 39$	0,727
(m) 3.	$y^{II} + 65,0 x + 0,77 \eta = - 256$	0,783
(m) 4.	$y^{II} + 70,4 x + 0,69 \eta = + 30$	0,630
(m) 5.	$y^{II} + 70,3 x + 0,62 \eta = + 192$	0,610
(m) 6.	$y^{II} + 69,9 x + 0,41 \eta = + 57$	0,676
(m) 7.	$y^{II} + 69,2 x + 0,07 \eta = + 150$	0,625
8.	$y^{II} + 92,6 x - 3,01 \eta = - 360$	0,566
9.	$y^{II} + 138,5 x - 5,46 \eta = - 199$	0,244
10.	$y^{II} + 141,3 x - 3,76 \eta = + 178$	0,236
11.	$y^{II} + 140,7 x - 4,16 \eta = + 140$	0,245

III. Ursprüngliche Bedingungsgleichungen für Elbrus Ost.

Gesuchte Höhe des Berges $221322 + y^{III}$ Zoll.

A. Sommerbeobachtungen.

		Gewicht $G =$
(m) 1.	$y^{III} + 64,6 x + 0,95 \eta = - 55$	0,746
(m) 2.	$y^{III} + 64,3 x + 0,76 \eta = - 200$	0,802
(m) 3.	$y^{III} + 70,2 x + 0,69 \eta = + 118$	0,635
(m) 4.	$y^{III} + 70,1 x + 0,62 \eta = + 419$	0,614
(m) 5.	$y^{III} + 69,7 x + 0,41 \eta = + 62$	0,681
(m) 6.	$y^{III} + 69,1 x + 0,07 \eta = + 227$	0,631
7.	$y^{III} + 91,4 x - 2,97 \eta = - 311$	0,595
8.	$y^{IV} + 139,0 x - 4,11 \eta = - 259$	0,250

B. Winterbeobachtungen.

		Gewicht $G =$
9.	$y^{III} + 197,6 x + 11,22 \eta = - 794$	0,02048
10.	$y^{III} + 194,6 x + 10,34 \eta = - 2392$	0,02111
11.	$y^{III} + 197,4 x + 11,22 \eta = - 1623$	0,02052
12.	$y^{III} + 239,7 x + 22,64 \eta = + 600$	0,01395
13.	$y^{III} + 239,7 x + 22,64 \eta = + 216$	0,01395
14.	$y^{III} + 226,0 x + 19,00 \eta = - 34$	0,01569
15.	$y^{III} + 223,4 x + 18,41 \eta = - 794$	0,01605
16.	$y^{III} + 219,9 x + 17,43 \eta = - 1044$	0,01657
17.	$y^{III} + 214,5 x + 16,05 \eta = - 1653$	0,01740
18.	$y^{III} + 212,5 x + 15,46 \eta = - 1443$	0,01773
19.	$y^{III} + 211,8 x + 15,46 \eta = - 1413$	0,01785
20.	$y^{III} + 211,8 x + 15,56 \eta = - 1962$	0,01785
21.	$y^{III} + 212,3 x + 15,95 \eta = + 51$	0,01771
22.	$y^{III} + 216,2 x + 16,73 \eta = - 1590$	0,01713
23.	$y^{III} + 254,3 x + 26,58 \eta = - 1277$	0,01240
24.	$y^{III} + 234,1 x + 21,66 \eta = + 1079$	0,01460
25.	$y^{III} + 228,5 x + 20,18 \eta = - 101$	0,01535
26.	$y^{III} + 222,5 x + 18,71 \eta = + 1975$	0,01617
27.	$y^{III} + 219,8 x + 17,72 \eta = - 1583$	0,01658
28.	$y^{III} + 222,1 x + 18,21 \eta = - 153$	0,01624
29.	$y^{III} + 250,3 x + 25,60 \eta = + 1031$	0,01280

IV. Ursprüngliche Bedingungsgleichungen für Kasbek. — Gesuchte Höhe des Berges 198564 + y^{IV} Zoll.

		Gewicht G =
1.	$y^{IV} + 57,8 x - 2,28 \eta = -112$	1,220
2.	$y^{IV} + 59,0 x - 1,57 \eta = + 18$	1,179
3.	$y^{IV} + 58,7 x - 1,73 \eta = - 61$	1,256
(m) 4.	$y^{IV} + 63,3 x - 1,87 \eta = +293$	0,769
5.	$y^{IV} + 63,4 x - 3,74 \eta = -185$	1,020
6.	$y^{IV} + 65,8 x - 2,34 \eta = -206$	0,964
7.	$y^{IV} + 62,6 x - 4,63 \eta = +179$	1,103
8.	$y^{IV} + 63,9 x - 3,90 \eta = +120$	1,060
9.	$y^{IV} + 65,3 x - 3,09 \eta = +217$	1,020
10.	$y^{IV} + 63,6 x - 4,51 \eta = - 80$	1,137
11.	$y^{IV} + 67,6 x - 2,20 \eta = -158$	1,066
(m) 12.	$y^{IV} + 73,1 x + 1,08 \eta = +275$	0,568
(m) 13.	$y^{IV} + 73,1 x + 1,08 \eta = - 12$	0,589
(m) 14.	$y^{IV} + 70,9 x - 0,35 \eta = - 12$	0,623
15.	$y^{IV} + 72,8 x - 1,29 \eta = 269$	0,850

V. Ursprüngliche Bedingungsgleichungen für Anonymus. — Gesuchte Höhe des Berges 203226 + y^V Zoll.

		Gewicht G =
(m) 1.	$y^V + 50,2 x + 0,74 \eta = +168$	1,197
(m) 2.	$y^V + 50,2 x + 0,74 \eta = + 32$	1,142
(m) 3.	$y^V + 52,2 x + 0,62 \eta = -210$	1,197
4.	$y^V + 49,7 x - 2,35 \eta = + 22$	1,692
5.	$y^V + 50,7 x - 3,59 \eta = - 40$	1,708
6.	$y^V + 53,9 x - 1,75 \eta = - 99$	1,643
7.	$y^V + 52,9 x - 3,13 \eta = + 22$	1,404
8.	$y^V + 54,9 x - 1,95 \eta = +102$	1,328

In allen 71 Bedingungsgleichungen haben wir die unbekannte, auf die Refractionsconstante sich beziehende Grösse x , so wie die Correction η des vorausgesetzten Thermometercoefficienten, und daneben in jedem der 5 Systeme als dritte Unbekannte, die respective Verbesserung $y^I \dots y^V$ der vorausgesetzten Höhe des Berges. Aus jedem Systeme werden also, zur Auflösung nach der Methode der kleinsten Quadrate, 3 partielle Endgleichungen zu bilden sein, die zuletzt in 7 Hauptendgleichungen, für die 7 Unbekannten $y^I \dots y^V$, x und η zusammengezogen werden müssen. Betrachten wir die Coefficienten von x in den ursprünglichen Gleichungen der 5 Systeme, so wird es klar, dass diejenigen am wesentlichsten zur Bestimmung von x beitragen müssen, in denen sich die Coefficienten von x am stärksten ändern; und wir können daher von den Gleichungen der Systeme IV und V nur sehr wenig für die Bestimmung

von α erwarten, während sie durch die Vermehrung der Zahl der Gleichungen wesentlich dahin wirken werden, die Genauigkeit des Endwerths mit Zuverlässigkeit zu ermitteln.

§ 58.

Um aus den ursprünglichen Bedingungsgleichungen zu den richtigen Endgleichungen zu gelangen, bedürfen wir noch der von ihren w. F. abhängigen Gewichte der ersten. Bei der Bestimmung dieser muss man in jedem Falle von der Betrachtung der unmittelbar beobachteten Grössen ausgehen, und hat den w. F. einer jeden Beobachtung zu erörtern. Aus den w. F. der beobachteten Grössen werden dann die der in den Gleichungen sich befindenden $n = \text{Beobachtung} - \text{Berechnung}$ abzuleiten sein, wenn der Weg verfolgt wird, auf welchem n aus der Beobachtung gefunden worden ist. In unserm Falle sind die beobachteten Grössen Zenithdistanzen der Bergspitzen, und wir haben zu untersuchen, welchen zufälligen Fehlern die beobachteten Zenithdistanzen unterworfen sind, indem wir unter dem Namen Fehler sowohl die Ungenauigkeiten begreifen, welche vom Beobachter und dem von ihm angewandten Apparate herühren, als diejenigen Abweichungen, welche sich uns als durch unbekannte Umstände hervorgerufene, zufällige Unregelmässigkeiten des Phaenomens darstellen. Streng genommen gibt es zwar solche Unregelmässigkeiten nicht, denn jedes Phaenomen der Natur erfolgt nach bestimmten Gesetzen; aber unsere Kenntniss dieser Gesetze ist theils eine mangelhafte, theils fehlen uns in vielen Fällen die zur vollständigen Anwendung der Theorie auf's Phaenomen erforderlichen Data. Der von mir gewählte Ausdruck der Refraction $\rho = C\lambda \frac{B}{b}(1+\gamma)^r$ ist gewiss nur eine Annäherung zum wahren Ausdruck des Phaenomens; und so muss angenommen werden, dass die jedesmalige Refraction sich mehr oder minder von dieser Formel entfernen wird; und diese Abweichung ist für uns eine zufällige Unregelmässigkeit des Phaenomens.

Die wirkliche Grösse der Abweichung für jede einzelne Gleichung anzugeben sind wir nicht im Stande, wohl aber können wir in unserm Falle zur genäherten Kenntniss eines wahrscheinlichen Werthes derselben gelangen, indem wir voraussetzen, dass die Abweichung im Allgemeinen der Grösse der Refraction ρ proportionirt angenommen werden darf. Diese Annahme ist auf der Betrachtung begründet, dass in der Regel die Abweichung als die Folge einer auf die ganze Refraction einwirkenden Ursache anzusehen sein wird, und nicht als Folge von Ursachen, die in den einzelnen Elementen der Refraction unter einander unabhängig wirken. In diesem letzten Falle wäre der wahrscheinliche Werth der Abweichung der Quadratwurzel aus ρ proportionirt zu setzen gewesen.

Die in § 55 zusammengestellten Zenithdistanzen z sind aus den vom Instrument direct angegebenen ζ durch Anbringung des Biegungscoefficienten b erhalten, oder $z = \zeta + b$. Ist demnach α der w. F. einer Beobachtung, β der w. F. der angewandten Biegung, so wird $\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)} = \delta$ den Werth des w. F. von z anzeigen, insoweit er im Instrumente und im Beobachter liegt. $\theta\rho = \omega$ ist der Ausdruck für die zufällige Unregelmässigkeit des Phaenomens, wo θ für gleiche Umstände eine Constante ist, für wesentlich verschiedene Umstände aber verschiedene Werthe haben kann; und der vollständige Ausdruck des w. F. einer beobachteten Zenithdistanz ist:

$$\sqrt{(\delta^2 + \omega^2)} = \psi.$$

Wir haben hier die drei Beobachter zu unterscheiden. Nach Seite xx und lv ist nämlich :

$$\begin{array}{l} \text{für } F, \alpha = 1,6, \beta = 1,20, \text{ folglich } \delta^2 = 4,00 \text{ und } \psi^2 = 4,00 + \theta^2 \rho^2 \\ \text{ " } S, \alpha = 1,6, \alpha = 0,61, \quad \text{ " } \alpha = 2,93 \quad \text{ " } \alpha = 2,93 + \theta^2 \rho^2 \\ \text{ " } \Sigma, \alpha = 1,1, \alpha = 0,30, \quad \text{ " } \alpha = 1,30 \quad \text{ " } \alpha = 1,30 + \theta^2 \rho^2 \\ \text{Mittel} = 2,74 \end{array}$$

Am Schluss des § 53 haben wir im Mittel gefunden :

$$\begin{array}{l} \text{den w. F. eines } \mu \text{ aus der Gruppe der Abendbeob. } \psi = 0,001054C, \text{ für } C = 3811, \text{ folgl. } \psi = 4,018, \\ \text{ " " " " " " " " " Morgenbeob. } \psi = 0,001382C, \quad \text{ " } C = 3741, \quad \text{ " } \psi = 5,171, \\ \text{ " " " " " " " " " Winterbeob. } \psi = 0,003437C, \quad \text{ " } C = 6248, \quad \text{ " } \psi = 21,48. \end{array}$$

Hieraus findet sich, mit Zuziehung des Mittelwerthes $\delta^2 = 2,74$ für die ersten beiden Gruppen, und $\delta^2 = 3,03$ für die letzte :

$$\begin{array}{l} \text{für die Abendbeob. der Mittelwerth } \omega = \sqrt{(4,018^2 - 2,74)} = 3,660, \\ \text{ " " Morgenbeob. " " } \omega = \sqrt{(5,171^2 - 2,74)} = 4,898, \\ \text{ " " Winterbeob. " " } \omega = \sqrt{(21,48^2 - 3,03)} = 21,41. \end{array}$$

Da nun für die Abendbeobachtungen das Mittel der ρ gleich $266,1$, für die Morgenbeobachtungen gleich $289,4$, für die Winterbeobachtungen gleich $607,5$ war, so erhalten wir

$$\begin{array}{l} \text{für die Abendbeob. } \theta = \frac{3,660}{266,1} = 0,01375, \\ \text{ " " Morgenbeob. } \theta = \frac{4,898}{289,4} = 0,01692, \\ \text{ " " Winterbeob. } \theta = \frac{21,41}{607,5} = 0,03524. \end{array}$$

Diese 2 ersten Werthe von θ sprechen den Satz aus, dass die zufälligen Abweichungen von der normalen Refraction in den Morgenstunden grösser sind, als in den Abendstunden, wie es auch schon aus der Characteristik des Bildes zu erwarten war. Der dritte Werth aber beweiset, dass die in Stawropol gemachten Winterbeobachtungen durch den Mangel der Characteristik des Bildes in ihrer Sicherheit für unsere Untersuchung erheblich beeinträchtigt sind. Wir haben jetzt also :

$$\begin{array}{l} \text{für jede einzelne Abendbeob. } \psi = \sqrt{((0,01375 \cdot \rho)^2 + \delta^2)}, \\ \text{ " " " Morgenbeob. } \psi = \sqrt{((0,01692 \cdot \rho)^2 + \delta^2)}, \\ \text{ " " " Winterbeob. } \psi = \sqrt{((0,03524 \cdot \rho)^2 + \delta^2)}; \end{array}$$

wobei $\delta^2 = 4,00$ für F , $\delta^2 = 2,93$ für S , $\delta^2 = 1,30$ für Σ zu nehmen ist.

Aus ψ findet sich endlich der in Zollen ausgedrückte w. F. einer Gleichung, durch $\varepsilon = \psi \cdot D' \sin 1''$ und hieraus das Gewicht einer Gleichung $g = \frac{1}{\varepsilon^2}$, für welches dem Gewichte $g = 1$ ein w. F. der Höhe von 1 Zoll entspricht. Bequemer für die Rechnung ist, um zu kleine Brüche zu vermeiden, $G = 10000g$ zu setzen, wobei der Gewichtseinheit in G ein w. F. der Höhe von 100 Zoll zukommt.

Ich wähle als Beispiel die erste Gleichung für Anonymus, aus einer von Sabler in p^{75} angestellten Morgenbeobachtung abgeleitet. Nach Seite lxxii ist für p^{75} Anonymus, $\log D' \sin 1'' = 1,3067$. Wir haben

zunehm $\rho = 257,5$; $0,01692\rho = 4,36 = \omega$, die wahrscheinliche Unregelmässigkeit der Refraction; $\omega^2 + \delta^2 = 19,01 + 1,30 = 20,31 = \psi^2$; $\psi = 4,51$ den w. F. der beobachteten Zenithdistanz; $(\log \psi = 0,6542) + 1,3067 = 1,9609 = \log \varepsilon$, $\varepsilon = 91,4$ Zoll den w. F. der berechneten Höhe; endlich $4 - 3,9218 = 0,0792 = \log G$, $G = 1,200$ das Gewicht der Gleichung.

Unser Beispiel zeigt, dass bei einem so bedeutenden Abstände wie $3439'' = 100,3$ Werst die zufällige Unregelmässigkeit der Refraction $\omega = 4,36$ der Hauptfactor von $\psi = 4,51$ ist. Anders ist es, wenn der Abstand sehr klein ist, in welchem Falle δ bedeutend grösser als ω sein kann. So ist für die erste Beobachtung des Beschtau, dessen Abstand vom Beobachter $415'' = 12,1$ Werst war, ω nur $0,42$, $\delta = 2,00$ und $\psi = 2,04$, fast ganz durch δ hervorgerufen. — Die auf diesem Wege für jede einzelne Beobachtung folgenden ψ und ε sind von mir der Zusammenstellung in § 55 beigefügt worden. Die aus ε abgeleiteten Gewichte G der Bedingungsgleichungen finden sich dagegen in § 57 neben den Gleichungen, unter der Ueberschrift: *Gewicht*.

Die auf dem angegebenen Wege gefundenen Gewichte der Gleichungen können eigentlich nur erst für genäherte Werthe derselben gelten; theils weil sie auf der mit vorläufigen Gewichten ausgeführten Auflösung der nicht ganz strengen Gleichungen in § 53 beruhen, bei deren Bildung die Höhen der Berge als bekannt vorausgesetzt waren, statt dass sie als zu bestimmende Grössen hätten eingeführt sein sollen, theils weil die Gewichte aus den arithmetischen Mitteln der übrig bleibenden Fehler, verbunden mit den Mitteln der Amplituden, also nicht in aller Strenge, abgeleitet sind. Dennoch übersieht man leicht, dass diese neuen Gewichte den richtigen schon sehr nahe sein müssen, zumal wenn die vorausgesetzten Berghöhen denen nahe kommen, die aus den vollständigen Gleichungen in § 57 selbst folgen. Gewiss aber ist, dass diese Gewichte innerhalb der Gränzen jeder Gruppe als relativ richtig für alle zu derselben Gruppe gehörigen Gleichungen angesehen werden können. Aber erst nach der Auflösung der vollständigen Gleichungen kann entschieden werden, ob die angewandten Gewichte auch das richtige Verhältniss der 3 Gruppen ausdrücken. In diesem Falle muss, wenn ν den übrig bleibenden Fehler einer Gleichung bedeutet, $\Sigma(\nu^2 G)$, für jede Gruppe besonders berechnet, zu einerlei w. F. der Gewichtseinheit führen, und dieser w. F. wird dann zugleich das richtige Maass der Genauigkeit aller durch die Auflösung der Gleichungen bestimmten Grössen sein. Findet sich aber ein erheblicher Unterschied unter den w. F. der Gewichtseinheit, nach den 3 Gruppen, so muss die Auflösung mit gehörig veränderten Gewichten wiederholt werden, bis die gestellte Bedingung erfüllt ist. Es lässt sich hier schon übersehen, dass der wirkliche, der Gewichtseinheit in g zukommende w. F. grösser als 1 ausfallen muss, weil in der vorläufigen Auflösung der Gleichungen die relativen Gewichte der 3 Gruppen 1 ; $0,444$; $0,111$ gesetzt sind, während sie nach den obigen 3 Werthen von ψ , sehr nahezu 1 ; $\left(\frac{1375}{1692}\right)^2$; $\left(\frac{1375}{3524}\right)^2$ oder 1 ; $0,660$; $0,124$ hätten sein müssen.

§ 59.

Ich stelle zunächst die aus den 5 Systemen besonders betrachtet, mit Berücksichtigung der Gewichte abgeleiteten partiellen Endgleichungen zusammen.

I. Partielle Endgleichungen durch Beschtaw.

$$\begin{aligned}
 Y^I) & 801,2 y^I + 1925 x - 2,49 \eta = + 1108 \\
 X^I) & 1925 y^I - 16757 x - 12,24 \eta = + 3901 \\
 Z^I) & -2,49 y^I - 12,24 x + 2,797 \eta = - 334,2
 \end{aligned}$$

II. Partielle Endgleichungen durch Elbrus W.

$$\begin{aligned}
 Y^{II}) & 6,035 y^{II} + 475,87 x - 1,603 \eta = - 64,6 \\
 X^{II}) & 475,87 y^{II} + 40954 x - 386,9 \eta = - 6237 \\
 Z^{II}) & -1,603 y^{II} - 386,9 x + 22,909 \eta = + 598,8
 \end{aligned}$$

III. Partielle Endgleichungen durch Elbrus O.

$$\begin{aligned}
 Y^{III}) & 5,302 y^{III} + 443,92 x + 5,70 \eta = - 179,0 \\
 X^{III}) & 443,92 y^{III} + 45507 x + 1208,0 \eta = - 53058 \\
 Z^{III}) & 5,70 y^{III} + 1208,0 x + 122,216 \eta = - 4178,3
 \end{aligned}$$

IV. Partielle Endgleichungen durch Kasbek.

$$\begin{aligned}
 Y^{IV}) & 14,425 y^{IV} + 929,26 x - 34,25 \eta = - 110,7 \\
 X^{IV}) & 929,26 y^{IV} + 60189 x - 2158,0 \eta = - 7663 \\
 Z^{IV}) & -34,25 y^{IV} - 2158,0 x + 115,830 \eta = + 305,7
 \end{aligned}$$

V. Partielle Endgleichungen durch Anonymus.

$$\begin{aligned}
 Y^V) & 11,311 y^V + 586,17 x - 17,47 \eta = - 48,7 \\
 X^V) & 586,17 y^V + 30408 x - 911,5 \eta = - 2858 \\
 Z^V) & -17,47 y^V - 911,5 x + 56,860 \eta = + 98,8
 \end{aligned}$$

Die 7 Hauptgleichungen, die dem Gesamtmaterial entsprechen, werden hieraus folgende:

$$\begin{aligned}
 \text{1ste bis 5te Hauptgl. } & Y^I, \quad Y^{II}, \quad Y^{III}, \quad Y^{IV}, \quad Y^V, \\
 \text{6te Hauptgl.} & X = X^I + X^{II} + X^{III} + X^{IV} + X^V, \\
 \text{7te Hauptgl.} & Z = Z^I + Z^{II} + Z^{III} + Z^{IV} + Z^V.
 \end{aligned}$$

§ 60.

Auflösung der 7 Hauptgleichungen.

Es ist leicht einzusehen, dass die Elimination in unserm Falle dadurch sehr bedeutend erleichtert wird, dass in jeder der ursprünglichen Gleichungen nur 3 der 7 Unbekannten vorkommen. Alle Gleichungen enthalten nämlich x und η , die für die Refraction gesuchten Verbesserungen, wozu in jedem System noch die 3te Unbekannte, das respective y , hinzukommt. Durch diesen Umstand können wir sofort aus den partiellen Endgleichungen $X^I \dots X^V$ und $Z^I \dots Z^V$, die respectiven $y^I \dots y^V$ verschwinden machen, wenn wir statt derselben ihre aus den Gleichungen $Y^I \dots Y^V$ folgenden Werthe substituieren.

					Gewicht	w. F.
Aus Y^I ergibt sich	$y^I = + 1,3829$	$- 2,4027x$	$+ 0,00311 \eta$		801,2	3,53 Zoll
« Y^{II} « «	$y^{II} = - 10,704$	$- 78,852 x$	$+ 0,266 \eta$		6,035	40,71 «
« Y^{III} « «	$y^{III} = - 33,761$	$- 83,728 x$	$- 1,075 \eta$		5,302	43,43 « (○)
« Y^{IV} « «	$y^{IV} = - 7,6747$	$- 64,427 x$	$+ 2,375 \eta$		14,425	26,33 «
« Y^V « «	$y^V = - 4,3056$	$- 51,8239 x$	$+ 1,5445 \eta$		11,311	29,73 «

Werden diese Werthe der y in die partiellen Endgleichungen, aus denen die Hauptendgleichungen für x und η zusammengesetzt sind, eingeführt, so erhält man folgende Zusammenstellung :

Beschtau X^I)	$12132x = + 1249$	$+ 6,25 \eta$	Z^I)	$2,789 \eta = - 330,76$	$+ 6,25 x$
Elbrus W. X^{II})	$3431x = - 1143$	$+ 260,50 \eta$	Z^{II})	$22,483 \eta = + 581,64$	$+ 260,50 x$
Elbrus O. X^{III})	$8338x = - 38071$	$- 730,54 \eta$	Z^{III})	$116,084 \eta = - 3985,70$	$- 730,54 x$ (○)
Kasbek X^{IV})	$322x = - 531,2$	$- 48,75 \eta$	Z^{IV})	$34,490 \eta = + 42,80$	$- 48,75 x$
Anonymus X^V)	$30x = - 334,2$	$+ 6,14 \eta$	Z^V)	$29,880 \eta = + 23,58$	$+ 6,14 x$

Aus der Summirung dieser erfolgen nun sofort die beiden neuen Hauptendgleichungen

$$X) 24253x = - 38830 - 506,40 \eta$$

$$Z) 205,726 \eta = - 3668,4 - 506,40 x,$$

deren Auflösung auf gewöhnlichem Wege uns die gesuchten x und η gibt, nämlich :

$$x = - 1,2954$$

$$\eta = - 14,639$$

$$\text{Gewicht } 23004$$

$$195,13$$

$$\text{w. F.} = \frac{100}{\sqrt{23004}} = 0,6594$$

$$\frac{100}{\sqrt{195,13}} = 7,158$$

Substituirt man endlich die eben gefundenen x und η in die Gleichungen (○), so ergeben sich die Endwerthe der gesuchten $y^I \dots y^V$. Auf diese Weise findet sich :

$$y^I = + 4,46; y^{II} = + 87,5; y^{III} = + 90,4; y^{IV} = + 41,0; y^V = + 40,2 \text{ Zoll.}$$

§ 61.

Die Richtigkeit der im vorigen § gelieferten Auflösung der Gleichungen hängt noch von der Gültigkeit der für die ursprünglichen Gleichungen in § 57 angesetzten Gewichte G ab. Um diese jetzt zu untersuchen, haben wir die in § 60 für x , η und $y^I \dots y^V$ gefundenen Werthe in die ursprünglichen Gleichungen zu setzen, den Werth n' aus dem links vom = befindlichen Gliedern zu berechnen, und mit dem in der Gleichung rechts gegebenen n zu vergleichen. $\nu = n - n'$ sind die übrigbleibenden, in Zollen angegebenen Fehler der ursprünglichen Gleichungen. Diese stelle ich jetzt zusammen, und neben ihnen die Werthe von $\nu^2 g = \frac{\nu^2 G}{10000}$. Die Morgenbeobachtungen der Sommerzeit sind mit (m) wie früher angezeigt.

I. Beschtai.		II. Elbrus W.		III A. Elbrus O. Sommerb.		III B. Elbrus O. Winterbeobacht.			
$v =$	$v^2g =$	$v =$	v^2g	$v =$	v^2g	v	v^2g	v	v^2g
-4,6	0,87	+121 (m)	1,01	- 48 (m)	0,17	- 464	0,44	-1550	4,29
+9,1	1,99	- 28 (m)	0,06	-196 (m)	3,08	-2079	9,12	+ 466	0,38
-9,1	0,63	-248 (m)	4,82	+129 (m)	1,06	-1293	3,43	-1155	2,29
-4,0	0,12	+ 44 (m)	0,12	+429 (m)	11,31	+1151	1,85	- 651	0,52
+187	13,89	+205 (m)	2,56	+ 68 (m)	0,31	+ 767	0,82	+1609	3,75
- 46 (m)	0,41	+ 66 (m)	0,29	+227 (m)	3,25	+ 446	0,31	+ 400	0,24
+ 54 (m)	0,60	+153 (m)	1,46	-326	6,32	- 326	0,17	+2447	9,69
- 92 (m)	1,84	-371	7,80	-230	1,32	- 595	0,59	-1030	1,76
		-187	0,85			-1231	2,70	+ 311	0,16
		+218	1,12			-1032	1,89	+1640	3,44
		+174	0,74			-1003	1,80		
$\Sigma(v^2g) = 20,35$		20,83		26,82		49,64			
8 Beob.		11 Beob.		8 Beob.		21 Beob.			

IV. Kasbek.		V. Anonymus.	
$v =$	$v^2g =$	$v =$	$v^2g =$
-112	1,53	+215	4,71
+ 30	0,11	-105	1,25
- 51	0,33	-144	2,21
+307 (m)	7,25	+344 (m)	6,72
-199	4,04	+ 57 (m)	0,19
-196	3,70	+ 34 (m)	0,07
+152	2,55	-235	4,70
+105	1,17		
$\Sigma v^2g =$		40,53	
		15 Beob.	
		12,84	
		8 Beob.	

Da nun aus unsern 71 Gleichungen 7 Unbekannte bestimmt sind, und $\frac{64}{71} = 0,9014$ ist: so erhalten wir nach den 5 verschiedenen Systemen und für die Gesamtzahl der Beobachtungen die nachfolgenden Werthe der $\Sigma(v^2g)$, der ihnen entsprechenden Divisoren d und des der Gewichtseinheit in g zukommenden w. F. $\epsilon' = 0,6745 \sqrt{\frac{\Sigma(v^2g)}{d}}$.

	$\Sigma(v^2g)$	Divisor d	$\epsilon =$
I. Beschtai	20,35	8. 0,9014 = 7,212	1,133 Zoll
II. Elbrus W.	20,83	11. 0,9014 = 9,915	0,978 "
III. Elbrus O.	76,46	29. 0,9014 = 26,141	1,153 "
IV. Kasbek	40,53	15. 0,9014 = 13,521	1,168 "
V. Anonymus	12,84	8. 0,9014 = 7,211	0,900 "
	171,01	64,000	1,103 Zoll

Die 5 Werthe von ϵ' stimmen so gut zusammen, als sich nach der mässigen Zahl der den einzelnen zum Grunde liegenden Beobachtungen erwarten lässt. Wir haben aber noch besonders zu untersuchen, wie die 3 Werthe von ϵ' übereinkommen, welche für die 3 Gruppen der Abend- und Morgenbeobachtungen in den Sommermonaten und der Winterbeobachtungen in Stawropol getrennt sich ergeben. Hiezu müssen wir die $\Sigma(\nu^2 g)$ für jede Classe besonders nehmen, und erhalten folgende Grössen :

	$\Sigma \nu^2 g$	Divisor d	$\epsilon' =$
Aus den 27 Abendbeob.	65,66	27. 0,9014 = 24,338	1,108 \mp 0,061 Zoll
“ “ 23 Morgenbeob.	55,71	23. 0,9014 = 20,732	1,106 \mp 0,067 “
“ “ 21 Winterbeob.	49,64	21. 0,9014 = 18,930	1,092 \mp 0,070 “
	<u>171,01</u>	<u>64.000</u>	

Die Abweichungen dieser 3 Werthe von ϵ' liegen weit innerhalb der Gränze ihrer Sicherheit. Wir gelangen also zu der Ueberzeugung, dass die für die ursprünglichen Gleichungen angesetzten Gewichte, auch für die Mittel der 3 Gruppen, als den übrigbleibenden Fehlern relativ entsprechend anzusehen sind. Dass die Gewichte innerhalb jeder Gruppe relativ richtig sind, ist schon früher angedeutet, und erhält jetzt seine volle Bestätigung. Wir sind also jetzt versichert, dass die gegebene Auflösung der Gleichungen in Bezug auf die Gewichte eine richtige ist. Da wir aber durch die strenge Auflösung der Gleichungen für den der Gewichtseinheit in g entsprechenden w. F., der vorläufig, nach § 58, $\epsilon = 1,0$ angenommen war, jetzt $\epsilon' = 1,103$ Zoll erhalten haben, so folgt, dass die in § 60 für x und η gefundenen w. F. zu klein und mit dem Coefficienten 1,103 zu multipliciren sind. Es wird demnach

der w. F. von x jetzt $0,6594 \cdot 1,103 = 0,7273$;

“ “ “ “ η “ $7,158 \cdot 1,103 = 7,895$ Einheiten der 4ten Stelle.

§ 62.

Die für die Bildung der Bedingungsgleichungen gewählten genäherten Werthe der beiden, die Refraction bedingenden Constanten waren $\lambda' = 0,073689$ und $1 + \gamma' = 1,015725$.

Mit $x = -1,2954 \mp 0,7273$ und $\eta = -14,639 \mp 7,895$, nach § 60, erhalten wir jetzt als Resultat der gesammten Beobachtungen :

$$\lambda = 0,073689 (1 - 0,012954 \mp 0,007273) = 0,072734 \mp 0,000523,$$

$$1 + \gamma = 1,015725 - 0,001464 \mp 0,000789 = 1,014261 \mp 0,000789,$$

und für den jedesmaligen Refractionscoefficienten den Ausdruck

$$\mu = 0,072734 \cdot \frac{B}{29,00} \cdot 1,014261^r.$$

§ 63.

Ich habe es in § 51 als einen der Zwecke der Untersuchung angegeben, zu erforschen, ob die normale Refraction, unabhängig vom Höhenunterschiede zwischen Object und Beobachter, durch die Amplitudo bestimmt wird. Die bisherige Untersuchung zeigt dies im allgemeinen dadurch, dass wir aus der Gesammtheit der Beobachtungen einen Werth von λ gefunden haben, der die Beobachtungen des nur 4600

Fuss hohen Beschtau und die der 4 andern zwischen 16500 und 18500 Fuss hohen Bergspitzen nahezu gleich gut darstellt. Indess bedarf der Gegenstand einer näheren Prüfung; und es bietet sich dazu der Weg sogleich dar, dass wir die Beobachtungen der 4 hohen Bergspitzen zusammen für sich, und ebenso die des Beschtau für sich behandeln, und die Ergebnisse dieser Behandlung vergleichen.

Wenn wir die auf den Beschtau bezüglichen partiellen Endgleichungen X' und Y' in § 61 (D) bei Seite lassen, so erhalten wir aus der Vereinigung der übrigen sofort zwei neue Hauptgleichungen für x und η , die auf den alleinigen Messungen der hohen Bergspitzen beruhen, nämlich:

$$\begin{aligned} [X] \quad 12121 x &= -40079 - 512,65 \eta; \\ [Z] \quad 202,937 \eta &= -3337,7 - 512,65 x. \end{aligned}$$

Die Auflösung dieser gibt:

$$\begin{array}{rcc} x = -2,9233 & & \eta = 9,062 \\ \text{Gewicht} & 10826 & 181,26 \\ \text{w. F.} & \frac{110,3}{\sqrt{10826}} = 1,060 & \frac{110,3}{\sqrt{181,26}} = 8,191. \end{array}$$

Der neue Werth $\eta = -9,062 \mp 8,191$ ist auf jeden Fall dem aus dem Complexe aller Beobachtungen erhaltenen Werthe $\eta = -14,64 \mp 7,90$ vorzuziehen, weil er auf dem gleichartigen Materiale der Beobachtungen der hohen Bergspitzen allein beruht, indem der andere die noch nicht erwiesene Unabhängigkeit der λ von der Höhe der Berge voraussetzt. Die Beschtau-Messungen konnten überhaupt für sich nur einen geringen Beitrag zur Bestimmung von η liefern, weil bei ihnen die äussersten Thermometerstände um nicht mehr als $3^0,3$ von einander abweichen, und daher steht auch das neue Gewicht = 181,26 dem mit Zuziehung des Beschtau erhaltenen = 195,13 nur um ein geringes nach*).

*) Es ist einzig die 5te in b^{79} gemachte Beschtau-Beobachtung, welche die Störung in der Uebereinstimmung der beiden Werthe von η hervorgerufen hat. Wenn wir diese einzige Beobachtung ausschliessen, so ergeben sich durch Beschtau, statt der in § 59 I. gegebenen, die nachfolgenden partiellen Endgleichungen:

$$\begin{aligned} Y') \quad 797,2 y' + 1803 x - 0,33 \eta &= + 473 \\ X') \quad 1803 y' + 13028 x + 53,84 \eta &= -15564 \\ Z') \quad -0,33 y' + 53,84 x + 1,626 \eta &= + 10,9 \end{aligned}$$

Nachdem hier y' wie früher eliminirt ist, wird

$$\begin{aligned} [X'] \quad 8950 x &= -16634 - 54,59 \eta \\ [Z'] \quad 1,626 \eta &= + 11,1 - 54,59 x. \end{aligned}$$

Vereinigen wir diese 2 Gleichungen mit den obigen, aus den 4 hohen Bergen abgeleiteten $[X]$ und $[Y]$, so werden die beiden neuen Hauptgleichungen, statt der in § 60 gegebenen, nunmehr folgende sein:

$$\begin{aligned} X) \quad 21071 x &= -56713 - 567,24 \eta \\ Z) \quad 204,563 \eta &= -3326,6 - 567,24 x. \end{aligned}$$

Und hieraus ergibt sich:

$$\begin{array}{rcc} x = -2,436 & & \eta = -9,51 \\ \text{Gewicht} & 19489 & 189,29 \\ \text{w. F.} & 0,762 & 7,74. \end{array}$$

Dies $\eta = -9,51$ ist dem obigen $\eta = -9,06$ so nahe, dass es in Betracht der erheblichen w. F. als fast mit demselben identisch angesehen werden kann.

Dennoch hat diese Uebereinstimmung für mich keinen hinlänglichen Beweggrund abgegeben, die erwähnte 5te Beschtau-Beobachtung zu verwerfen, weil ich es für wesentlich ansah, bei einer solchen Untersuchung mich jeder Willkühr zu enthalten. Es ist übrigens diese Beobachtung unter allen die am stärksten abweichende, wie das ihr nach § 61 zukommende $v^2g = 13,89$ zeigt. Da das Quadrat des w. F. der

Ich sehe daher $\eta = -9,06 \mp 8,19$ als das richtige Ergebniss unserer Untersuchung über den Thermometercoefficienten an. Da wir nun von dem genäherten $1 + \gamma' = 1,015725$ ausgegangen sind: so ist allendlich

$$1 + \gamma = 1,014819 \text{ mit dem w. F. } 0,000819.$$

Wir können aber nun noch untersuchen, wie übereinstimmend die aus den Messungen der 4 hohen Bergspitzen sich ergebenden Werthe von λ unter sich sind. Zu dem Ende finden wir durch die Gleichungen $X^{II} \dots X^V$ in § 60 (D), sofort:

		Gewicht	w. F.
nach X^{II}	aus Elbrus W. $x = -0,334 + 0,0759\eta$	3431	1,882
« X^{III}	« Elbrus O. $x = -4,566 - 0,0875\eta$	8338	1,208
« X^{IV}	« Kasbek $x = -1,663 - 0,1512\eta$	322	6,144
« X^V	« Anonymus $x = -11,14 + 0,2047\eta$	30	20,13

Setzen wir hierin jetzt $\eta = -9,06 \mp 8,19$, so findet sich:

	w. F.	$\nu =$
aus Elbrus W. $x = -1,021$	$\mp 1,882 \mp 0,620 = \mp 1,981$	$+ 1,779$
« Elbrus O. $x = -3,773$	$\mp 1,208 \mp 0,717 = \mp 1,404$	$- 0,973$
« Kasbek $x = -0,293$	$\mp 6,153 \mp 1,239 = \mp 6,268$	$+ 2,507$
« Anonymus $x = -12,99$	$\mp 20,13 \mp 1,68 = \mp 20,19$	$-10,19$

Vereinigen wir diese 4 Werthe nach ihren w. F., so ergibt sich der Mittelwerth $x = -2,800$. Dieser weicht etwas vom früher, § 60, durch die Elimination der Gleichungen [X] und [Y] gefundenen $x = -2,923$ ab; und so muss es auch sein, weil bei der jetzigen Auflösung die Compensation nicht beachtet ist, die unter den Coefficienten von η für's Endresultat stattfindet. Wenn wir aber die Uebereinstimmung der 4 partiellen Werthe von x beurtheilen wollen, so haben wir sie als unabhängig von einander mit ihrem eigenen Mittel zu vergleichen, und diesem entsprechen auch die oben gegebenen ν . Die Vergleichung dieser ν mit den entsprechenden w. F. zeigt nun, dass alle 4 Werthe von x innerhalb ihrer w. F. mit dem Mittel übereinstimmen. Wir schliessen hieraus, dass wir vollkommen berechtigt sind, für die Beobachtungen der 4 hohen Bergspitzen einen einzigen Refractionscoefficienten anzunehmen.

Um jetzt auch aus den im vorigen bei Seite gelassenen Beobachtungen des Beschtau den diesen zugehörigen Refractionscoefficienten zu erhalten, haben wir, nach § 60 (D),

$$X^I) \quad 12132x = +1249 + 6,25\eta.$$

Gewichtseinheit $\epsilon'^2 = 1,10^2 = 1,21$ ist, so gibt diese Beobachtung eine Abweichung, die $\sqrt{13,89 : 1,21} = 3,4$ Mal grösser ist als der w. F. Der Theorie nach gibt es unter 71 Beobachtungen 2,6 Fehler, die grösser als $3,1\epsilon$ sind; und es ist sehr befriedigend, dass unser Beobachtungsmaterial statt 2,6 Fälle nur einen einzigen darbietet; woraus erhellt, dass in der Theorie der Fehler kein Grund zum Ausschliessen der genannten Beobachtung zu finden ist, d. h. dass die Theorie uns nicht andeutet, dass irgendwie störende Versehen in unsern Beobachtungen vorkommen. Ein anderes wäre es gewesen, wenn an der Beobachtung selbst sich etwas verdächtig auswiese. Ich habe sie daher nach den Originaltagebüchern untersucht, und nach diesen als richtig berechnet und unverdächtig erkannt, ja völlig controllirt durch die Uebereinstimmung des Ortes des Zeniths aus den beiden Beobachtungen des Beschtau und des Kasbek.

Aus dieser Gleichung ergibt sich

$$x = +0,1030 + 0,00052\eta, \text{ mit dem w. F. } \frac{110,3}{\sqrt{12132}} = 1,001.$$

Wir sehen, dass dieses x fast ganz unabhängig von η ist, und wenn wir für η seinen Werth $-9,06 \mp 8,19$ setzen, so findet sich

$$x = +0,0983, \text{ mit dem w. F. } \mp 1,001 \mp 0,0039 = \mp 1,001.$$

§ 64.

Da, nach § 56, $\lambda = 0,073689 \cdot \left(\frac{1+x}{100}\right)$ ist, und wir

$$\text{für die 4 hohen Berge } x = -2,923 \mp 1,060$$

$$\text{für Beschtau } x = +0,098 \mp 1,001$$

in § 63 erhalten haben: so ist also

$$\text{für die 4 hohen Berge } \lambda = 0,07153 \mp 0,00074$$

$$\text{für den Beschtau } \lambda = 0,07376 \mp 0,00078.$$

Diese beiden Werthe weichen stärker von einander ab, als sie es nach ihren w. F. sollten, indem $(0,6745 \cdot 223)^2 = 22624$ fast das Doppelte von $78^2 + 74^2 = 11560$ beträgt, und somit deutet der Unterschied auf eine wirkliche Verschiedenheit der beiden λ , ohne diese indess ausser Zweifel zu stellen, da es noch nichts sehr auffallendes hat, wenn ein wirklicher Unterschied $0,00223$ doppelt so gross ist als der wahrscheinliche, $0,00108$.

§ 65.

Die bisherigen Untersuchungen haben zu 4 Werthen des mittleren für $b = 29,00$ engl. Zoll und $t = +16^{\circ},0$ R. geltenden normalen Refractionscoefficienten geführt. Zwei derselben sind am Schlusse des § 45 gegeben, und beruhen auf den reciproken, im Verlaufe des Nivellements beobachteten Zenithdistanzen der um $115,5$ und $230,7$ oder $3,37$ und $6,75$ Werst entfernten Signale. Für diese λ ist zugleich die mittlere Höhe der Gesichtslinie über dem Erdboden, die ich mit A bezeichnen will, angegeben. Die beiden andern sind das Ergebniss der Messungen des 4600 Fuss hohen Beschtau, für den die Entfernungen, aus welchen er beobachtet wurde, von der kleinsten $6'56'' = 12,1$ Werst, bis zur grössten $48'6'' = 84,2$ Werst gehen, und der Messungen der 4 andern im Mittel über 17000 Fuss hohen Bergspitzen, bei welchen die Entfernungen zwischen $55'46'' = 96,9$ Werst, und $1^{\circ}44'8'' = 180,3$ Werst liegen. Einen genäherten Werth der mittleren Höhe der Gesichtslinie werden wir auch für diese beiden λ erhalten, wenn wir statt ihrer die halben Unterschiede der Meereshöhen der Standpuncte und der Bergspitzen nehmen, und zu einem Mittel vereinigen. Auf diese Weise findet sich für den Beschtau $A = 1765$ Fuss, für die 4 hohen Spitzen $A = 8435$ Fuss. Somit haben wir

$\lambda = 0,10060 \mp 0,00370$	16	Fuss	}	aus der Operationslinie.	
$\lambda = 0,08140 \mp 0,00180$	42	«			
$\lambda = 0,07376 \mp 0,00078$	1765	«			durch Beschtau,
$\lambda = 0,07153 \mp 0,00074$	8435	«			durch die 4 hohen Berge.

Die vier λ zeigen nun ganz entschieden, dass ausser dem Barometer- und Thermometerstande am Beobachtungsorte, auch noch die Höhe der Gesichtslinie über dem Erdboden, in ihrem ganzen Wege vom Object zum Auge des Beobachters betrachtet, einen Einfluss auf den Refractionscoefficienten ausübt, dass dieser also nicht durch die Amplitudo allein bestimmt wird. Wir sehen, dass mit einer Abnahme von A eine Vergrösserung der Refraction eintritt, dass diese Zunahme aber erst erheblich ist, wenn A sehr klein wird.

§ 66.

Die bisher angenommene Formel $q = \mu C$, worin q die Refraction, μ deren von B und T bedingten Coefficienten und C die Amplitudo bedeuten, ist das Integral der Differentialformel $dq = \mu dC$. Dieses Differential ist also nicht vollgültig, und wir müssen annehmen, dass dq noch ein zweites Glied enthält, welches von h , der dem Elemente der Gesichtslinie zukommenden Höhe über dem Boden, bestimmt wird. Wäre die Erdoberfläche eine genaue Kugel, und befände sich das beobachtete Object frei ruhend in der Atmosphäre, so liesse sich $h = bC + cC^2$ mit hinreichender Annäherung ausdrücken, worin c aus dem Krümmungshalbmesser abgeleitet wird, und b durch die Zenithdistanz des Objects gefunden werden kann. Wir hätten also folgenden vollständigeren Werth der Refraction

$$\begin{aligned} q &= \int (\mu dC + f(bC + cC^2) dC) \\ &= \mu C + \int K dC. \end{aligned}$$

Von der Natur dieser Function K wissen wir nur soviel, dass sie abnimmt, wenn C zunimmt, aber nicht $= \infty$ werden darf für $C = 0$, und so wäre die einfachste Form, die wir uns denken können, $K = \frac{\chi}{\sigma + bC + cC^2}$, und in dieser Voraussetzung hätten wir

$$q = \mu C + \int \frac{\chi dC}{\sigma + bC + cC^2}.$$

Dieses Integral ist ein bekanntes. Die Schwierigkeit der Anwendung liegt aber darin, dass χ und σ erst aus den Beobachtungen zu bestimmende Grössen sind, durch deren Einführung 2 neue Unbekannte zu den 3 jetzt schon in jeder ursprünglichen Gleichung vorhandenen hinzukämen, und wir also im Ganzen 9 zu bestimmende Unbekannte für unsern Fall hätten. Dazu gesellt sich nun aber noch der Umstand, dass die Voraussetzung eines in einer Höhe über der sphärischen Erdoberfläche frei ruhenden Punctes in der Natur gar nicht vorkommt; dass vielmehr die Höhe der Gesichtslinie für jedes Element derselben von der zufälligen ganz unregelmässigen Linie abhängt, in welcher die Verticalebene des Objects den Erdboden schneidet. Nur wenn ein vollständiges Profil des Terrains zwischen dem Beobachter und dem Objecte gegeben wäre, könnten wir alle Werthe von h finden, und wären dann im Stande $\int \frac{\chi dC}{\sigma + bC + cC^2}$ durch mechanische Quadratur zu ermitteln, so wie χ und σ bekannt sind. Es ergibt sich hieraus, dass, selbst wenn die obige einfache Form von K gültig wäre, was keinesweges fest steht, der Einführung der neuen Unbekannten χ und σ in die ursprünglichen Gleichungen unübersteigbare Hindernisse entgegengetreten, und dass wir also gezwungen sind, diesen Weg ganz zu verlassen.

§ 67.

Es bietet sich jetzt der Ausweg dar, die Veränderung von λ als von A , der mittleren Höhe der Gesichtslinie über dem Boden, abhängig anzusehen, und diese Abhängigkeit aus der Erfahrung, d. h. aus den 4 in § 65 gegebenen Werthen von λ abzuleiten. Ich setze daher $\lambda = A + fA$, und wähle nach den früheren, auch hier noch zu berücksichtigenden Gründen $fA = \frac{\chi}{\sigma + A}$, wo σ und A in engl. Fussen ausgedrückt sind, und durch die Einführung von σ bezweckt ist, dass fA , für $A = 0$, nicht unendlich werde. Auf diese Weise erhalten wir durch die Angaben in § 65:

	w. F.	rel. Genauigkeit
1) $A + \frac{\chi}{\sigma + 16} = 0,10060$	0,00370	1,00
2) $A + \frac{\chi}{\sigma + 42} = 0,08140$	0,00180	2,05
3) $A + \frac{\chi}{\sigma + 1765} = 0,07376$	0,00078	4,75
4) $A + \frac{\chi}{\sigma + 8435} = 0,07153$	0,00074	5,00

Aus diesen 4 Gleichungen sind die 3 Unbekannten A , χ und σ zu bestimmen.

Suchen wir nun σ zunächst aus der Verbindung der Gleichungen 1) 2) 4), und dann aus den Gleichungen 1) 2) 3): so ergibt sich das erste Mal $\sigma = -2,6$ und das zweite Mal $\sigma = -5,4$. Die andern zwei Verbindungen kommen hier gar nicht in Betracht, da sie für die Bestimmung von σ zu ungünstig sind, so wie σ sehr klein gegen A ist. Es entspricht also unseren Gleichungen ein kleiner negativer Werth von etwa 4 Fuss für σ , der unstatthaft ist weil σ positiv sein muss, und sich ganz einfach aus den kleinen, in den beiden ersten λ befindlichen Fehlern, so wie aus der über den genauen Werth der A nachbleibenden Unsicherheit erklärt. Siehe Seite LXIX. Wir genügen daher unseren 4 Gleichungen desto besser, je kleiner der positive Werth ist, den wir für σ ansetzen, d. h. wir haben diejenigen Werthe von A und χ zu suchen, welche $\sigma = 0$ entsprechen, indem beide Grössen A und χ , wenn σ sehr klein ist, als von σ unabhängig anzusehen sind. Dabei verliert auch unsere Auflösung nichts an Brauchbarkeit, weil in der Anwendung $A < 10$ Fuss wohl nicht leicht vorkommt, und wenn es vorkommt, wie bei einem geometrischen Nivellement, man gar keiner Kenntniss von λ bedarf, da die Wirkung der Strahlenbrechung wegen der Kleinheit der Entfernungen für sich als verschwindend angesehen werden darf, und überdies, bei jeder Operation von der Mitte aus, eliminirt wird.

Nehmen wir demnach $\sigma = 0$, so werden unsere 4 Gleichungen, wenn wir in ihnen $\chi = 10000 \chi'$ setzen und sie mit ihren relativen Genauigkeiten multipliciren, zu folgenden 4 Gleichungen von gleicher Genauigkeit = 1,00 umgeformt, in denen der dem Gewichte 1 entsprechende w. F. = 0,00370 ist:

	Fehler d. Gl. $\nu =$
$A + 625,0 \chi' = 0,10060$	+0,00160
$2,05 A + 488,1 \chi' = 0,16687$	-0,00230
$4,75 A + 26,91 \chi' = 0,35036$	+0,00542
$5,00 A + 5,93 \chi' = 0,35765$	-0,00450

Aus ihnen folgen die beiden Eingleichungen :

$$52,764 A + 1783,0 \chi' = 3,89514;$$

$$1783,0 A + 629626 \chi' = 155,873;$$

und deren Auflösung gibt

$$A = 0,072383 \quad \text{mit dem w. F. } 0,000535;$$

$$\chi' = 0,000042586 \quad \text{“ “ “ “ } 0,000004904;$$

$$\chi = 0,42586 \quad \text{“ “ “ “ } 0,04904.$$

Wir haben also für die jedesmaligen Refractionscoefficienten den Ausdruck

$$\lambda = 0,072383 + \frac{0,42586}{A},$$

in welchem A die mittlere Höhe der Gesichtslinie über dem Erdboden in engl. Fussen bedeutet, oder, wenn diese mangelt, den halben Höhenunterschied der beiden Punkte. Die 4 ursprünglichen gegebenen λ sind :

	0,10060	0,08140	0,07376	0,07153
w. F.	\mp 370	\mp 180	\mp 78	\mp 74
die Formel gibt	0,09900	0,08252	0,07262	0,07243
Unterschied	+ 160	- 112	+ 114	- 90

Berechnet man mit den oben gegebenen ν den der Gewichtseinheit zukommenden w. F., so findet er sich 0,00395, während er nach den Bestimmungen selbst 0,00370 war. Es zeigt sich also, dass die 4 Werthe λ der angenommenen Form $A + \frac{\chi}{A}$ fast so genau entsprechen, als es nach den in ihnen vorhandenen w. F. zu erwarten war, und dass sie folglich für die Gültigkeit dieser Form zeugen.

§ 68.

Jetzt haben wir endlich noch die aus den bisherigen Untersuchungen folgenden absoluten Höhen der Berge abzuleiten. Nach § 57 ist

die Höhe des Beschtai	=	55073 + y^I	Zoll,
“ “ “ Elbrus Westkuppe	=	222167 + y^{II}	“
“ “ “ Elbrus Ostkuppe	=	221322 + y^{III}	“
“ “ “ Kasbek	=	198564 + y^{IV}	“
“ “ “ Anonymus	=	203226 + y^V	“

Zur Bestimmung von $y^I \dots y^V$ führen die Gleichungen § 60 (○), wenn wir in diese die Endwerthe für η und x substituiren. Für x haben wir bei Beschtai und bei den 4 hohen Bergen einen etwas verschiedenen Werth zu setzen. Es ist nämlich, nach § 67 :

$$\text{für Beschtai} \quad \lambda = 0,072624 = 0,073689 - 0,001065; \quad \text{w. F.} = 0,000535,$$

$$\text{für die hohen Berge} \quad \lambda = 0,072433 = 0,073689 - 0,001256; \quad \text{w. F.} = 0,000535;$$

$$\text{und wir haben für Beschtai} \quad x = -\frac{0,1065}{0,07369} = -1,445 \quad \text{w. F.} = 0,0726.$$

$$\text{für die hohen Berge} \quad x = -\frac{0,1256}{0,07369} = -1,703 \quad \text{w. F.} = 0,0726.$$

Für alle 5 Berge gemeinsam gilt, nach § 63, $\eta = -9,062$, w. F. = 8,191.

I. *Beshtau.*

Die Gleichung § 61 (○) $y' = +1,3829 - 2,407x + 0,00311\eta$, mit dem w. F. 3,53,
 gibt jetzt $y' = +1,38 + 3,47 - 0,03 = +4,82$ Z., « « « « $\mp 3,53 \mp 1,74 \mp 0,03 = 3,9$.
 Höhe des Beshtau = 55077,8 Zoll, mit dem w. F. 3,9 Zoll.

II. *Elbrus Westkuppe.*

Die Gleichung $y'' = -10,704 - 78,852x + 0,266\eta$, mit dem w. F. 40,71,
 gibt $y'' = -10,70 + 134,42 - 2,41 = +121,3$ Zoll, « « « « $\mp 40,71 \mp 57,25 \mp 2,17 = 70,3$.
 Höhe des Elbrus W. = 222288,3 Zoll, w. F. 70,3 Zoll.

III. *Elbrus Ostkuppe.*

Die Gleichung $y''' = -33,761 - 83,728x - 1,075\eta$, mit dem w. F. 43,43,
 gibt $y''' = -33,76 + 142,75 + 9,74 = 118,7$ Zoll, « « « « $\mp 43,43 \mp 60,80 \mp 8,81 = 75,2$.
 Höhe des Elbrus O. = 221440,7 Zoll, w. F. 75,2 Zoll.

IV. *Kasbek.*

Die Gleichung $y'' = -7,675 - 64,427x + 2,375\eta$, mit dem w. F. 26,33,
 gibt $y'' = -7,67 + 109,78 - 21,52 = +80,6$ Z., « « « « $\mp 26,33 \mp 46,77 \mp 19,45 = 57,1$.
 Höhe des Kasbek = 198644,6 Zoll, w. F. 57,1 Zoll.

V. *Anonymus.*

Die Gleichung $y' = -4,306 - 51,824x + 1,5445\eta$, mit dem w. F. 29,73,
 gibt $y' = -4,31 + 88,33 - 14,00 = +70,0$ Zoll, « « « « $\mp 29,73 \mp 37,62 \mp 12,65 = 49,6$.
 Höhe des Anonymus = 203296,2 Zoll, w. F. 49,6 Zoll.

Die gegebenen w. F. sind hier aus der Verbindung dreier partieller w. F. entstanden. Es ist z. B. für Elbrus W. 40,71 Zoll der w. F., welchen die Unsicherheit der Messungen selbst nachgelassen hat, wobei die zufälligen Unregelmässigkeiten der Strahlenbrechung den grössten Antheil haben, die eigentlichen Beobachtungsfehler einen nur geringen. Die 2te Zahl, 57,25 Zoll, ist der w. F. der Höhe, welcher von der in λ , dem mittleren Refractionscoefficienten, nachgebliebenen Unsicherheit herrührt; die 3te, 2,17 Zoll, ist der Fehler, den die Unsicherheit des Thermometercoefficienten $1 + \gamma$ für die Höhenbestimmung erzeugt. Der Totalbetrag des w. F. ist $\sqrt{(40,71^2 + 57,25^2 + 2,17^2)} = \mp 70,3$ Zoll. Es ist ersichtlich, dass die übrig gebliebene Unsicherheit von λ die Genauigkeit der Berghöhen am bedeutendsten beeinträchtigt hat, während der Einfluss des Thermometercoefficienten fast verschwindend ist, weil die Sommerbeobachtungen, auf denen die Berghöhen fast ausschliesslich beruhen, für jeden Berg eine mittlere Temperatur haben, die sehr wenig von $+16^\circ,0$ abweicht, für welchen Stand der Refractionscoefficient λ gilt.

Die so gefundenen Zahlen geben die w. F. des Höhenunterschiedes zwischen den Bergspitzen und den Standpunkten. Um also die vollständigen w. F. der Meereshöhen zu erhalten, müssen noch die w. F. der Standpunkte selbst hinzugezogen werden. Für den ersten Standpunct p^{70} ist, nach Seite LIX, der w. F. der Meereshöhe 6,90 Zoll, für den letzten a^{87} , nach Seite LXI, 7,90 Zoll. Wir können daher ohne Be-

Wenn in einem Dreiecke, von den Winkeln A, B, C , nur die beiden an der gegebenen Grundlinie c liegenden Winkel, A und B , gemessen sind, und beide einem w. F. von f Secunden unterliegen, so findet sich der w. F. der beiden berechneten Seiten a und b einfach auf folgende Weise. Es seien α, β, γ die einer Bogensecunde entsprechenden Veränderungen von $\log \sin A, \log \sin B$ und $\log \sin C$, in Einheiten der 7ten Decimale, positiv genommen für den spitzen Winkel, negativ für den stumpfen, so ist

$$\frac{da}{a} = \frac{f\sqrt{((\alpha+\gamma)^2+\gamma^2)}}{4342945}, \quad \frac{db}{b} = \frac{f\sqrt{((\beta+\gamma)^2+\gamma^2)}}{4342945}.$$

Betrachten wir nun die Dreiecke der äussersten nach jedem der Berge gezogenen Gesichtslinien, so finden wir mit hinreichender Genauigkeit:

	für Beschtai	Elbrus	Kasbek	Anonymus
Grundlinie $c = P^{70} - P^{75}$	$B^{70} - P^{88}$	$P^{75} - B^{95}$	$P^{75} - P^{88}$	
$A = 93^\circ$	97°	51°	93°	
$B = 50$	43	77	50	
$C = 37$	40	52	37	
$da = \frac{a}{14000}$	$\frac{a}{15900}$	$\frac{a}{14500}$	$\frac{a}{14000}$	
$db = \frac{b}{10200}$	$\frac{b}{10100}$	$\frac{b}{20100}$	$\frac{b}{10200}$	

Es ergibt sich also, dass, wenn der w. F. der Abstände im allgemeinen auf $\frac{1}{10000}$ angesetzt wird, wir ihn zu gross annehmen, weil keiner der obigen da und db so beträchtlich ist, und überdies alle Entfernungen durch die Zuziehung der andern Richtungen noch sicherer geworden sein müssen. Dem angenommenen w. F. der Distanz $= \frac{1}{10000}$ entspricht ein ebenso grosser Theil des Höhenunterschiedes als w. F. der Höhe, also

für Beschtai	von	Quadrat	Vollständiges Quadrat des w. F.	vollständ. w. F. d. Meereshöhe	
4,2 Zoll	17,6	69,3 + 2,0 + 17,6 =	88,9	9,4 Zoll	
« Elbrus W.	« 21,4 «	458	4994 + 50 + 458 =	5502	74,2 «
« Elbrus O.	« 21,2 «	449	5716 + 49 + 449 =	6214	78,8 «
« Kasbek	« 19,1 «	365	3314 + 41 + 365 =	3720	61,0 «
« Anonymus	« 19,4 «	376	2514 + 42 + 376 =	2932	54,1 «

Schliesslich haben wir noch zu beachten, dass, nach Seite xiv, alle linearen Dimensionen noch um $\frac{1}{45855}$ ihres Betrages zu vermindern sind. Diese Reduction ist bei der Berechnung des Nivellements zwischen beiden Meeren als ganz unbedeutend vernachlässigt. Für die Berghöhen ist sie in Rechnung zu führen, und beträgt für Beschtai $-1,2$, für Elbrus W. $-4,8$, für Elbrus O. $-4,8$, für Kasbek $-4,3$, für Anonymus $-4,4$ Zoll. Wenn wir diese Verbesserungen an die Zahlen des § 68 anbringen, so gelangen wir zu den *Endresultaten der Berghöhen*:

Definitive Werthe der Berghöhen.

			Unterschied der früheren Best.-Seite
Beshtau	55077,6 Zoll, w. F. = 9,4 Zoll		— 6 Zoll
Elbrus W.	222283,5 " " " = 74,2 "		— 116 "
Elbrus O.	221435,9 " " " = 78,8 "		— 81 "
Kasbek	198640,3 " " " = 61,0 "		— 102 "
Anonymus	203291,8 " " " = 54,1 "		— 59 "

Die hier gegebenen Höhen der Berge sind als das wahrscheinlichste Resultat aus dem Complexe aller als geeignet angezeigten Beobachtungen anzusehen. Die angegebenen w. F. sind aus der Betrachtung aller die Genauigkeit beeinträchtigenden Fehlerquellen gefunden, und ich glaube, dass keine einzige von mir übersehen ist. Interessant ist mir, wie nahe die frühere Bestimmung, Seite LXV, der neuen steht. Für Beshtau ist der Unterschied kleiner als der w. F. der Endbestimmung; für die andern 4 Berge beträgt er im Mittel das 1,30fache des w. F. Der Vorzug der neuen Bestimmung liegt aber gerade darin, dass sie wirklich die wahrscheinlichsten Werthe gibt, und dass die Sicherheit derselben durch die genau ermittelten w. F. richtig erkannt ist. Dass alle Berghöhen etwas grösser geworden sind, ist eine Folge der Verminderung der Refractionscoefficienten, zu der ich gelangt bin.

Da Berghöhen in Zollen ausgedrückt ungewöhnlich und unbequem sind, so gebe ich im nachfolgenden die Berghöhen nach 4 verschiedenen gebräuchlicheren Maasseinheiten.

§ 69.

Endwerthe der Höhen der Berge des Caucasus über dem Asow'schen Meere.

	engl. Fuss	Saschen.	Toisen.	Mètres.
Beshtau	4589,8 ± 0,8	655,7 ± 0,1	717,8 ± 0,1	1398,9 ± 0,2
Elbrus Westkuppe	18523,6 ± 6,2	2646,2 ± 0,9	2896,8 ± 1,0	5645,9 ± 1,9
Elbrus Ostkuppe	18453,0 ± 6,6	2636,1 ± 0,9	2885,7 ± 1,0	5624,4 ± 2,0
Kasbek	16553,4 ± 5,1	2364,8 ± 0,7	2588,6 ± 0,8	5045,4 ± 1,5
Anonymus	16941,0 ± 4,9	2420,1 ± 0,7	2649,3 ± 0,7	5163,5 ± 1,4

§ 70.

Nach den bisherigen Untersuchungen ist der vollständige Ausdruck des jedesmaligen normalen Refractionscoefficienten

$$\mu = \left(0,072383 + \frac{0,42586}{A} \right) \cdot \frac{B}{29,00} \cdot 1,014819; \quad (16-T)$$

w. F. 535 4904 819

worin

- A* die mittlere Höhe der Gesichtslinie über dem Erdboden, oder an deren Stelle den halben Höhenunterschied des Standpunctes und des Objects, in engl. Fussen, bedeutet,
- B* die in englischen Zollen ausgedrückte, auf die Temperatur des Gefrierpunctes reducirte Höhe der Quecksilbersäule des Barometers, am Orte des Beobachters,
- T* die Lufttemperatur am Ort des Beobachters nach der Réaumur'schen Scale.

Um die Formel auch für andere Maasseinheiten zu brauchen, sind folgende Substitutionen zu machen:

$$\begin{aligned} \frac{0,42586}{A} &= \frac{0,066598}{A'}, \text{ wenn die mittl. Höhe der Gesichtslinie } A' \text{ Toisen beträgt,} \\ &= \frac{0,12980}{A''}, \text{ " " " " " " " " } A'' \text{ Mètres "} \\ \frac{B}{29,00} &= \frac{B'}{326,525}, \text{ wenn die Barometerhöhe } B' \text{ pariser Linien ist,} \\ &= \frac{B''}{736,586}, \text{ " " " " " " " " } B'' \text{ Millimètres "} \\ 1,014819 &= \frac{(16-T)}{1,011838}, \text{ wenn die Lufttemperatur } = T' \text{ Grade der 100theiligen Scale,} \\ &= \frac{(20-T')}{1,006559}, \text{ " " " " " " " " } = T'' \text{ " " " " " " " " } \text{ Fahrenheit'schen " .} \end{aligned}$$

Am Schlusse dieses Aufsatzes ist eine Tafel gegeben, durch welche die Anwendung unserer Formel erleichtert wird.

§ 21.

Ich glaube hier einige Betrachtungen über die Resultate der geführten Untersuchung und über den Weg, wie dieselben durch neue Erfahrungen bestätigt oder berichtigt, und erweitert werden können, so wie einige andere diesen Gegenstand betreffende Bemerkungen hinzufügen zu dürfen.

1. Ramond gibt in seiner berühmten Abhandlung: *Mémoires sur la formule barométrique 1811*, Seite 35 und 234 als erstes Beispiel der Anwendung seiner Formel die Berechnung der Höhe des Chimborazo, aus der von H. v. Humboldt auf dem Berge angestellten Barometerbeobachtung, verglichen mit einer correspondirenden am Ufer des Oceans, und findet die Höhe 5879,2 Mètres. Wenn man die Höhen des Barometers auf 0° des Quecksilbers reducirt, so sind uns folgende Stände gegeben:

	Meeresufer	Chimborazo	
B'	336,4	166,9	par. Linien,
T'	+25°,3	-1°,6	Centigr.,
A''	2940		Mètres.

Berechnet man hiemit nach den obigen Formeln für eine fingirte reciproke Beobachtung der Zenithdistanzen auf dem Chimborazo und am Meeresufer die beiden normalen Refractionscoefficienten, so erhält man:

für die Beob. am Meeresufer $\mu = 0,07009$,
 " " " auf dem Chimborazo $\mu = 0,04671$.

Es ist also das 2te μ genau $\frac{2}{3}$ des ersten, obgleich die Barometerhöhe B' auf dem Berge nur 0,496 oder kaum die Hälfte des B' am Meeresufer beträgt. Unsere Formel spricht also aus, dass die Tangente der Curve des Lichtstrahls in ihren äussersten Puncten mit der die beiden Puncte verbindenden geraden Linie verschiedene Winkel bildet; und dies ist naturgemäss. Es zeigt sich ferner, dass der gefundene Thermometercoefficient bedeutend dahin wirkt, die beiden Refractionen einander zu nähern. Fraglich bleibt aber, ob das nach unserer Formel für den Chimborazo ge-

fundene μ auch das wirklich dort stattfindende ist, weil unsere Formel auf einem zwar sehr umfangreichen Materiale beruht, in welchem aber Beobachtungen von den hohen Puncten aus fehlen. Um über den fraglichen Punct zur Entscheidung zu gelangen, sind gleichzeitige, bei ruhigen Bildern angestellte reciproke Beobachtungen auf 2 Puncten von bedeutendem Höhenunterschiede zu machen, und zwar mit Instrumenten, deren Biegungscoefficienten bekannt sind. Zu diesen Beobachtungen, die unmittelbar die Summe der beiden Refractionen an den Endpuncten geben würden, muss aber, wenn diese einzeln erkannt werden sollen, noch die unabhängige Bestimmung des Höhenunterschiedes hinzukommen, und dieser kann nur erreicht werden, wenn eine eigene Operation zwischen den beiden Puncten ausgeführt wird, die den ganzen Höhenunterschied in so kleine Theile zerlegt, dass bei ihnen der Einfluss der Refraction eliminirt oder wenigstens unschädlich gemacht wird: Ich sehe die grossen Schwierigkeiten der Ausführung einer solchen Arbeit ein, wage aber doch hier den Vorstehern der in der Nähe eines Gebirges belegenen Sternwarten, so wie den mit geodätischen Arbeiten in gebirgigen Gegenden beschäftigten Männern die Ausführung derselben als ein dringendes Bedürfniss für einen weitem Fortschritt in der Kenntniss der irdischen Strahlenbrechung auf's dringendste zu empfehlen.

2. Dem ersten Anscheine nach liegt für den Ausdruck

$$\lambda = 0,072383 + \frac{0,42586}{A}$$

die Hauptquelle der Unsicherheit im 2ten Gliede, weil dasselbe auf einer nicht strenge zu erweisenden Annahme begründet wurde. Zu einer klareren Einsicht über den Antheil dieses Gliedes führt folgende Tafel der λ , für verschiedene A , von $A=10$ Fuss bis $A=15000$ Fuss, also bis jenseits der den höchsten Bergen der Erde zukommenden A , berechnet.

$A =$	$\lambda =$	$A =$	$\lambda =$	$A =$	$\lambda =$	$A =$	$\lambda =$
10 Fuss	0,11497	100 Fuss	0,07664	1000 Fuss	0,07281	10000 Fuss	0,07243
20 "	0,09368	200 "	7451	2000 "	7260	11000 "	7242
30 "	8658	300 "	7380	3000 "	7252	12000 "	7242
40 "	8303	400 "	7345	4000 "	7249	13000 "	7242
50 "	8090	500 "	7323	5000 "	7247	14000 "	7241
60 "	7948	600 "	7309	6000 "	7245	15000 "	7241
70 "	7847	700 "	7299	7000 "	7244		
80 "	7771	800 "	7292	8000 "	7244		
90 "	7712	900 "	7286	9000 "	7243		
100 "	7664	1000 "	7281	10000 "	7243		

Für grössere Höhenunterschiede A ist die Veränderung von λ so geringe, dass wir für $A=800$ Fuss $\lambda = 0,07292$, für $A=15000$ Fuss $\lambda = 0,07241$ in unserer Tafel finden, und der erste Werth noch auf der wahrscheinlichen oberen Gränze des für $A=\infty$ gefundenen $\lambda = 0,072383 \mp 0,000535 = 0,07292$ liegt. Demzufolge stellt sich die Höhenbestimmung für Puncte, die mehr als 1600 Fuss

über dem Standpunct erhaben sind, als fast unabhängig vom 2ten Gliede in λ heraus. Erst bei kleinen Erhebungen A wird die Zunahme von λ bedeutend. Es ist aber zu beachten, dass hier der Einfluss des 2ten Gliedes dadurch wieder vermindert wird, dass mit der kleinen Erhebung der Gesichtslinie immer eine geringe Entfernung der Objecte verbunden ist, und so der Einfluss des 2ten Gliedes auf die Höhenbestimmung selbst sehr unbedeutend wird. Ich werde dies durch ein Beispiel erläutern. Die Amplitudo zwischen dem Centro der Sternwarte in Pulkowa und dem 65192 Fuss = 18,626 Werst entfernten Festungsthurm in St. Petersburg beträgt 642,2 Secunden der Erdcurve. Die mittlere Höhe der Gesichtslinie über dem Erdboden ist sehr genau 270 Fuss für ein 5 Fuss über dem Eingang zur Sternwarte gestelltes Instrument. Bei einem Barometerstande von $B = 30,00$ Zoll, und $T = +16^{\circ},0$ R. der Lufttemperatur, haben wir also

$$\mu = \left(0,072383 + \frac{0,42586}{270} \right) \cdot \frac{30,00}{29,00} = 0,07488 + 0,00163 = 0,07651.$$

$$\varrho = 642,2 \cdot (0,07488 + 0,00163) = 48,08 + 1,05 = 49,13.$$

Der von A abhängige 2te Theil von ϱ beträgt also nur 1,05, und ist selbst hier noch kleiner als der w. F. der mit tragbaren Höheninstrumenten gemessenen Zenithdistanzen. Der Einfluss dieser 1,05 auf die Höhe ist nur 0,33 Fuss = 3,98 Zoll.

Die Bestimmung des zu A gehörigen Coefficienten bietet daher mehr ein physicalisches als ein geodätisches Interesse dar. Nichts desto weniger ist eine genauere Bestimmung von λ , für mässige A , wie sie in einem Flachlande, das noch keine Steppe ist, vorkommen, wünschenswerth, weil die beiden von mir für kleine A benutzten λ , theils den geringen Erhebungen von 16 und 42 Fuss angehören, theils auf sehr kurzen Entfernungen beruhen. Die Oertlichkeit der Pulkowaer Sternwarte eignet sich für diese Bestimmung und bietet überdies die Gelegenheit dar, den Thermometercoefficienten durch Beobachtungen zwischen -24° und $+24^{\circ}$ R. von neuem zu prüfen. Beide Arbeiten werden in den Kreis unserer Beschäftigungen aufgenommen werden. Das geeignetste Object für diesen Zweck ist der oben erwähnte Festungsthurm in St. Petersburg, für den bei $B = 30,00$ Zoll, nach unserer Formel die Refraction bei $+24^{\circ}$ gleich 43,6 wäre, bei -24° aber 88,4, mehr als das Doppelte. Ist die Entfernung auch keine grosse, indem C nur 642,2 beträgt, so kann dennoch eine bedeutende Sicherheit durch Anwendung eines sehr genauen Instruments, wie unser tragbarer Repsoldscher Verticalkreis, erreicht werden, wenn durch Beobachtungen von der Mitte aus der Höhenunterschied mit voller Sicherheit bestimmt sein wird. Hiebei wird es indess erst erforscht werden müssen, ob eine 399 Fuss über dem Grunde erhabene Thurmspitze zwischen $+24^{\circ}$ bis -24° R., durch die Einwirkung der Temperatur auf das Gebäude, ihre absolute Höhe ändert oder nicht. Beobachtungen von einem mittleren Standpuncte aus zu verschiedenen Jahreszeiten gemacht werden darüber entscheiden.

Ein genäherter Werth von λ , für mässige A , lässt sich aus dem Material der *Gradmessung in den Ostseeprovinzen*, Band I. Seite 204, ableiten. Hier finden wir für die Polhöhe 58° und die

Zeit des hohen Sommers, genauer für den Julius-Monat, mehrere Werthe von λ verzeichnet, und namentlich

für 4,4 Uhr w. Z., $\lambda = 0,0619$,

« 5,94 « « « $\lambda = 0,0728$,

« 7,55 « « « $\lambda = 0,1000$.

Das 2te λ ergab sich aus den reciproken, aber nicht gleichzeitigen Zenithdistanzen, die *kurz vor dem Eintreten der Ruhe der Bilder* gemessen wurden, weil ich, so wie diese stattfand, die horizontale, für den Hauptzweck wichtigere Winkelmessung begann. Die Zeit der völligen Ruhe der Bilder ist sehr nahe auf 6 Uhr 20^m zu setzen. Interpolirt man nun aus den 3 Zahlen das für 6,33 Uhr geltende λ , so findet sich $\lambda = 0,0758$, eine Bestimmung, die sehr sicher ist. Der mittlere Barometerstand kann hier nahezu auf 29,5 Zoll gesetzt werden, und die mittlere Höhe der Gesichtslinie über dem Erdboden auf etwa 180 Fuss. Für dieses A finden wir in der obigen Zusammenstellung für $b = 29,00$ und $T = +16^{\circ},0$ ein $\lambda = 0,0747$, also für $B = 29,5$ Zoll, $\lambda = 0,0760$, eine Zahl, die mit der aus den Beobachtungen der Gradmessung abgeleiteten $\lambda = 0,0758$ als identisch angesehen werden kann, und also eine völlige Bestätigung darbieten würde, wenn wir über die mittlere Temperatur bei jenen Beobachtungen sicher wären. Leider hatte ich damals, in den Jahren 1823 bis 1827, keine Ahnung von der Wichtigkeit der Temperatur für die Untersuchung der Strahlenbrechung, und so wurden bei den Zenithdistanzen der irdischen Objecte keine Thermometerablesungen gemacht. Gewiss ist indess, dass im Juli-Monat, bei heiteren Tagen, um 6 Uhr 20^m die mittlere Temperatur sehr nahezu $+16^{\circ}$ R. gewesen sein muss, und dass hier kaum eine Unsicherheit von einem Grade obwaltet.

3. Ich habe *a priori* in dem Ausdruck für μ angenommen, dass die normale irdische Strahlenbrechung der Barometerhöhe proportionirt sei. Es ist wünschenswerth, dass dieser Satz durch Bestimmungen von μ in grösseren Höhen bestätigt, oder vielleicht berichtigt werde.
4. Bei der Messung grosser Höhen, für welche eine rasche Erhebung der Gesichtslinie stattfindet, lässt sich der Werth von λ als unabhängig von der Eigenthümlichkeit der Erdoberfläche ansehen. Anders kann es aber sein, wenn die Erhebung der Gesichtslinie über dem Boden eine geringe ist; denn gewiss ist das Gesetz der Abnahme der Wärme mit der Höhe, im allgemeinen, ein anderes, wenn der Lichtstrahl über festes Land, als wenn er über eine Wasserfläche hinget; ja wir können uns denken, dass selbst die Beschaffenheit des Landes einen Einfluss äussert, und dass ein Unterschied stattfindet über einer dünnen Sandfläche, einer Steppe, und über einer grünen, von voller Vegetation gedeckten Gegend. Zugleich aber wird es wahrscheinlich, dass die Modificationen, die unter andern Umständen vorhanden sind und die eigentlichen Störungen der Strahlenbrechung hervorrufen, für die Zeit der ruhigen Bilder verschwinden, wenn hierin gerade die Bedingung der Ruhe der Bilder liegen sollte. Wenn der tägliche Gang der irdischen Refraction über Land ziemlich genau bekannt ist, so sind dagegen die Veränderungen derselben, wenn der Lichtstrahl in geringer Höhe über eine Wasserfläche hinstreicht, noch wenig erörtert, und ver-

dienen die Aufmerksamkeit der Gelehrten. Es ist kaum zu bezweifeln, dass das Minimum der täglichen Strahlenbrechung über See auf ganz andere Stunden falle, als über Land, wo bekanntlich dies Minimum um Mittag oder vielmehr etwas später gegen die Zeit der grössten Tageswärme eintritt.

5. Ueber den nächtlichen Gang der irdischen Strahlenbrechung ist, so viel ich weiss, wenig nachgeforscht worden. Eine Beobachtungsreihe, die ich vor etwa 20 Jahren in Dorpat anfang, die aber bald anderer Arbeiten wegen unterbrochen wurde, zeigte während mehrerer Nächte, in denen un- ausgesetzt von Sonnenuntergang bis Sonnenaufgang die Zenithdistanzen einer 10320 Toisen = 19 Werst entfernten, eigens für den Zweck aufgestellten Lampe gemessen wurden, auffallend geringe Veränderungen der Refraction bei Nacht an, und fast gleiche Werthe derselben bei wesentlich verschiedenen Zuständen der Atmosphäre. Bei diesen Beobachtungen war die mittlere Höhe der Gesichtslinie über dem Erdboden nahezu 90 engl. Fuss.
6. Wenn ich in der ausgeführten Untersuchung die theoretische Betrachtung der Strahlenbrechung fast ganz beseitigt, und vielmehr den Weg der Erfahrung eingeschlagen habe, so glaube ich, dass dies Verfahren in der Schwierigkeit für eine theoretische Untersuchung, die in der Anwendung von Erfolg sein sollte, die Grundlagen zu gewinnen, seine völlige Rechtfertigung findet. Erst wenn wir über mehrere Punkte aus der Erfahrung hinlängliche Data geschöpft haben werden, kann es an der Zeit sein, die Analyse auf dies verwickelte Phänomen anzuwenden. Vielleicht gelingt es alsdann, eine vollständige Theorie der normalen Refraction zu geben, d. h. derjenigen, bei welcher der Normalzustand der Atmosphäre durch die Ruhe der Bilder erkannt wird. Schwerlich wird aber die Wissenschaft je in der Kenntniss der gestörten Refractionen so weit fortschreiten, dass sich diese durch Rechnung bestimmen lassen, weil wir hier nicht mit allgemeinen, sondern mit örtlichen Verhältnissen zu thun haben, die sich fast gänzlich der Rechnung entziehen.

§ 72.

Als Hauptresultate meiner Untersuchung lassen sich folgende Sätze ansehen:

1. Es gibt einen Zustand der Atmosphäre, für welchen die irdische Strahlenbrechung mit grosser Sicherheit berechnet werden kann, und dieser Zustand tritt in der Regel zwei Mal am Tage ein, ein Mal in den Frühstunden, ein anderes Mal in den Nachmittagsstunden, und wird in einem hinlänglich vergrössernden Fernrohre durch die Ruhe des Bildes, d. h. durch die Abwesenheit des Schwirrens, mit Zuverlässigkeit erkannt. In der Regel ist der Zustand der Ruhe der Bilder von längerer Dauer, und vollkommener in den Nachmittagsstunden als in den vormittägigen, und seine Mitte fällt in den Sommermonaten, in unseren Breiten, auf etwa 0,7 des Zeitintervalls von Mittag bis Sonnenuntergang. In grösseren Abständen vom Solstitio ist der Bruch wohl etwas kleiner. Die genäherte Kenntniss der Zeit der ruhigen Bilder ist für die Anwendung bequem. Sie kann aber immer nur eine genäherte sein, weil jede atmosphärische Veränderung, vorzüglich die Bildung und das Verschwinden der Wolken, die Zeit der ruhigen Bilder ändert. Wie diese Veränderung

aber auch sein mag, so wie die Ruhe der Bilder da ist, findet die normale Refraction statt. Selten dauert die Ruhe der Bilder selbst am Nachmittage länger als eine Stunde, aber diese Zeit ist hinreichend für die Beobachtung. Es wird dem Beobachter aber nicht entgehen, dass, wenn er z. B. bei völliger Ruhe des Bildes um 6 Uhr und um 7 Uhr eine Zenithdistanz beobachtet, die letzte eine Vermehrung der Refraction zeigt. Diese ist aber keine Störung, sondern nur der normale Zuwachs, den die Refraction durch die Abnahme der Temperatur der Luft erhält. Zu jeder trigonometrischen Höhenmessung zur Zeit der normalen Refraction sind die Angaben des Barometers und des Thermometers unerlässlich.

2. Das wichtigste Element bei der Bestimmung der normalen Refraction ist die Temperatur der Luft. Wir sahen aus § 70, dass, bei einer Vermehrung der Temperatur um 1° R., die Refraction um 0,014819 ihres Betrages vermindert wird, während die Abnahme der Dichtigkeit der Luft nur 0,0045 beträgt, § 52. Es ist also der Thermometercoefficient der Refraction 3,29 Mal stärker, als der Thermometercoefficient der Dichtigkeit. Hieraus folgt unmittelbar, dass die Grösse der Refraction nicht sowohl von der Dichtigkeit der Luft am Orte der Beobachtung bedingt ist, als von dem Gesetze der mit der Höhe stattfindenden Veränderung derselben. Je rascher die Dichtigkeit der Luft mit der Höhe abnimmt, desto grösser ist die Refraction. Die Abnahme der Temperatur wirkt, indem sie eine Verdichtung der höheren Luftschichten erzeugt, der Abnahme der Dichtigkeit nach dem Mariotteschen Gesetze entgegen, und es folgt daraus, dass die Refraction desto kleiner ausfallen muss, je rascher die Temperatur mit der Höhe sich vermindert. Nothwendiger Weise ist aber die Verminderung der Temperatur mit der Höhe im Winter eine langsamere als im Sommer, denn in einer gewissen, vielleicht sehr bedeutenden Höhe müssen wir eine constante Temperatur setzen. Auch die Erfahrungen zeigen eine schnellere Abnahme der Wärme im Sommer als im Winter an. Siehe Kämtz *Lehrbuch der Meteorologie, Band I. Seite 137*. Wir haben also im Winter, in Folge der langsameren Abnahme der Temperatur, eine raschere Abnahme der Dichtigkeit der über einander liegenden Luftschichten als im Sommer, und hierin den Hauptgrund der grösseren irdischen Strahlenbrechung im Winter zu suchen.

3. Für die Anwendung, d. h. für die Höhenbestimmung vermittelst der Zenithdistanzen, bei gegebenen Abständen, stellt sich also folgende einfache Vorschrift heraus:

Für die trigonometrische Höhenbestimmung können keine andere Beobachtungen mit Sicherheit benutzt werden, als diejenigen, bei denen die Ruhe der Bilder stattfindet, und je vollkommener diese ist, desto sicherer fällt die Höhenbestimmung aus, wenn der Refractionscoefficient mit Hülfe der Formel § 70, aus den Angaben des Barometers und Thermometers und, wenn erforderlich, mit Zuziehung der mittleren Höhe der Gesichtslinie über dem Boden, berechnet wird.

Wir sind im Stande, die Sicherheit einer auf diesem Wege bestimmten Höhenbestimmung anzugeben, weil diese vorzugsweise von dem Betrage der übrigbleibenden, für uns zufälligen Unregelmässigkeiten der Strahlenbrechung abhängt. § 58, Seite xc₁, ist nachgewiesen, dass der wahrscheinliche Betrag der Unregelmässigkeit der Strahlenbrechung, bei den günstigeren nachmittägigen Beobachtungen im Sommer

0,01375 der Strahlenbrechung, oder $\frac{1}{73}$ derselben beträgt. Nun ändert sich aber die Strahlenbrechung für jeden Grad des Réaum. Thermometers um 0,0148 oder um $\frac{1}{68}$. Demnach zeigt sich die Unsicherheit der Formel, bei ihrer Anwendung im einzelnen Falle, geringer als die Einwirkung, die eine Temperatur-Veränderung von 1° ausübt. Es ist jetzt leicht, eine klare Ansicht von dem Belange der w. F. eines mit Hilfe unserer Formel gemachten Höhenbestimmung zu gewinnen, die nothwendiger Weise dem Quadrate des Abstandes, der Amplitudo, proportionirt sein werden. Es reicht hiebei aus, den Mittelwerth des Refractionscoefficienten 0,0724 und für die Grösse einer Bogensekunde auf der Erdoberfläche 101,2 engl. Fuss zu setzen.

Amplitudo	Entfernung in Wersten	Mittlere ird. Refraction	Wahrsch. Un- sicherheit der Refraction.	w. F. der Höhe
$0^\circ 5'$	8,6	22''	0,3	0,04 engl. Fuss
10	17,3	43	0,6	0,18
15	26,0	65	0,9	0,39
20	34,7	87	1,2	0,70
25	43,4	108	1,5	1,1
30	52,0	130	1,8	1,6
40	69,4	174	2,4	2,8
50	86,7	217	3,0	4,7
$1^\circ 0$	104,1	261	3,6	6,3
10	121,4	304	4,1	8,6
20	138,8	348	4,7	11,2
30	156,1	390	5,3	14,2
40	173,5	435	5,9	17,5
50	190,8	478	6,5	21,2
$2^\circ 0$	208,2	521	7,1	25,2

§ 73.

Hilfsmittel zur Berechnung der normalen irdischen
Strahlenbrechung = ϱ .

$\varrho = \mu C$, wenn C die Amplitudo des zwischen dem Beobachter und dem Objecte liegenden geodätischen Bogens ist.

$\mu = \text{I. II. III.}$

$$\begin{aligned} & \text{I} = 0,072383 \cdot 1,014819 \\ \text{Log I} & = 8,85964 + \overset{16-T}{(16-T)} 0,0063886 \left. \vphantom{\text{Log I}} \right\} \text{wenn die Lufttemp.} = T \text{ Grad Réaum.} \\ & \text{I} = 0,072383 \cdot 1,011838 \\ \text{Log I} & = 8,85964 + \overset{20-T'}{(20-T')} 0,0051109 \left. \vphantom{\text{Log I}} \right\} \text{ " " " } = T' \text{ Grad Cent.} \\ & \text{I} = 0,072383 \cdot 1,006559 \\ \text{Log I} & = 8,85964 + \overset{68-T''}{(68-T'')} 0,0028394 \left. \vphantom{\text{Log I}} \right\} \text{ " " " } = T'' \text{ Grad Fahrenh.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Log II} & = \text{Log } B - 1,46240, \text{ wenn die Barometerhöhe} = B \text{ engl. Zoll,} \\ & = \text{Log } B' - 2,51392, \quad \text{ " " " } = B' \text{ par. Linien,} \\ & = \text{Log } B'' - 2,86722, \quad \text{ " " " } = B'' \text{ Millimètres.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{III} & = 1 + \frac{5,8834}{A}, \text{ wenn die mittl. Höhe der Gesichtslinie über dem Boden} = A \text{ engl. Fuss,} \\ & = 1 + \frac{0,92007}{A'}, \quad \text{ " " " " " " " " " } = A' \text{ Toisen,} \\ & = 1 + \frac{1,7932}{A''}, \quad \text{ " " " " " " " " " } = A'' \text{ Mètres.} \end{aligned}$$

$$\text{Log } 5,8834 = 0,76963; \text{ Log } 0,92007 = 9,96382; \text{ Log } 1,7932 = 0,25364.$$

Tafel des Gliedes I für Réaumur'sche Grade T.

Therm. R.	log I	I	Therm. R.	log I	I	Therm. R.	log I	I
-32°	9,1663	0,1466	-10°	9,0257	0,1061	+12°	8,8852	0,0768
-31	9,1599	0,1445	-9	9,0194	0,1046	+13	8,8788	0,0756
-30	9,1535	0,1424	-8	9,0130	0,1030	+14	8,8724	0,0745
-29	9,1471	0,1403	-7	9,0066	0,1015	+15	8,8660	0,0734
-28	9,1407	0,1383	-6	9,0002	0,1000	+16	8,8596	0,0724
-27	9,1343	0,1362	-5	8,9938	0,0986	+17	8,8532	0,0713
-26	9,1280	0,1343	-4	8,9874	0,0971	+18	8,8469	0,0703
-25	9,1216	0,1323	-3	8,9810	0,0957	+19	8,8405	0,0693
-24	9,1152	0,1304	-2	8,9746	0,0943	+20	8,8341	0,0682
-23	9,1088	0,1285	-1	8,9682	0,0930	+21	8,8277	0,0672
-22	9,1024	0,1266	0	8,9619	0,0916	+22	8,8213	0,0663
-21	9,0960	0,1247	+1	8,9555	0,0902	+23	8,8149	0,0653
-20	9,0896	0,1229	+2	8,9491	0,0889	+24	8,8085	0,0644
-19	9,0832	0,1211	+3	8,9427	0,0876	+25	8,8021	0,0634
-18	9,0768	0,1194	+4	8,9363	0,0864	+26	8,7958	0,0625
-17	9,0705	0,1176	+5	8,9299	0,0851	+27	8,7894	0,0616
-16	9,0641	0,1159	+6	8,9235	0,0838	+28	8,7830	0,0607
-15	9,0577	0,1142	+7	8,9171	0,0826	+29	8,7766	0,0598
-14	9,0513	0,1125	+8	8,9108	0,0814	+30	8,7702	0,0589
-13	9,0449	0,1109	+9	8,9044	0,0802	+31	8,7638	0,0580
-12	9,0385	0,1093	+10	8,8980	0,0791	+32	8,7574	0,0572
-11	9,0321	0,1077	+11	8,8916	0,0779	+33	8,7510	0,0564
-10	9,0257	0,1061	+12	8,8852	0,0768	+34	8,7446	0,0555

Tafel des Gliedes I für Centesimal-Grade T'.

Therm. C.	log I	I	Therm. C.	log I	I	Therm. C.	log I	I
-40°	9,1663	0,1466	-13°	9,0283	0,1067	+14°	8,8903	0,0777
-39	9,1612	0,1449	-12	9,0232	0,1055	+15	8,8852	0,0768
-38	9,1561	0,1432	-11	9,0181	0,1042	+16	8,8801	0,0759
-37	9,1510	0,1416	-10	9,0130	0,1030	+17	8,8750	0,0750
-36	9,1458	0,1399	-9	9,0078	0,1018	+18	8,8699	0,0741
-35	9,1407	0,1383	-8	9,0027	0,1006	+19	8,8648	0,0732
-34	9,1356	0,1367	-7	8,9976	0,0995	+20	8,8596	0,0724
-33	9,1305	0,1351	-6	8,9925	0,0983	+21	8,8545	0,0715
-32	9,1254	0,1335	-5	8,9874	0,0971	+22	8,8494	0,0707
-31	9,1203	0,1319	-4	8,9823	0,0960	+23	8,8443	0,0699
-30	9,1152	0,1304	-3	8,9772	0,0949	+24	8,8392	0,0690
-29	9,1101	0,1288	-2	8,9721	0,0938	+25	8,8341	0,0682
-28	9,1050	0,1273	-1	8,9670	0,0927	+26	8,8290	0,0674
-27	9,0998	0,1258	0	8,9618	0,0916	+27	8,8239	0,0667
-26	9,0947	0,1244	+1	8,9567	0,0905	+28	8,8188	0,0659
-25	9,0896	0,1229	+2	8,9516	0,0895	+29	8,8136	0,0651
-24	9,0845	0,1215	+3	8,9465	0,0884	+30	8,8085	0,0644
-23	9,0794	0,1201	+4	8,9414	0,0874	+31	8,8034	0,0636
-22	9,0743	0,1187	+5	8,9363	0,0864	+32	8,7983	0,0628
-21	9,0692	0,1173	+6	8,9312	0,0854	+33	8,7932	0,0621
-20	9,0641	0,1159	+7	8,9261	0,0844	+34	8,7881	0,0614
-19	9,0590	0,1145	+8	8,9210	0,0834	+35	8,7830	0,0607
-18	9,0538	0,1132	+9	8,9159	0,0824	+36	8,7779	0,0600
-17	9,0487	0,1119	+10	8,9108	0,0814	+37	8,7728	0,0593
-16	9,0436	0,1106	+11	8,9056	0,0805	+38	8,7676	0,0586
-15	9,0385	0,1093	+12	8,9005	0,0795	+39	8,7625	0,0579
-14	9,0334	0,1080	+13	8,8954	0,0786	+40	8,7574	0,0572
-13	9,0283	0,1067	+14	8,8903	0,0777	+41	8,7523	0,0565

Tafel des Gliedes I für Fahrenheit'sche Grade T''.

Therm. F.	log I	I	Therm. F.	log I	I	Therm. F.	log I	I
-40°	9,1663	0,1466	- 6°	9,0698	0,1174	+28°	8,9732	0,0940
-39	9,1634	0,1457	- 5	9,0669	0,1162	+29	8,9704	0,0934
-38	9,1606	0,1448	- 4	9,0641	0,1159	+30	8,9675	0,0928
-37	9,1578	0,1438	- 3	9,0612	0,1151	+31	8,9647	0,0922
-36	9,1549	0,1429	- 2	9,0584	0,1144	+32	8,9618	0,0916
-35	9,1521	0,1419	- 1	9,0556	0,1136	+33	8,9590	0,0910
-34	9,1492	0,1410	0	9,0527	0,1129	+34	8,9562	0,0904
-33	9,1464	0,1401	+ 1	9,0499	0,1122	+35	8,9533	0,0898
-32	9,1436	0,1392	+ 2	9,0470	0,1114	+36	8,9505	0,0892
-31	9,1407	0,1383	+ 3	9,0442	0,1107	+37	8,9477	0,0886
-30	9,1379	0,1374	+ 4	9,0414	0,1100	+38	8,9448	0,0881
-29	9,1351	0,1365	+ 5	9,0385	0,1093	+39	8,9420	0,0875
-28	9,1322	0,1356	+ 6	9,0357	0,1086	+40	8,9391	0,0869
-27	9,1294	0,1347	+ 7	9,0328	0,1079	+41	8,9363	0,0864
-26	9,1265	0,1338	+ 8	9,0300	0,1072	+42	8,9335	0,0858
-25	9,1237	0,1330	+ 9	9,0272	0,1064	+43	8,9306	0,0852
-24	9,1209	0,1321	+10	9,0243	0,1058	+44	8,9278	0,0847
-23	9,1180	0,1312	+11	9,0215	0,1051	+45	8,9249	0,0841
-22	9,1152	0,1304	+12	9,0186	0,1044	+46	8,9221	0,0836
-21	9,1123	0,1295	+13	9,0158	0,1037	+47	8,9193	0,0830
-20	9,1095	0,1287	+14	9,0130	0,1030	+48	8,9164	0,0825
-19	9,1067	0,1278	+15	9,0101	0,1024	+49	8,9136	0,0820
-18	9,1038	0,1270	+16	9,0073	0,1017	+50	8,9108	0,0814
-17	9,1010	0,1262	+17	9,0044	0,1010	+51	8,9079	0,0809
-16	9,0982	0,1254	+18	9,0016	0,1004	+52	8,9051	0,0804
-15	9,0953	0,1245	+19	8,9988	0,0997	+53	8,9022	0,0798
-14	9,0925	0,1237	+20	8,9959	0,0991	+54	8,8994	0,0793
-13	9,0896	0,1229	+21	8,9931	0,0984	+55	8,8966	0,0788
-12	9,0868	0,1221	+22	8,9902	0,0978	+56	8,8937	0,0783
-11	9,0840	0,1213	+23	8,9874	0,0971	+57	8,8909	0,0778
-10	9,0811	0,1205	+24	8,9846	0,0965	+58	8,8880	0,0773
- 9	9,0783	0,1198	+25	8,9817	0,0959	+59	8,8852	0,0768
- 8	9,0754	0,1190	+26	8,9789	0,0953	+60	8,8824	0,0763
- 7	9,0726	0,1182	+27	8,9760	0,0946	+61	8,8795	0,0758
- 6	9,0698	0,1174	+28	8,9732	0,0940	+62	8,8767	0,0753

Therm. F.	log I	I	Therm. F.	log I	I	Therm. F.	log I	I
+62 ^o	8,8767	0,0753	+76 ^o	8,8369	0,0687	+ 90 ^o	8,7972	0,0627
+63	8,8738	0,0748	+77	8,8341	0,0682	+ 91	8,7943	0,0623
+64	8,8710	0,0743	+78	8,8312	0,0678	+ 92	8,7915	0,0619
+65	8,8682	0,0738	+79	8,8284	0,0674	+ 93	8,7886	0,0615
+66	8,8653	0,0733	+80	8,8256	0,0669	+ 94	8,7858	0,0611
+67	8,8625	0,0729	+81	8,8227	0,0665	+ 95	8,7830	0,0607
+68	8,8596	0,0724	+82	8,8199	0,0660	+ 96	8,7801	0,0603
+69	8,8568	0,0719	+83	8,8170	0,0656	+ 97	8,7773	0,0599
+70	8,8540	0,0714	+84	8,8142	0,0652	+ 98	8,7745	0,0595
+71	8,8511	0,0710	+85	8,8114	0,0648	+ 99	8,7716	0,0591
+72	8,8483	0,0705	+86	8,8085	0,0644	+100	8,7688	0,0587
+73	8,8454	0,0701	+87	8,8057	0,0639	+101	8,7659	0,0583
+74	8,8426	0,0696	+88	8,8028	0,0635	+102	8,7631	0,0580
+75	8,8398	0,0691	+89	8,8000	0,0631	+103	8,7603	0,0576
+76	8,8369	0,0687	+90	8,7972	0,0627	+104	8,7574	0,0572

