Anhang I.

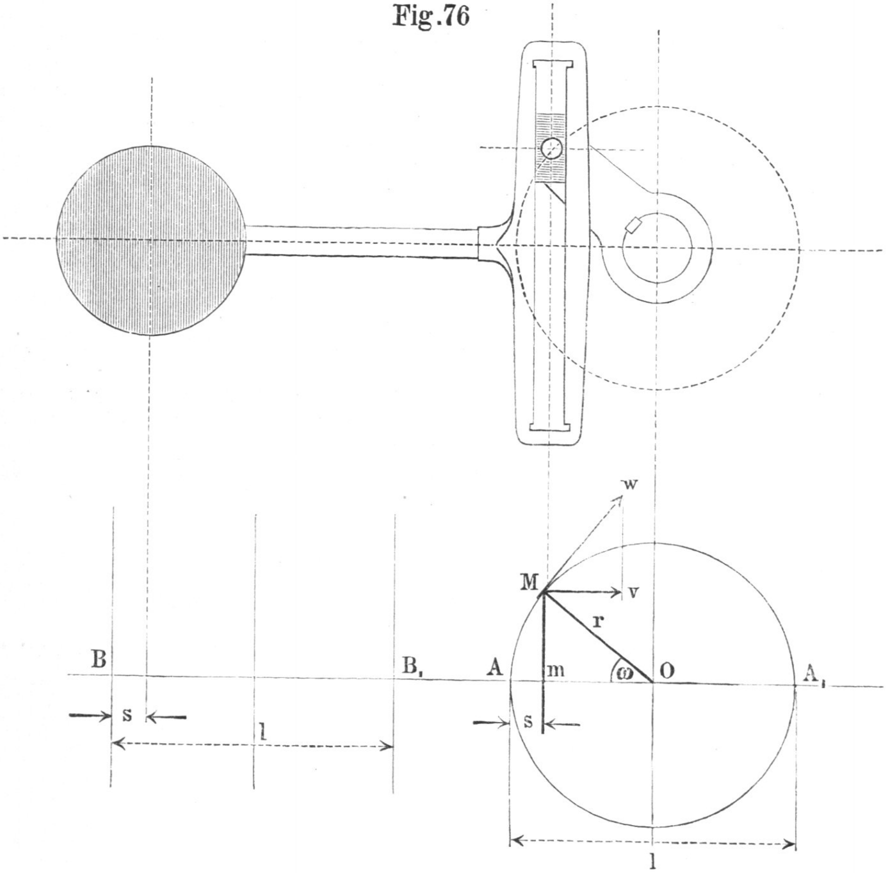
Größe der Massendrücke.

1. Schubstange unendlich lang.

Laut beistehender Fig. 76 beträgt s die vom Kolben durchlaufene Weglänge bei der Kurbelerhebung von ω Graden:

$$s = r\,(1 - \cos\omega) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Fig. 76



In der Zeit dt erhebt sich ω um $d\omega$, und der Kurbelzapfen, dessen constante Umfangsgeschwindigkeit mit w bezeichnet wurde, durchläuft die Bogenlänge

$$w \,.\, dt = r \,.\, d\omega.$$

Aus dieser Gleichung ergibt sich

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{w}{r} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (a)$$

Nun ist die Horizontalgeschwindigkeit der Masse

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d\,[r\,(1 - \cos\omega)]}{dt}$$
$$= r \sin\omega \,\frac{d\omega}{dt}.$$

Den Werth aus Gleichung (a) hier eingeführt, gibt:

$$v = r \,.\, \sin\omega \,.\, \frac{w}{r} = w \sin\omega \quad \ldots \ldots \ldots \quad (b)$$

Die beschleunigende Kraft per Masseneinheit ist daher:

$$g_1 = \frac{dv}{dt} = \frac{d\,(w \,.\, \sin\omega)}{dt}$$
$$= w \,.\, \cos\omega \,\frac{d\omega}{dt}$$
$$= \frac{w^2}{r} \,.\, \cos\omega. \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (c)$$

Für die Masse vom Gewichte P heiße diese Kraft Q. Sie ist $\frac{P}{g}$ mal so groß, wie für die Masseneinheit, d. i.

$$Q = \frac{P}{g} \,.\, \frac{w^2}{r} \,.\, \cos\omega \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

In dem Werthe $\frac{P \,.\, w^2}{g \,.\, r}$ erkennen wir, unabhängig von allem Früheren, den Betrag F der Fliehkraft einer Masse vom Gewichte P, wenn dieselbe im Kurbelzapfen concentrirt und mit dessen Geschwindigkeit rotiren würde. Man kann daher schreiben:

$$Q = F \,.\, \cos\omega.$$

Auf die Flächeneinheit des Kolbens entfällt daher ein für die Massenbeschleunigung nöthiger Druck q

$$q = \frac{F}{f} \cos\omega.$$

2. Schubstange endlich lang.

Der Weg s, welchen der Kreuzkopf bei endlicher Stangenlänge zurücklegte, wenn er (Fig. 77) von B nach C kam, ist:

$$s = BC = BO - CO = (r + L) - (L \,.\, \cos\alpha + r \,.\, \cos\omega) =$$
$$= r\,(1 - \cos\omega) + L\,(1 - \cos\alpha).$$

Der Cosinus des Neigungswinkels der Schubstange mit der Achse lässt sich folgendermaßen durch bekannte Verhältnisse ausdrücken:

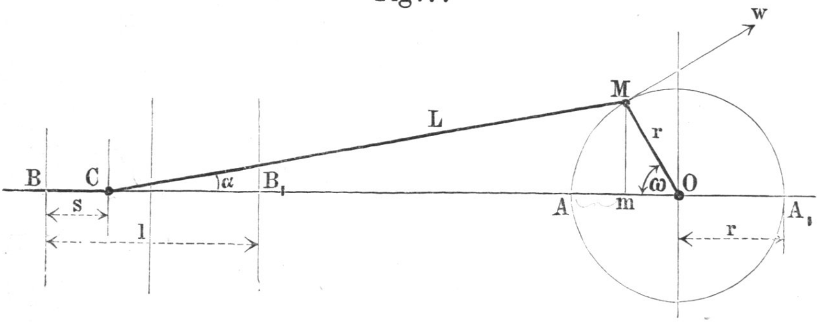
$$Mm = L \,.\, \sin\alpha = r \,.\, \sin\omega.$$

Daraus

$$\sin\alpha = \frac{r}{L}\sin\omega$$

$$\cos\alpha = \sqrt{1 - \frac{r^2}{L^2}\sin^2\omega} = 1 - \frac{1}{2}\frac{r^2}{L^2}\sin^2\omega. \quad \ldots\ldots (d)$$

Fig.77



Setzen wir diesen Werth in die Gleichung für s, so folgt:

$$s = r\left[1 - \cos\omega + \frac{1}{2}\frac{r}{L}\sin^2\omega\right] \quad \ldots\ldots\ldots (1_1)$$

Die an jedem Punkte herrschende Geschwindigkeit v der Horizontal-Bewegung ist gleich:

$$v = \frac{ds}{dt} = r\left(\sin\omega + \frac{1}{2}\frac{r}{L}\sin 2\omega\right)\frac{d\omega}{dt}.$$

Herrscht aber im Kurbelkreise die constante Umfangsgeschwindigkeit w, so ist offenbar

$$r \,.\, d\omega = w \,.\, dt \quad \text{oder} \quad \frac{d\omega}{dt} = \frac{w}{r},$$

so dass die Geschwindigkeit des Kolbens an jedem einzelnen Punkte gleich ist:

$$v = w\left(\sin\omega + \frac{1}{2}\frac{r}{L}\sin 2\omega\right). \quad \ldots\ldots\ldots (b_1)$$

Dieser Geschwindigkeit entspricht die beschleunigende Kraft per Masseneinheit:

$$g_1 = \frac{dv}{dt} = w\left(\cos\omega + \frac{r}{L}\cos 2\omega\right)\frac{d\omega}{dt},$$

oder nachdem wieder $\frac{d\omega}{dt} = \frac{w}{r}$ gesetzt wird,

$$g_1 = \frac{w^2}{r}\left(\cos\omega + \frac{r}{L}\cos 2\omega\right), \quad \ldots\ldots\ldots \quad (c_1)$$

folglich ist die Größe des gesammten auf Beschleunigung verwendeten Druckes an jedem Punkte gleich (wenn P das Gewicht der ganzen Masse ist):

$$Q = \frac{P\,.\,w^2}{g\,.\,r}\left(\cos\omega + \frac{r}{L}\cos 2\omega\right). \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2_1)$$

Hat der Kolben f Flächeneinheiten, so kommt auf jede der f. Theil des Gesammtdruckes, und wenn wir noch berücksichtigen, dass die Fliehkraft einer im Kurbelkreise rotirenden Masse vom Gewichte P gleich wäre:

$$F = \frac{P\,.\,w^2}{g\,.\,r},$$

so erhält man endlich den an jeder Kolbenstellung zu oder von der Geschwindigkeitsänderung benöthigten oder herrührenden Druck q per Flächeneinheit des Kolbens während des Hinganges

$$q = \frac{F}{f}\left(\cos\omega + \frac{r}{L}\cos 2\omega\right). \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4_1)$$

Für den Rückgang erhält man dieselben Werthe, wenn man ω von dem inneren todten Punkte an zählt; will man aber von dem todten Punkte an rechnen, in welchem die Kurbel am Anfang des Rückschubes steht, so geht q über in

$$q = \frac{F}{f}\left(\cos\omega - \frac{r}{L}\cos 2\omega\right). \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4_2)$$

Die jeden Augenblick in den Massen angehäufte Arbeit ist:

$$A = \frac{P v^2}{2g}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (d)$$

Diese Arbeit ist nicht gering. So besitzen beispielsweise die 750 Kilogr. schweren, hin- und hergehenden Massen einer Walzwerksmaschine, welche mit 100 Umdrehungen in der Minute bei 1·26 m Hub arbeitet, in der Nähe des halben Laufes, wo $v = w$, die Kolbengeschwindigkeit gleich jener des Kurbelkreises wird, eine innewohnende Arbeit von

$$Q = \frac{750}{2.10}\left(\frac{1{\cdot}26\,.\,2.100}{60}\right)^2 = 680 \text{ Kilogr.-Meter},$$

welche aus der ersten Schubhälfte in die zweite hinübergetragen und dort erst an den Kurbelzapfen abgegeben werden. Und weil dieses in der Zeit von $\frac{1}{4}\cdot\frac{60}{100} = 0{\cdot}15$ Secunden geschieht, so entspricht es einer Arbeit von $\frac{680}{\cdot 15.75} = 60$ Pferdestärken.

3. Das Fehlerglied.

Die Formeln für die Beschleunigungsdrücke sind Näherungswerthe, welche mannigfaltig bemängelt wurden (unter Anderem in der „Zeitschrift des Vereines Deutscher Ingenieure". Band XXV etc.).

Die Näherungen genügen aber weitaus, und der Fehler ist gänzlich verschwindend, wenn das Schubstangen-Längenverhältniss $\frac{L}{r} \gtreqless 4$ ist, wie es ja bei Dampfmaschinen mit hoher Kolbengeschwindigkeit stets der Fall ist. Nur von solchen ist hier die Rede.

In der Ableitung: Gleichung (*d*) Seite 303:

$$\cos\alpha = \sqrt{1 - \frac{r^2}{L^2}\sin^2\omega} = 1 - \frac{1}{2}\frac{r^2}{L^2}\sin^2\omega$$

wurden nämlich nur die zwei ersten Glieder der Reihe:

$$(1 + x)^m = 1 + m\,x + \frac{m\,(m-1)}{1.2}x^2 + \frac{m\,(m-1)\,(m-2)}{1.2.3}x^3 + \ldots$$

benützt.

Verzichtet man auf die Vereinfachung der Formeln durch die Näherung, so ergibt sich (ohne Benützung einer Reihe) und in directer Ableitung nach Fig. 77, Seite 303:

$$s = r + L - (r\cos\omega + L\cos\alpha) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (e)$$

$$v = \frac{d\,s}{d\,t} = r\sin\omega\frac{d\,\omega}{d\,t} + L\sin\alpha\frac{d\,\alpha}{d\,\omega}\cdot\frac{d\,\omega}{d\,t}$$

Es ist aber:

$$\sin\alpha = \frac{r}{L}\sin\omega \qquad\qquad r\,d\,\omega = w\,d\,t$$

und

$$\cos\alpha\,d\,\alpha = \frac{r}{L}\cos\omega\,d\,\omega \qquad\qquad \frac{d\,\omega}{d\,t} = \frac{w}{r},$$

daher

$$\frac{d\,\alpha}{d\,\omega} = \frac{r}{L}\frac{\cos\omega}{\cos\alpha}$$

und

$$v = w\sin\omega + L\sin\alpha\,.\,\frac{r}{L}\frac{\cos\omega}{\cos\alpha}\cdot\frac{w}{r},$$

$$v = w\sin\omega + w\,.\,\frac{r}{L}\frac{\sin\omega\cos\omega}{\cos\alpha} =$$

$$= w\left[\sin\omega + \frac{1}{2}\frac{r}{L}\frac{\sin 2\omega}{\sqrt{1 - \frac{r^2}{L^2}\sin^2\omega}}\right] \quad \ldots\ldots \quad (f)$$

Nun wird aber die beschleunigende Kraft per Masseneinheit:

$$g_1 = \frac{d\,v}{d\,t}$$

$$g_1 = w \left[\cos\omega + \frac{1}{2}\frac{r}{L} \frac{2\cos 2\omega \sqrt{1-\left(\frac{r}{L}\right)^2 \sin^2\omega}}{1-\left(\frac{r}{L}\right)^2 \sin^2\omega} - \right.$$

$$\left. -\frac{1}{2}\cdot\frac{r}{L}\cdot\frac{\sin 2\omega \,.\, \frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{r}{L}\right)^2 \sin^2\omega\right]^{-\frac{1}{2}} . \left[-\left(\frac{r}{L}\right)^2 2\sin\omega\cos\omega\right]}{1-\left(\frac{r}{L}\right)^2 \sin^2\omega}\right] . d\omega$$

$$g_1 = \frac{F}{f}\left[\cos\omega + \frac{r}{L}\,\frac{\cos 2\omega\left[1-\left(\frac{r}{L}\right)^2 \sin^2\omega\right] + \frac{1}{4}\sin^2 2\omega\left(\frac{r}{L}\right)^2}{\left[1-\left(\frac{r}{L}\right)^2 \sin 2\omega\right]^{\frac{3}{2}}}\right] =$$

$$= \frac{F}{f}\left[\cos\omega + \frac{r}{L}\cos 2\omega \,.\, \frac{1-\left(\frac{r}{L}\right)^2\sin^2\omega + \frac{1}{4}\,\frac{\sin^2 2\omega}{\cos 2\omega}\left(\frac{r}{L}\right)^2}{\left[1-\left(\frac{r}{L}\right)^2 \sin^2\omega\right]^{\frac{3}{2}}}\right] \,..\, (g)$$

Der Bruchfactor, welcher einen Maximalwerth bei $\omega = 90^0$ erreicht, beträgt selbst unter der Annahme $\frac{L}{r} = 4$ dort $1 \cdot 033$. Für $\frac{L}{r} = 5$ wird der Factor $1 \cdot 004$. Da aber daselbst die Ordinate der Beschleunigungscurve sehr klein ist, so fällt er innerhalb die Strichdicke einer Zeichnung der Näherungscurve auch noch in dem Falle, als die Anfangsordinate bei $\omega = 0$ mit $\frac{F}{f} = 300\,mm$ gewählt wird, wie ich es versuchsweise gethan habe.

Dasselbe gilt auch für die Abweichungen an den übrigen Punkten, bei der Kurbelstellung von 45^0 etc., an all welchen Punkten überdies die größere oder geringere Genauigkeit der Werthe der Beschleunigungsdrücke von nur wenig Einfluss auf die nachfolgenden Betrachtungen ist.

An den todten Punkten, wo die Ordinaten ihren Maximalwerth erreichen, wird der Bruchfactor $= 1$, so dass also das Ergebniss der Annäherungsformel (c) für alle praktischen Anwendungen mit der strengen Curve als übereinstimmend erkannt werden muss*).

*) Aus diesem Grunde ist selbst die zeichnerische Darstellung des Unterschiedes der Näherungscurve nach Formel (4_1) gegen die streng richtige Curve nach (g) für den gewöhnlichen Maßstab einer graphischen Studie ganz unmöglich, indem sich die Linien allerorts decken.