SECONDE NOTE.

Obſervations ſur la ſtatique des voûtes.

On ſuppoſe dans les deux hypotheſes qui ſuivent, une voûte ſurbaiſſée de 21 toiſes d'ouverture & de 36 pieds de montée, compoſée de trois portions de cercle de 60 degrés chacune, ayant 7 pieds 6 pouces d'épaiſſeur à la clef, extradoſſée en pente de 2 pouces 6 lignes par toiſe, & ayant d'ailleurs 7 pieds 9 pouces de hauteur de pied-droit.

J'ai encore ſuppoſé que l'épaiſſeur réduite de l'appareil de la pierre de taille, qui forme les revêtements de ces pieds-droits, étoit de 2 pieds 9 pouces, & l'épaiſſeur des vouſſoirs intermédiaires, de 6 pieds 7 pouces 6 lignes.

Que le poids de la pierre de taille dont cette voûte eſt conſtruite, eſt de 196 livres par pied cube, & le moellon employé au rempliſſage des reins & aux maſſifs des culées, de 186 livres.

Tout cela poſé, l'arc de tête étant formé à l'ordinaire par trois portions de cercle de 60 degrés chacune, ſuivant la méthode de M. Pitot, on aura 106 pieds 4 lignes pour le rayon de la grande portion de cercle, & 19 pieds 11 pouces 8 lignes pour les rayons des petits arcs; d'où l'on tire dans l'hypothese ordinaire, suivant laquelle on examine d'abord la poussée de cette voûte, (*Voyez la figure ci-jointe*).

LK =	53 pieds.	0 pouces.	2 lignes.	= *a*
KA =	91 . . .	9 . . .	10 . . .	= *b*
BV =	9 . . .	11 . . .	10 . . .	= *c*
PQ =	45 . . .	6 . . .	9 . . .	= *d*
LA =	. . . . .	. . . .	. . . .	2 *a*
MP =	25 . . .	0 . . .	6 . . .	= *f*
SX =	3 . . .	3 . . .	11 . . .	= *l*
ML =	. . . . .	. . . .	. . . .	*y* + *c*
PS =	. . . . .	. . . .	. . . .	*y*
GL =	766 . . .	1 . . .	6 . . .	= *nn*
CLB =	136 . . .	4 . . .	10 . . .	= *ss*

Comme on n'a point d'expérience constante sur laquelle on puisse tabler pour déterminer généralement le point de rupture des arches surbaissées, le calcul a fait connoître que l'endroit le plus désavantageux où on le suppose ici, est à la rencontre des arcs dont l'ellipse est formée; en sorte que tout l'effort de la voûte réside nécessairement dans le plus grand de ces trois arcs, & c'est sur cela qu'on a compté dans l'examen des deux hypotheses dont il est ici question.

PREMIERE HYPOTHESE.

Tout ce qui précede posé, on aura par les rapports des triangles semblables $b : a :: y + c : \frac{ay + ac}{b}$, d'où l'on tire PN $= \frac{bf - ay - ac}{b}$; on aura encore $2a : b :: \frac{bf - ay - ac}{b} : \frac{bf - ay - ac}{2a}$, d'où l'on tire $\frac{bf}{2a} - \frac{y + c}{2}$ pour l'expression la plus abrégée du bras de lévier OP de l'effort de la voûte, lequel effort sera exprimé par nn, parce que les triangles étant équilatéraux, LA est double de LK; ce qui forme le rapport de la pesanteur relative à la pesanteur absolue exprimée par nn; on suppose d'ailleurs ces principes de statique connus.

Si on multiplie actuellement cet effort par son bras de lévier, on aura pour l'expression de la poussée, $\frac{nnbf}{a} - nny - nnc$.

L'énergie de la culée qui doit résister à cette poussée, sera premiérement le rectangle RP, considéré comme rectiligne, multiplié par son bras de lévier $= \frac{1}{2} y$; ce qui donne $\frac{dyy}{2}$.

Secondement, le triangle mixte CLWB $= ss$, multiplié aussi par son bras de lévier PX $= y + l$, (en supposant que le poids de ce triangle tombe sur $\frac{1}{3}$ BV); ce qui donne $ssy + ssl$: ainsi ces deux parties, additionnées & comparées avec la poussée, donneront dans l'état de l'équilibre cette équation, $\frac{dyy}{2} + ssy + ssl = \frac{nnbf}{a} - nny - nnc$, qui se réduit à $yy + \frac{2ssy + 2nny}{d} = \frac{2nnbf}{ad} - \frac{2nnc - 2ssl}{d}$.

Et si l'on fait $\frac{ss+nn}{\frac{1}{2}d}=t$, & $\frac{nnbf}{\frac{1}{2}ad}-\frac{nnc-ssl}{\frac{1}{2}d}=h^2$, il vient $yy+ty=h^2$; d'où l'on tire, par la regle ordinaire, cette formule, $y=\sqrt{h^2+\frac{1}{4}tt}-\frac{1}{2}t=$ 18 pieds 10 pouces 3 lignes, ainsi que nous allons le voir, en rapportant à cette formule le calcul numérique, dont nous aurons également besoin pour la suite de cette question.

	pieds.	po.	lig.
Nous aurons d'abord $\frac{2nnbf}{ad}=$	1459	7	2
Il en faut ôter . . . . $\frac{2nnc+2ssl}{d}=$	356	2	9
Il reste $h^2=$	1103	4	5
Il faut ajouter . . . . $\frac{1}{4}tt=$	394	0	8
Le total sera de	1497	5	1

Si de cette quantité on en extrait la racine carrée, il viendra 38 pieds 8 pouces 3 lignes un peu plus, dont ayant ôté $\frac{1}{2}t=$ 19 pieds 10 pouces, il restera 18 pieds 10 pouces 3 lignes pour la valeur de y, comme on peut s'en convaincre par la preuve numérique; car actuellement que y n'est plus inconnu, on aura pour celle du bras de lévier OP, 7 pieds 3 pouces 2 lignes; ce qui donne pour l'expression de la

	pieds.	po.	lig.
poussée	11130	0	0
L'énergie de la culée est exprimée par la superficie du rectangle RP, multipliée par son bras de lévier, $=\frac{1}{2}y$, ce qui donne	8109	0	0
Celle du triangle mixte multipliée par son bras de lévier $=y+l$, donne . .	3026	0	0
Total égal	11135	0	0

Il eſt évident que la différence de ces deux réſultats ne peut opérer qu'un excès de 3 points ſur la valeur de y, & que par conſéquent on ne peut parvenir à un équilibre plus exact.

Nous avons ſuppoſé, dans ce calcul, la culée RPQS un parfait rectangle, quoiqu'à la rigueur il s'en faut de tout le triangle RQY ; mais cette petite différence qui n'ajoute que $\frac{1}{293}$, ou environ, à l'énergie de cette culée, ne mérite dans cette circonſtance aucune attention.

Si les reins de la voûte cependant, au lieu d'être araſés ſur une pente de 2 pouces 6 lignes par toiſe, étoient inclinés ſur une pente plus conſidérable, le petit triangle RQY devenant alors d'un poids plus grand, il ſeroit néceſſaire d'y avoir égard, & dans ce cas la formule précédente ne ſeroit plus la même, parce que l'équation s'éleveroit au troiſieme degré ; car comme la hauteur QY, quoiqu'inconnue, eſt toujours une partie conſtante de y, qui ſe trouve commenſurable par cette même partie, cette hauteur devient connue par-là, & ſeroit, par exemple, $\frac{y}{6}$ ſi la pente étoit de 2 pouces par pied ; ce qui donneroit $\frac{yy}{12}$ pour l'élément RQY, dont le moment ſeroit $\frac{y^3}{36}$, parce que le bras de lévier de ce triangle eſt $\frac{y}{3}$: or, en retranchant cette quantité de l'équation précédente, il en réſulte une équation du troiſieme degré qui répond à une formule du troiſieme cas de ces équations ; mais ceci n'eſt applicable qu'aux voûtes des magaſins à poudre qui sont extradossées en comble, & non à celles dont il est ici question, dont la pente n'est pas très-sensible (*a*).

Remarque.

On est dans l'usage, ainsi qu'on s'y est conformé dans la formule précédente, de prendre le $\frac{1}{3}$ de BV pour la distance du centre de gravité du triangle mixte au point B; mais on agit en cela comme si on prenoit le centre de gravité du triangle entier CLB; ce qui n'est pas exactement vrai, puisque si de ce triangle on en ôte le segment LBW, qui se trouve multiplié par un lévier plus long que celui de tout le triangle CLB, ce qui restera sera moindre de tout le produit de la différence de ces deux léviers par la superficie même de ce triangle; par conséquent il en résulte une augmentation sur la valeur de y, ainsi que nous allons le démontrer.

Voyez la figure, à gauche.

Nous chercherons premiérement le centre de gravité de l'arc EBF = LWB; pour cet effet nous nommerons le rayon BC $= r$, & à cause du triangle équilatéral, on aura aussi la corde EF $= r$; nous nommerons l'arc EBF $= c$; cela posé, on aura, en abrégeant la formule, $\frac{rr}{c}$ pour la distance du centre de gravité de l'arc EBF au centre C = 19 pieds 9 lignes mesurés sur le rayon BC, d'où l'on tire $\frac{2rr}{3c}$

(*a*) On peut conclure de là que le point de rupture d'une voûte est inassignable pour tous les cas, puisqu'il dépend de la pente des reins qui est variable, & de l'homogénéité des éléments qui entrent dans les formules.

$=$ 12 pieds 8 pouces 6 lignes pour la distance du centre de gravité du secteur EBFC, au centre C : (voyez l'analyse démontrée du pere Reynaud) cette formule même pourra être applicable à la recherche du centre de gravité de ces triangles mixtes dans tous les cas des voûtes surbaissées, tracées suivant M. Pitot, & dont le point de rupture sera à la jonction des petits arcs.

Il faut encore avoir la distance du centre de gravité du triangle EFC au centre C, qui est égale aux $\frac{2}{3}$ de la perpendiculaire de ce triangle $=$ 11 pieds 6 pouces 4 lignes, dont la différence, avec celle du secteur qui est d'un pied 2 pouces 2 lignes, est le bras de lévier du triangle qui fait équilibre avec ce segment, & que nous nommerons b, étant admis que le centre de pesanteur commun de ces deux quantités est celui du secteur EBFC.

Si nous nommons encore la superficie de ce triangle ss $=$ 172 pieds 8 pouces 1 ligne, & la superficie du segment $mm =$ 36 pieds 3 pouces 3 lignes, nous aurons $mm : ss :: b : \frac{ssb}{mm} =$ 5 pieds 7 pouces 6 lignes, qui est le bras de lévier du segment en question, lequel bras de lévier étant ajouté à $\frac{2rr}{3c}$, donne 18 pieds 4 pouces pour la distance du centre C au centre de gravité de ce segment qui tombe sur BV, à 4 pieds 6 lignes du point B, c'est-à dire, à 8 pouces 7 lignes au-delà de SX.

Or, si on nomme cette derniere quantité jointe à $SX = u$, le bras de lévier par lequel le poids de ce segment agit, ſera $y + u$, qui donne pour ſon moment $mmy + mmu$, qu'il faut diſtraire du premier membre de l'équation du premier cas, pour avoir $\frac{dyy}{2} + ssy + ssl - mmy - mmu$ $= \frac{nnbf}{a} - nny - nnc$, qui donne $yy + \frac{2ssy - 2mmy + 2nny}{d}$ $= \frac{2nnbf}{ad} + \frac{2mmu - 2nnc - 2ssl}{d}$;

Et poſant $\frac{(ss - mm + nn) \times 2}{d} = t$,

& $\frac{2nnbf}{ad} + \frac{2mmu - 2nnc - 2ssl}{d} = qq$,

Nous aurons, comme dans la premiere formule, $y = \sqrt{qq + \frac{1}{4}tt} - \frac{1}{2}t$, $=$ 18 pieds 10 pouces 6 lignes.

Il faut faire attention ici que la ſuperficie qui eſt exprimée par ss, repréſente celle du triangle entier CLB, qui eſt égale à 172 pieds 8 pouces une ligne, comme nous l'avons déjà vu plus haut, cette ſuperficie étant la même que celle du triangle LBZ, & que dans la poſition où $\frac{2ss - 2mm + 2nn}{d} = t$; $2ss - 2mm$ eſt égal à $2ss$ du premier cas, parce que cette ſuperficie eſt préciſément augmentée de la quantité qui ſe retranche dans celui-ci ; ce qui ſe réduit toujours à $\frac{2ss + 2nn}{d} = t$, t dans cette poſition étant égal à 39 pieds 8 pouces comme dans la premiere formule.

Toute la différence qu'on trouve ici, vient donc de ce que dans le ſecond membre de cette équation, $2ss$ eſt augmenté de toute la quantité $2mm$, laquelle augmentation ſeroit compenſée, & l'équation ſeroit la même que dans le premier cas, ſi u étoit égal à l; mais cette quantité l qui multiplioit

multiplioit ss, n'étant que 3 pieds 3 pouces 11 lignes, tandis que la quantité u, par laquelle le même ss est multiplié ici, est de 4 pieds 6 lignes; il en résulte, pour la valeur de y, ce supplément d'épaisseur que nous trouvons ici de 3 lignes seulement, mais auquel néanmoins j'ai été bien aise d'avoir égard pour ne rien négliger; cette observation servant d'ailleurs à nous convaincre qu'il n'y a pas un grand inconvénient à prendre le tiers de BV pour la distance du centre de gravité du triangle mixte au point B, quand il y aura aussi peu de différence entre u & l.

SECONDE HYPOTHESE,

Dans laquelle on a égard aux poids des matieres dont les voûtes sont formées, & à la maniere dont ils agissent dans chaque élément.

On a toujours regardé, dans le calcul de la poussée des voûtes, le trapeze mixte GDLH, comme un élément homogene, de même que tout ce qui appartient à l'énergie de la culée; mais ceci ne peut être vrai que lorsque les voûtes sont ou entiérement construites en moellon, ou entiérement en pierre de taille de même nature, ou autrement dans le cas où un pied cube de pierre de taille ne peseroit pas plus qu'un pied cube de maçonnerie de moellon de natures hétérogenes; en sorte que cette considération, à laquelle personne n'avoit fait encore attention, devient néanmoins d'une assez grande conséquence, selon les circonstances où ces matieres unies ensemble sont plus ou moins pesantes les unes que les autres.

Il est donc nécessaire de se rappeller pour cela, ce que nous avons dit en premier lieu, que le pied cube de pierre de taille pesoit 196 livres, & le moellon 186 livres, qui se réduisent à 170 livres lorsque ce moellon est employé en maçonnerie.

Cela posé, il est évident que le trapeze mixte GDLH, renfermant beaucoup plus de pierres de taille que le triangle mixte CLWB & le rectangle QS ensemble, relativement à la maçonnerie de moellon avec laquelle cette pierre de taille se trouve combinée de part & d'autre, le trapeze qui constitue la poussée de la voûte est nécessairement plus pesant que les parties résistantes ne l'étoient dans la premiere hypothese; en sorte que pour avoir véritablement l'équilibre, il faut ajouter à la formule de M. de la Hire, le supplément du poids de la pierre de taille au-dessus de celui de la maçonnerie, en examinant d'ailleurs la maniere dont l'excès de ce poids agit respectivement dans chaque élément.

Si l'on fait encore attention que dans les grands ponts, la construction des culées & des piles précede toujours celle des voûtes de trois ou quatre années, il s'ensuivra que le mortier employé à la maçonnerie de ces voûtes, sera toujours plus frais, & par conséquent plus pesant.

Or, en posant que le poids de la maçonnerie qui a acquis de la consistance, est à celui de la maçonnerie fraîche comme 10 à 11, toute la partie du trapeze mixte qui se trouve construite en moellon, & celle qui fait partie des culées, doivent être considérées suivant ce rapport.

Ces principes posés, nous allons voir l'augmentation qui en résultera pour l'épaisseur des culées de la même voûte à laquelle nous les appliquerons, & on y remarquera avec étonnement que ce que l'on ajoute arbitrairement à l'épaisseur de ces culées, au-delà du calcul ordinaire pour rendre leur résistance prépondérante, n'est que l'équilibre même dans l'hypothese qui précede.

Comme le trapeze mixte que nous avons nommé *nn* dans la premiere équation, peut subsister sous la même dénomination, nous en changerons simplement la valeur respectivement aux suppléments à y ajouter, & dont le premier sera le dixieme de la superficie qui représente la maçonnerie de moellon, parce que le poids de cette maçonnerie, comme nous l'avons dit, est à celui de la maçonnerie des culées comme 11 à 10; en sorte qu'on aura d'abord pour cette augmentation, ... 38 pi. 8 po. 6 lig.

Nous prendrons ensuite le cinquieme de la superficie qui représente la pierre de taille comprise entre les deux portions de cercle du grand secteur ID, parce que le poids de cette pierre avec celui de la maçonnerie de moellon des culées, sont comme 12 à 10; ce qui donne une autre augmentation de . . . . 75 . . 10 . . 0

Voyez la figure, à gauche.

Dont le total est de . . . . 114 . . 6 . . 6

Si nous ajoutons ces 114 pieds 6 pouces 6 lignes à la premiere valeur de *nn*, elle sera changée en *nn* = 880 pieds o pouces 8 lignes.

Voyez la figure, à droite.

Quant à la résistance composée du rectangle QS & du triangle mixte CLWB, comme ce supplément agit par des léviers différents, il faut y ajouter, premiérement, la cinquieme partie du rectangle E γ, qui forme la hauteur & l'épaisseur réduite de l'appareil des pieds-droits, laquelle partie est de 4 pieds 3 pouces 10 lignes, que nous nommerons *pp*: il faut multiplier ce supplément par son bras de lévier, qui est $y - \phi$, ϕ étant égal à $\frac{\gamma S}{2}$; ce qui donne $ppy - pp\phi$.

Il faut ensuite chercher le centre de gravité de la partie de couronne qui représente (entre les deux portions de cercles concentriques, GHI & EBF) le reste de toute la pierre de taille comprise dans les culées & le triangle mixte, laquelle partie de couronne a 161 pieds 9 pouces 4 lignes de superficie, dont le cinquieme est de 32 pieds 4 pouces 3 lignes, que nous nommerons *rr*.

Pour trouver le centre de gravité de cette couronne, on cherchera, suivant la formule abrégée que nous avons donnée pour cela, la distance du point C au centre de gravité du grand secteur GHIC.

On a déjà le centre de gravité du petit secteur EBFC; la différence de la distance de ces deux centres de gravité au point C, sera le bras de lévier du poids du petit secteur, lequel, comparé avec le poids de la couronne par l'analogie ordinaire, détermine le centre de pesanteur de cette couronne, de maniere qu'il tombe sur EC à 7 pouces 5 lignes du point E.

Or, si nous nommons cette derniere quantité h, le bras de lévier de cette couronne sera $y + h$, & son moment $rry + rrh$.

Si nous ajoutons actuellement ces deux suppléments au premier membre de notre équation du premier cas, nous aurons $\frac{ddy}{2} + ssy + ssl + rry + rrh + ppy - pp\varphi = \frac{nnbf}{a} - nny - nnc$; ce qui donne $yy + \frac{2ssy + 2rry + 2ppy + 2nny}{d} = \frac{2nnbf}{ad} - \frac{2nnc - 2ssl - 2rrh + 2pp\varphi}{d}$; & posant, comme dans les formules précédentes, $\frac{2ss + 2nn + 2rr + 2pp}{d} = t$, & $\frac{2nnbf}{ad} - \frac{2nnc - 2ssl - 2rrh + 2pp\varphi}{d} = q^2$,

Nous aurons $y = \sqrt{qq + \frac{1}{4}tt} - \frac{1}{2}t$, ce qui donne 19 pieds 4 pouces pour la valeur de y, dont on aura la preuve, comme dans l'hypothese précédente, en multipliant de part & d'autre chaque puissance par son bras de lévier.

Le bras de lévier de l'effort de la voûte, qui est, comme dans la premiere formule, $\frac{bf}{2a} - \frac{y-c}{2}$, donnera 7 pieds 2 lignes, qui multipliés par le rapport $\frac{2ann}{a} = 2nn$, donneront pour la poussée 12345 pieds 2 pouces 8 lignes.

La superficie du rectangle QS, multipliée par son bras de lévier $= \frac{y}{2}$, donne	8516 pi. 11 po. 3 lig.
La superficie du triangle mixte, exprimée par $ss \times y + l$, donne .	3091 . 1 . 4
La superficie de la couronne GF, exprimée par $rr \times y + h$, donne .	625 . 10 . 2
La superficie du petit triangle $B\gamma$, exprimée par $pp \times y - \varphi$, donne .	77 . 6 . 10
Total égal	12311 . 5 . 7

On a déjà prévenu que ces deux produits pouvoient être considérés comme égaux en pareil cas; & en effet, en ajoutant une ligne de plus à l'épaisseur de la culée, le dernier de ces deux produits surpasseroit le premier, de telle sorte que la voûte pourroit même encore être chargée du poids de deux grosses voitures, sans que l'équilibre en fût dérangé.

On voit donc dans cette formule, que la valeur de y excede de 5 pouces 8 lignes celle que nous avons trouvée en premier lieu, en nous conformant à l'hypothese de M. de la Hire; en sorte qu'on peut juger par cet exemple, que dans les circonstances où le poids de la pierre de taille surpasseroit d'un cinquieme ou d'un quatrieme celui de la maçonnerie de moellon, il en résulteroit une épaisseur pour les culées des voûtes, beaucoup plus considérable que celle qui provient de la premiere formule, & de laquelle peut dépendre le succès de ces ouvrages; ce qui paroît suffisamment démontré.