

## Anhang II.

### Darstellung der Massendrücke.

Sollen die Werthe der Massen- oder Beschleunigungsdrücke  $q$  bei den einzelnen Kolbenlagen durch die Ordinaten einer Curve dargestellt werden, so kann dies wie folgt geschehen:

#### a) Durch Rechnung.

Diese benützt die Gleichung (4<sub>1</sub>), indem für die Winkel  $\omega$  die Größen aus einer Winkeltabelle eingesetzt und die Resultate in einem beliebigen Maßstabe als Ordinaten  $y$  in ein Diagramm eingetragen werden, welches als Abscissen  $x$  die Kolbenlagen bei den zugehörigen Erhebungswinkeln  $\omega^0$  der Kurbel erhält.

Die verschiedenen Lagen des Kolbens sind hierbei früher aus dem Kurbelmechanismus unter Berücksichtigung der endlichen Stangenlänge zeichnerisch zu ermitteln.

Die gerechneten Größen für eine Reihe von Kurbelstellungen im Sinne des Hinganges sind in der Tabelle 1 auf der folgenden Seite zusammengestellt.

Für den Rückgang, welcher dieselbe Curve nur umgekehrt ergeben muss, gelten dieselben Werthe; doch wären die Winkelgrade von rückwärts zu zählen, wenn man sie von dortab construiren will.

Dabei ist der Werth  $\frac{F}{f} = 1 = 1$  Kilogr. per  $1 \text{ cm}^2 = 1$  Atm. genommen.

Für andere Beträge dieser Größe  $\frac{F}{f} = \frac{P}{f} \cdot \frac{w^2}{g \cdot r}$  ist der Tabellenwerth  $\frac{F}{f}$  mal zu nehmen, und im Höhenmaßstabe der Dampfdrücke in das Diagramm zu zeichnen.

Am besten werden die Tabellenwerthe für  $\frac{F}{f} = 1$  direct aufgetragen, und die Multiplication für das thatsächliche  $\frac{F}{f}$  mit dem Zirkel oder einem Proportionswinkel vorgenommen, wodurch jede weitere Rechnung hier entfällt.

**Tabelle 1.**  
**Werthe der Beschleunigungsdrücke bei den einzelnen Lagen der Kurbel.**  
**Tabelle für die Construction der Beschleunigungscurve.**

$\omega$	$\cos \omega$	$\cos 2\omega$	$\frac{r}{L} \cdot \cos 2\omega$			$\cos \omega + \frac{r}{L} \cos 2\omega$		
			$\frac{r}{L} = \frac{1}{4}$	$\frac{r}{L} = \frac{1}{5}$	$\frac{r}{L} = \frac{1}{6}$	$\frac{r}{L} = \frac{1}{4}$	$\frac{r}{L} = \frac{1}{5}$	$\frac{r}{L} = \frac{1}{6}$
0°	1	1	0.2500	0.2000	0.1666	1.2500	1.2000	1.1666
10°	0.9848	0.9397	0.2349	0.1879	0.1566	1.2197	1.1727	1.1414
20°	0.9397	0.7660	0.1915	0.1532	0.1277	1.1312	1.0929	1.0674
30°	0.8660	0.5000	0.1250	0.1000	0.0833	0.9910	0.9660	0.9493
40°	0.7660	0.1736	0.0434	0.0347	0.0289	0.8094	0.8007	0.7949
50°	0.6428	-0.1736	-0.0434	-0.0347	-0.0289	0.5994	0.6081	0.6139
60°	0.5000	-0.5000	-0.1250	-0.1000	-0.0833	0.3750	0.4000	0.4167
70°	0.3420	-0.7660	-0.1915	-0.1532	-0.1277	0.1505	0.1888	0.2143
80°	0.1736	-0.9397	-0.2349	-0.1879	-0.1566	-0.0613	-0.0143	0.0170
90°	0	-1	-0.2500	-0.2000	-0.1666	-0.2500	-0.2000	-0.1666
100°	-0.1736	-0.9397	-0.2349	-0.1879	-0.1566	-0.4085	-0.3615	-0.3302
110°	-0.3420	-0.7660	-0.1915	-0.1532	-0.1277	-0.5385	-0.4952	-0.4697
120°	-0.5000	-0.5000	-0.1250	-0.1000	-0.0833	-0.6250	-0.6000	-0.5833
130°	-0.6428	-0.1736	-0.0434	-0.0347	-0.0289	-0.6862	-0.6775	-0.6717
140°	-0.7660	0.1736	0.0434	0.0347	0.0289	-0.7226	-0.7313	-0.7371
150°	-0.8660	0.5000	0.1250	0.1000	0.0833	-0.7410	-0.7660	-0.7827
160°	-0.9397	0.7660	0.1915	0.1532	0.1277	-0.7482	-0.7865	-0.8120
170°	-0.9848	0.9397	0.2349	0.1879	0.1566	-0.7499	-0.7969	-0.8282
180°	-1	1	0.2500	0.2000	0.1666	-0.7500	-0.8000	-0.8334

b) Kolbenwegstabelle.

Um die Construction der einzelnen Kolbenlagen zu den verschiedenen Kurbelstellungen zu ersparen, wäre es bequemer, einen Ausdruck der Werthe für  $q$  direct aus den Kolbenstellungen zu besitzen.

Eine einfache Gleichung hiefür ist aber noch nicht gefunden, und so erübrigt nur die Benützung einer Tabelle 2, welche folgendermaßen entstand:

Aus Fig. 77, Seite 303, ergibt sich für  $s = x$  gesetzt

$$Mm^2 = r^2 - r^2 \cos^2 \omega = L^2 - [L - x + r - r \cos \omega]^2,$$

woraus:

$$\cos \omega = \frac{x}{2r} \frac{2L - x}{x - r - L} + 1 \dots \dots \dots (h)$$

$$\text{ferner ist } q = \frac{F}{f} \left[ \cos \omega + \frac{r}{L} (2 \cos^2 \omega - 1) \right] \dots \dots (4i)$$

Wird zunächst  $\frac{F}{f} = 1, \quad 2r = 10$  und

$$L = 4r = 20$$

$$5r = 25$$

$$6r = 30$$

gesetzt, so folgt:

$$\cos \omega = \frac{x}{10} \cdot \frac{40 - x}{x - 25} + 1$$

$$\frac{x}{10} \cdot \frac{50 - x}{x - 30} + 1$$

$$\frac{x}{10} \cdot \frac{60 - x}{x - 35} + 1$$

$$q = \dots \dots \dots = \left[ \cos \omega + \frac{1}{5} (2 \cos^2 \omega - 1) \right]$$

$$= \left[ \cos \omega + \frac{1}{4} (2 \cos^2 \omega - 1) \right] = \left[ \cos \omega + \frac{1}{6} (2 \cos^2 \omega - 1) \right].$$

Diese Werthe je für  $x = 0, 1, 2, 3 \dots 8, 9, 10$  gerechnet, sind in der Tabelle 2 zusammengestellt, wobei  $x =$  Zehntel Kolbenweg für den Hingang bedeuten. Für den Rückgang hätte die Zählung der Zehntel verkehrt zu erfolgen, wenn man sie (unnöthiger Weise) von dortab construiren wollte.

Tabelle 2.

Werthe der Beschleunigungsdrücke bei den einzelnen Lagen des Kolbens.

Kolbenweg Hingang	Kurbelerhebungswinkel $\omega$			Beschleunigungsdruck $\frac{q}{f} = \cos \omega + \frac{r}{L} \cos 2\omega$			Kolbenweg Rückgang
	$\frac{r}{L} = \frac{1}{4}$	$\frac{r}{L} = \frac{1}{5}$	$\frac{r}{L} = \frac{1}{6}$	$\frac{r}{L} = \frac{1}{4}$	$\frac{r}{L} = \frac{1}{5}$	$\frac{r}{L} = \frac{1}{6}$	
0	0° 0'	0° 0'	0° 0'	1.2500	1.2000	1.1667	1.0
0.1	33° 7'	33° 48'	34° 16'	0.9382	0.9073	0.8875	.9
0.2	47° 58'	48° 55'	49° 34'	0.6437	0.6299	0.6220	.8
0.3	60° 18'	61° 28'	62° 15'	0.3682	0.3691	0.3712	.7
0.4	71° 41'	73° 0'	73° 54'	0.1137	0.1265	0.1364	.6
0.5	82° 49'	84° 15'	85° 13'	-0.1172	-0.0960	-0.0810	.5
0.6	94° 14'	95° 45'	96° 44'	-0.3210	-0.2960	-0.2793	.4
0.7	106° 28'	107° 59'	108° 58'	-0.4932	-0.4706	-0.4566	.3
0.8	120° 23'	121° 49'	122° 44'	-0.6279	-0.6161	-0.6099	.2
0.9	138° 3'	139° 13'	139° 56'	-0.7172	-0.7278	-0.7368	.1
1.0	180° 0'	180° 0'	180° 0'	-0.7500	-0.8000	-0.8333	.0

## c) Charakteristische Punkte der Curve.

Die Gl. (4<sub>1</sub>) ist zur Bestimmung einer Reihe von Punkten der Curve der Beschleunigungsdrücke auch ohne Winkeltabellen verwendbar, wie dies im Texte, Seite 19 und an Fig. 7, bereits für die 2 Punkte  $q_1$  und  $q_2$  Anfang und Ende gezeigt ist.

Bei den Kurbellagen  $\omega = 45^\circ$  und  $135^\circ$ , ( $-45^\circ$ ) sind die Werthe  $q_3$  und  $q_4$  bei unendlicher und der endlichen Schubstangenlänge einander gleich, indem hiefür die Ausdrücke dieselbe Größe ergeben:

$$\frac{F}{f} \cdot \cos \omega = \frac{F}{f} \left[ \cos \omega_1 + \frac{r}{L} \cos 2\omega_1 \right].$$

Bei der Kurbelstellung  $\omega = 90^\circ$  ist der Massendruck laut

$$q_5 = \frac{F}{f} \left[ \cos \omega + \frac{r}{L} \cos 2\omega \right] = \frac{F}{f} \left( 0 - \frac{r}{L} \right) \\ = - \frac{F}{f} \cdot \frac{r}{L} = -m.$$

Die Lage des Kolbens für die Kurbelstellung  $\omega = 90^\circ$  ist durch Construction leicht zu finden. Uebrigens kann diese Lage auch rechnungsmäßig bestimmt und eingetragen werden, wozu die Formel (1), dient, und für  $\omega = 90^\circ$  des Hinganges ergibt:

$$s = r \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{r}{L} \right)$$

für	$\frac{L}{r} = 4$	5	6	
sind	$s_5 = \cdot 563$	$\cdot 550$	$\cdot 542$	des Hubes,
an welchem	$q_5 = -m$ als Ordinate der Curve erscheint.			

Zwei weitere Punkte finden sich noch für

$$q_6 = 0$$

und

$$q_7 = +m.$$

Bei  $q_6 = 0$  durchschneidet die Curve eben die Abscissenlinie, d. i. bei:

$$q_6 = 0 = \frac{F}{f} \left[ \cos \omega + \frac{r}{L} \cos 2\omega \right] \\ 0 = \cos \omega + \frac{r}{L} \left[ 2 \cdot \cos^2 \omega - 1 \right],$$

$$\text{ergibt } \cos \omega = \frac{-1 + \sqrt{1 + 8 \left( \frac{r}{L} \right)^2}}{4 \frac{r}{L}}$$

für	$\frac{L}{r} = 4$	5	6	
	$\cos \omega = \cdot 2247$	$\cdot 18615$	$\cdot 1583$	
wird	$\omega = 77^\circ$	$79^\circ 20'$	$80^\circ 50'$	

gegen  $90^\circ$  bei unendlicher Stangenlänge.

Nun ist aber  $\cos \omega$  laut Gl. (h), Seite 309:

$$\cos \omega = \frac{2Lx - x^2}{2rx - 2r^2 - 2rL} + 1, \quad \text{darinnen } 2r = 1 \text{ gesetzt:}$$

$$= \frac{2Lx - x^2}{x - \cdot 5 - L} + 1.$$

Hierin die speciellen Werthe für  $L$  gesetzt:

$\frac{L}{r} =$	4	5	6
$L =$	2	2·5	3

gibt:  $\cos \omega = \frac{4x - x^2}{x - 2\cdot 5} + 1 \quad \frac{5x - x^2}{x - 3} + 1 \quad \frac{6x - x^2}{x - 3\cdot 5} + 1 \dots (h_1)$

Die Einführung der speciellen Einzelwerthe für  $\cos \omega$  zeigt den Schnittpunkt der Curve mit der Abscissenachse  $q_6 = 0$

bei  $x = \cdot 4482 \quad \cdot 4558 \quad \cdot 4659$  des Kolbenhubes.

Endlich berechnet sich noch der Punkt  $q_7 = m$  gleich dem Unterschiede der Anfangs- oder Endordinaten an den todten Punkten bei unendlicher oder endlicher Stangenlänge laut:

$$q_7 = \frac{r}{L} \frac{F}{f} = \frac{F}{f} \left[ \cos \omega + \frac{r}{L} (2 \cos^2 \omega - 1) \right],$$

$$\text{woraus } \cos \omega = \frac{-L + \sqrt{L^2 - 16r^2}}{4r},$$

für $\frac{L}{r} =$	4	5	6
---------------------	---	---	---

wird $\cos \omega =$	·4140	·3508	·3028
$\omega =$	65° 30'	69° 30'	72° 20'.

Diese Werthe wieder wie oben behandelt und in Gl. (h<sub>1</sub>) eingeführt, ergeben:

$q_7 = + m$  bei ·3469      ·3689      ·3868 des Kolbenhubes.

Derart sind sieben Punkte der Curve zur Construction bestimmt.

d) Tangenten an die Curve der Beschleunigungsdrücke bei endlicher Schubstangenlänge.

Die Länge des Kolbenweges laut Gl. (1<sub>1</sub>) als Abscisse  $x$  und den Beschleunigungsdruck laut Gl. (4<sub>1</sub>) als Ordinate  $y$  aufgefasst, ergibt:

$$x = r \left[ 1 - \cos \omega + \frac{1}{2} \frac{r}{L} \sin^2 \omega \right] \dots \dots \dots (1)$$

$$y = \frac{F}{f} \left[ \cos \omega + \frac{r}{L} \cos 2\omega \right] = \frac{F}{f} \left( \cos \omega + \frac{r}{L} 2 \cos^2 \omega - \frac{r}{L} \right) \dots (4)$$

Hieraus wird

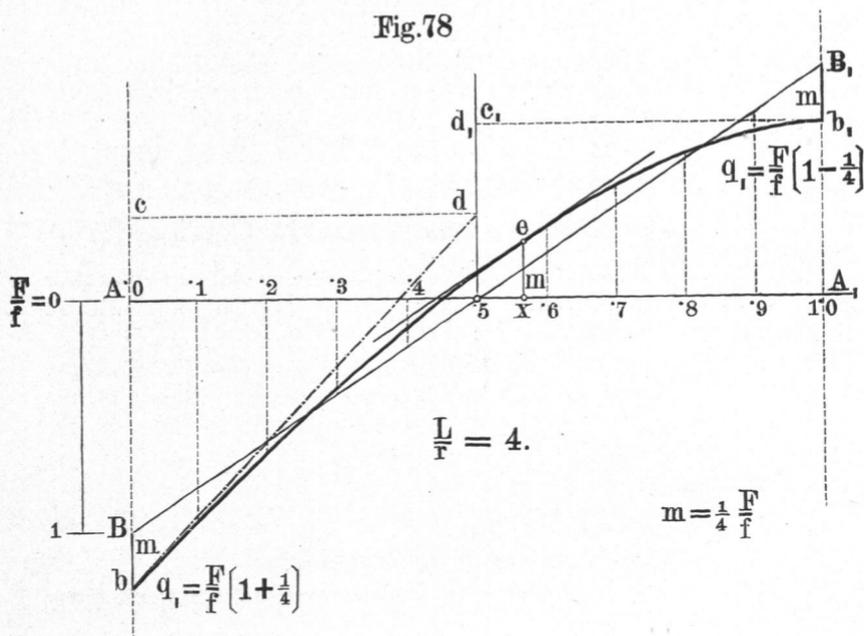
$$\frac{\partial x}{\partial \omega} = r \left[ \sin \omega + \frac{r}{L} \sin \omega \cos \omega \right] = r \sin \omega \left( 1 + \frac{r}{L} \cos \omega \right)$$

$$\frac{\partial y}{\partial \omega} = \frac{F}{f} \left[ \sin \omega + 4 \frac{r}{L} \sin \omega \cos \omega \right] = \frac{F}{f} \cdot \sin \omega \left( 1 + 4 \frac{r}{L} \cos \omega \right).$$

Die Tangente schließt mit der Abscissenachse den Winkel  $\beta$  ein nach:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\frac{F}{f} \left( 1 + 4 \frac{r}{L} \cos \omega \right)}{r \left( 1 + \frac{r}{L} \cos \omega \right)} \dots \dots \dots (i)$$

Fig. 78



An den drei charakteristischen Punkten der Curve: Anfang, Ende und bei der Kurbelstellung von  $\omega = 90^\circ$  wird aus Gl. (1), (4) und der Tangentengleichung der Reihe nach: (Gleichungen  $i_1$ )

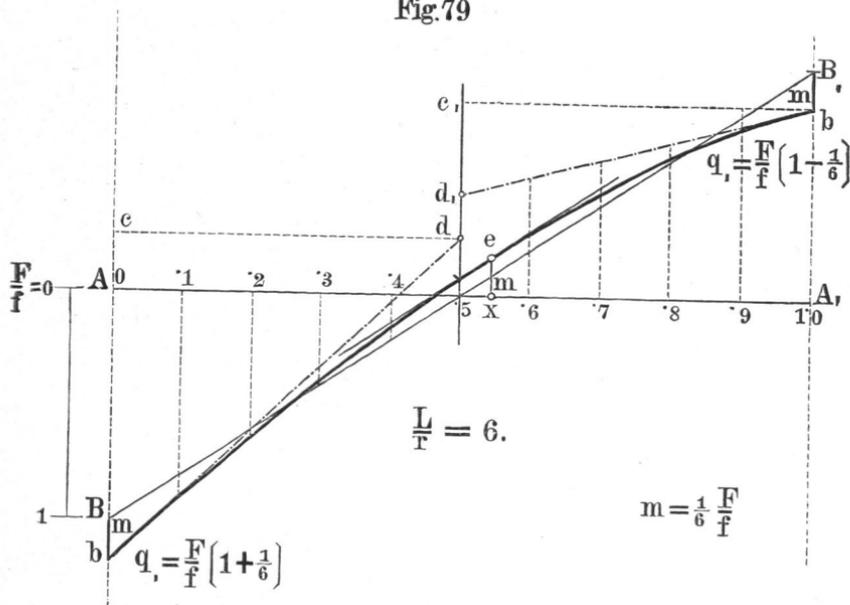
	für $\omega = 0^\circ$	$90^\circ$	$180^\circ$
$x =$	0	$r \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{r}{L} \right)$	$2r$
$y =$	$\frac{F}{f} \left( 1 + \frac{r}{L} \right)$	$\frac{F}{f} \cdot \frac{r}{L}$	$\frac{F}{f} \left( 1 - \frac{r}{L} \right)$
$r \cdot \operatorname{tg} \beta =$	$\frac{F}{f} \frac{1 + 4 \frac{r}{L}}{1 + \frac{r}{L}}$	$\frac{F}{f}$	$\frac{F}{f} \frac{1 - 4 \frac{r}{L}}{1 - \frac{r}{L}}$
Es wird für:			$= 0 \text{ mal } \frac{F}{f}$
$\frac{L}{r} = 4$	$r \cdot \operatorname{tg} \beta = \frac{8}{5} = 1.6 \text{ mal } \frac{F}{f}$		$\frac{1}{4} = .25 \text{ "}$
$= 5$	$\frac{9}{6} = 1.5 \text{ "}$		$\frac{2}{5} = .4 \text{ "}$
$= 6$	$\frac{10}{7} = 1.4 \text{ "}$		

Für die Kurbelstellung  $\omega = 90^\circ$  ergibt sich aus obiger Zusammenstellung außer

$\alpha$ ) der momentanen Kolbenlage für den Hingang mit

$$x = r \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \frac{r}{L}\right)$$

Fig. 79



$\beta$ ) die Thatsache, dass die zugehörige Tangente an die Beschleunigungsdruckcurve hier eben parallel mit der Geraden für unendliche Schubstangenlänge wird.

Denn für letztere folgt aus den Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} x &= r(1 - \cos \omega) \\ y &= \frac{F}{f} \cos \omega \end{aligned} \right\} \operatorname{tg} \beta = \frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{1}{r} \cdot \frac{F}{f}$$

dieselbe Neigung gegen die Abscisse, als die Tangente der Curve laut Gl. (i) besitzt.

Die Ordinate der Beschleunigungsdruckcurve für die Kurbelstellung  $\omega = 90^\circ$  wurde bereits früher bestimmt (Anhang II c, Seite 310) und ist:

$$m = \frac{F}{f} \cdot \frac{r}{L}$$

Die obigen Figuren 78 und 79, sowie die Figur 8, Seite 23, sind für die begedruckten Verhältnisse von  $\frac{L}{r}$  nach dem eben hier entwickelten Verfahren construirt.