VII. KAPITEL

Die Bestimmung einer Längendifferenz

1. *Formulierung der Aufgabe.* Wir unterscheiden die beiden Stationen, deren Längendifferenz bestimmt werden soll, durch die Indizes E (Ost) und W (West). Ist an der Oststation die Uhrzeit gleich U_E im Moment, wo sie an der Weststation U_W ist, so ist die Längendifferenz Λ gleich

$$\Lambda = (U_E - U_W) + (u_E - u_W),$$

oder wenn ΔU die Differenz der Uhrzeiten und Δu die Differenz der Uhrkorrektionen bezeichnet, gleich

$$\Lambda = \Delta U + \Delta u. \tag{95}$$

Die Bestimmung von ΔU, das heißt die Vergleichung der beiden Stationsuhren, begegnet heute keiner Schwierigkeit dank den Zeitzeichen, die von einer größeren Zahl kräftiger TSF.-Stationen ausgesendet werden. Sind U_{Ei} und U_{Wi} die einem bestimmten Zeitzeichen R_i entsprechenden Uhrzeiten, so daß

$$U_{Ei} = R_i + \Delta R_{Ei},$$
$$U_{Wi} = R_i + \Delta R_{Wi}$$

ist, so wird

$$\Delta U_i = U_{Ei} - U_{Wi} = \Delta R_{Ei} - \Delta R_{Wi}.$$

Von den verschiedenen Werten ΔU_i, die man sich im Lauf einer Beobachtungsnacht verschafft hat, wird man zum Wert ΔU übergehen, der in die Beziehung (95) einzuführen ist. Wir betrachten zunächst die Fehler, die in der Differenz Δu der Uhrkorrektionen der beiden Beobachter auftreten können.

2. *Elimination systematischer Fehler.* Wenn zwei verschiedene Beobachter mit vollkommen gleichartigen Instrumenten arbeiten, so erhalten sie *ceteris paribus* nicht dasselbe Resultat; man nennt den Fehler, der ausschließlich von der Person des Beobachters abhängt, die persönliche Gleichung. Wenn zwei Beobachter, welche dieselbe persönliche Gleichung haben, mit verschiedenen oder gleichartigen Instrumenten arbeiten, so erhalten sie wieder nicht das

gleiche Resultat; man spricht in diesem Falle von einer instrumentellen Gleichung. Wird zur Beobachtung der Sterndurchgänge das selbstregistrierende Mikrometer benützt, so wird die persönliche Gleichung stark herabgesetzt, verschwindet aber nicht ganz; die Bezeichnung «unpersönliches Mikrometer» für dieses Hilfsmittel ist deshalb nicht völlig gerechtfertigt.

Der Einfluß der persönlichen und instrumentellen Gleichung wird dadurch eliminiert, daß die beiden Beobachter inmitten der Operationen einer Längenbestimmung mit ihren Instrumenten die Stationen wechseln. Sind ε_A und ε_B die Beträge, um welche die beiden Beobachter ihre Uhrkorrektionen wegen dieser beiden Fehlerquellen zu verbessern haben, so ist, wenn der Beobachter A auf der Oststation, der Beobachter B auf des Weststation beobachtet, die verbesserte Differenz der Uhrkorrektion gleich

$$\Delta u_{AB} = (u_A + \varepsilon_A)_E - (u_B + \varepsilon_B)_W;$$

nach dem Stationswechsel wird sie gleich

$$\Delta u_{BA} = (u_B + \varepsilon_B)_E - (u_A + \varepsilon_A)_W;$$

im Mittel

$$\Delta u = \frac{1}{2}\,(\Delta u_{AB} + \Delta u_{BA})$$

hebt sich der Einfluß der persönlichen und instrumentellen Gleichung, wenn diese konstant bleibt.

Werden an den beiden Stationen die gleichen Sterne beobachtet, so heben sich in der Differenz $(u_E - u_W)$ auch die Rektaszensionsfehler.

3. *Die Uhrvergleichungen.* Die Differenzen ΔR der Uhrsekunden (US.) gegenüber den Zeitzeichen können entweder bestimmt werden dadurch, daß man auf einem Chronographen neben den Uhrsekunden die Zeitzeichen registriert, oder dadurch, daß Koinzidenzen der Uhrsekunden mit den Zeitzeichen beobachtet werden. Das letztere Verfahren wird dadurch möglich gemacht, daß die Zeitzeichen in einem von den Uhrsekunden abweichenden Rhythmus ausgesendet werden.

Bei beiden Arten der Vergleichung hat man mit Fehlern systematischer Natur zu rechnen; insofern sie konstant sind, werden sie, einschließlich der Fehler, die eine Folge der endlichen Ausbreitungsgeschwindigkeit der elektromagnetischen Wellen sind, durch den Stationswechsel der Beobachter und Instrumente unschädlich gemacht.

Werden die Zeitzeichen neben den Uhrsekunden auf einem Chronographen registriert, so kann man eine untere Grenze des Fehlers der Vergleichung angeben; er ist diejenige Komponente im Gesamtfehler, die nur abhängt von der Genauigkeit, mit der die Zeitmarken auf dem Chronographenstreifen abgelesen werden, und nicht von der Zahl der Zeitmarken, die zur Mittelbildung bei der

Ableitung des Endresultates verwendet werden. Es ist üblich, die Sekundenmarken auf die hundertstel Sekunde abzulesen, wobei mit Hilfe einer Unterteilung von 10 Intervallen pro Sekundenlänge die letzte Einheit von Auge geschätzt wird. Es liegen dann die wahren Fehler, die aus der Ablesung allein entspringen, zwischen $-0{,}005$ und $+0{,}005$ Uhrsekunden. Da aber alle Fehler in diesem Bereich gleich häufig auftreten, ist, wie sich aus der Beziehung

$$\frac{1}{n}\,(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)=\frac{n^2}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{2n}\right)$$

ersehen läßt, als untere Grenze des mittleren Fehlers einer Vergleichung anzusetzen

$$\pm\frac{0{,}005}{\sqrt{3}}=\pm\,0{,}0029\ \text{US.}$$

Berücksichtigt man die übrigen Fehler, welche die Genauigkeit der Vergleichung beeinträchtigen, wie die falsche Schätzung der Zehntel im Intervall und Unregelmässigkeiten in der elektrischen Registrierung, so wird man kaum geneigt sein, den Gesamtfehler der Vergleichung auf weniger als

$$\pm\,0{,}004\ \text{US.}$$

anzusetzen.

Die Genauigkeit, mit der die Uhren beim Koinzidenzverfahren miteinander verglichen werden können, hängt davon ab, wie genau bei einem gegebenen Koinzidenzintervall der Koinzidenzmoment aufgefaßt werden kann. Fallen auf $N = 86400$ mittlere Sekunden $(N-g)$ Uhrsekunden und $(N+r)$ Zeitzeichenintervalle (ZI.), so ist

$$\left.\begin{aligned}1\ \text{ZI.}&=\frac{N-g}{N+r}\ \text{US.}=\left(1-\frac{r+g}{N+r}\right)\text{US.},\\ 1\ \text{US.}&=\frac{N+r}{N-g}\ \text{ZI.}=\left(1+\frac{r+g}{N-g}\right)\text{ZI.}\end{aligned}\right\}\qquad(96)$$

Sind r und g positiv, so ist

$$1\ \text{ZI.} < 1\ \text{mittlere Sekunde} < 1\ \text{US.}$$

Die Uhr geht dann gegen mittlere Zeit nach.

Die Intervalle zwischen zwei aufeinanderfolgenden Koinzidenzen können entweder in ZI. oder in US. ausgedrückt werden. Beträgt das Koinzidenzintervall c ZI. und c' US., so ist, wenn $1\ \text{ZI.} < 1\ \text{US.}$ ist:

$$c = c' + 1;$$

somit sind

$$\begin{aligned}c\ \text{ZI.}&=(c-1)\ \text{US.};\quad 1\ \text{ZI.}=\left(1-\frac{1}{c}\right)\text{US.};\\ (c'+1)\ \text{ZI.}&=c'\ \text{US.};\quad 1\ \text{US.}=\left(1+\frac{1}{c'}\right)\text{ZI.}\end{aligned}$$

Vergleicht man diese Beziehungen mit den Beziehungen (96), so folgt

$$\left.\begin{aligned} c &= \frac{N+r}{r+g}\,, \\ c' &= \frac{N-g}{r+g}\,, \\ g &= \frac{N-rc'}{c}\,. \end{aligned}\right\} \qquad (97)$$

und

Ist die Beobachtungsuhr genau nach mittlerer Zeit reguliert, so daß $g = 0$ zu setzen ist, so wird

$$c' = c - 1 = \frac{N}{r}\,.$$

Da man zwei scharfe Schläge als getrennt oder wenigstens nicht als zusammenfallend auffaßt, wenn ihre Mitten um $^1/_{50}$ bis $^1/_{60}$ auseinanderliegen, hat man als Koinzidenzintervall gewählt

$$c' = c - 1 = 60,$$

sodaß $r = 1440$ wird. Da die Zeitzeichen während 300 mittleren Sekunden ausgesendet werden, können mit einer nach mittlerer Zeit regulierten Uhr 5 aufeinanderfolgende Koinzidenzen beobachtet werden. Wird eine nach Sternzeit regulierte Uhr benützt, so ist in den Beziehungen (97)

$$g = -236^{\mathrm{s}}{,}55,$$
$$r = 1440$$

zu setzen; es wird dann

$$c' = c - 1 = 71{,}99 \sim 72.$$

Sowohl wenn die Koinzidenzen mit einer nach mittlerer Zeit als wenn sie mit einer nach Sternzeit regulierten Uhr beobachtet werden, ist das Koinzidenzintervall gleich oder sehr nahe gleich einer ganzen Zahl von Uhrsekunden. Da es Mittel gibt, die Koinzidenzmomente mit Sicherheit auf die Sekunde genau festzulegen, beträgt der Fehler der Vergleichung der Uhrsekunden mit der Zeitzeichenreihe im Maximum

$$\frac{1}{2c} \text{ Uhrsekunden,}$$

also, wenn $g = 0$ ist: $\pm\, 0{,}0082$ mittlere Sekunden,
und wenn $g = -236{,}55$ ist: $\pm\, 0{,}0069$ Sternzeitsekunden.

Geht man von den Maximalfehlern zu den mittleren Fehlern über, so ist,

wenn $g = 0$, der mittlere Fehler gleich $\pm 0^{\mathrm{s}}{,}0082 / \sqrt{3} = \pm 0^{\mathrm{s}}{,}0047$,
wenn $g = -236^{\mathrm{s}}{,}55$, $\pm 0\;0069 / \sqrt{3} = \pm 0{,}0040$.

Im zweiten Fall wird der mittlere Fehler kleiner, weil wir angenommen haben, daß trotz dem größeren Koinzidenzintervall sich der Koinzidenzmoment auf eine Uhrsekunde genau beobachten lasse.

Benützt man zur Koinzidenzbeobachtung das sogenannte Hännische Verfahren, so lassen sich die Koinzidenzmomente mühelos auf eine Uhrsekunde genau feststellen. Dieses Verfahren beruht darauf, daß man über die Anschlußklemmen des Kopfhörers *T* eine Leitung legt und in diese den Sekundenkontakt der Beobachtungsuhr *U* einschaltet (vergleiche Figur 19). Da die Dauer der Zeitzeichen sehr kurz ist, so werden sie, solange als sie in das Intervall des Kontaktschlusses der Uhr von $^1/_{10}$ bis $^2/_{10}$ sec Dauer fallen, ausgelöscht; sie werden erst wieder hörbar, wenn der Beginn des Zeitzeichens vor den Moment des Kontaktschlusses fällt. Als Koinzidenzmoment definiert man die dem ersten wieder hörbaren Zeichen vorausgehende Uhrsekunde; als Beginn der Uhrsekunde hat

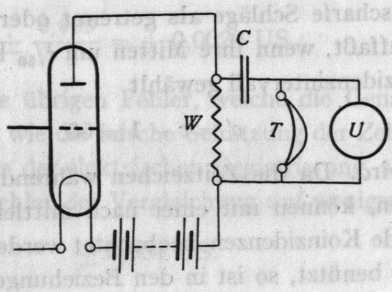

Fig. 19

man dann beim Registrieren auf dem Chronographen den Moment des Kontaktschlusses, und nicht den Moment der Kontaktöffnung zu nehmen.

Das in der Figur 19 dargestellte Schaltschema ist von J. Rybner angegeben worden in den Verhandlungen der Baltischen geodätischen Kommission 1930 («Untersuchungen über die Reaktionszeit von Relais»); es hat vor anderen möglichen Schaltanordnungen den Vorzug, daß störende Geräusche, die von Öffnungs- oder Schließungsfunken herrühren, vermieden werden. Bei 4000 Ω Widerstand des Kopfhörers wählt man $W = 10000\ \Omega$ und $C = 0{,}5\ MF$.

Stellt man dem mittleren Fehler der Vergleichung, den man bei der Anwendung des Hännischen Verfahrens begeht, den mittleren Fehler, der bei der Registrierung der Uhrsekunden und der Zeitzeichen auf einem Chronographen auftritt, gegenüber, so erweisen sich die beiden Verfahren als gleichwertig.

Nun kann man die Genauigkeit des Koinzidenzverfahrens dadurch steigern, daß man durch Änderung des Ganges der Beobachtungsuhr dafür sorgt, daß das Koinzidenzintervall nicht gleich einer ganzen Zahl von Uhrsekunden ist, sondern daß wenigstens einmal ein Sprung von 1 Sekunde im Koinzidenzintervall während der Sendedauer der Zeitzeichen auftritt; es ist das dann der Fall, wenn das Koinzidenzintervall um 0,2 oder 0,4 abweicht von der nächsten ganzen Zahl. Bei Benützung einer Sternzeituhr wird $c' = 71{,}\underline{8}0$ (statt 71,99), wenn sie in 24^h mittlere Zeit um $233^s{,}41$ (statt 236,55) vorgeht und somit gegen Sternzeit einen Gang von $+\ 3^s{,}14$ hat. Es kommt aber nur dann sicher ein

Sprung von 72 auf 71 vor, wenn 5 aufeinanderfolgende Koinzidenzen beobachtet werden, wozu die Zeitzeichen während 360 Sekunden ausgesendet werden müßten. Mit einem Sekundensprung während der üblichen Sendedauer von 300 mittleren Sekunden kann man sicher rechnen, wenn der Gang einer nach mittlerer Zeit regulierten Uhr so verstimmt wird, daß das Koinzidenzintervall von 60 auf 59,80 heruntergeht. Da es aber in diesem Fall vorkommen kann, daß die Koinzidenzen auf die Uhrsekunde 0 oder 1 fallen, wo zur Kennzeichnung der Minute oft der Kontakt fehlt, oder auf die Zeitzeichen der Ordnungszahlen 1, 62, 123, 184, 245, 306, bei welchen das Zeichen eine Dauer von ungefähr einer halben Sekunde hat, so empfiehlt es sich, als Koinzidenzdauer 58,80 zu wählen; die Uhr muß dann auf einen Gang von $+ 28^{s}_{,}90$ gegen mittlere Zeit eingestellt werden.

Bei den Längenbestimmungen, welche die Schweizerische geodätische Kommission in den Jahren 1934 bis 1935 auf Stationen zweiter Ordnung hat ausführen lassen[10]), wurde zur Vergleichung mit den Zeitzeichen ein ungefähr auf den Gang $g = + 28^{s}_{,}90$ eingestelltes Chronometer benützt. Die Zeitbestimmungen sind aber mit einem nach Sternzeit regulierten Chronometer gemacht worden. Die beiden Chronometer mußten deshalb auf dem Chronographen miteinander verglichen werden, wobei eine Ablesegenauigkeit von $0^{s}_{,}01$ eingehalten wurde. Der Gesamtfehler der Vergleichung der Uhrzeit U mit den Zeitzeichen R setzt sich in diesem Fall zusammen aus:

1. dem mittleren Fehler der Koinzidenzbeobachtung, der auf

$$\pm \frac{1}{5} \cdot 0^{s}_{,}0047 = \pm 0^{s}_{,}0009$$

anzusetzen ist, und

2. dem mittleren Fehler der chronographischen Vergleichung der beiden Uhren, der ungefähr

$$\pm 0^{s}_{,}0040$$

beträgt. Vergleicht man die Resultante aus diesen beiden mittleren Fehlern mit dem mittleren Fehler, der der Vergleichung zuzuschreiben ist, wenn die genau nach Sternzeit regulierte und mit Sekundenkontakt versehene astronomische Beobachtungsuhr direkt mit den Zeitzeichen durch Koinzidenzen verglichen wird, das ist $\pm 0^{s}_{,}0040$, so erweist sich dieses letztere Verfahren als ebenso leistungsfähig, trotzdem die Koinzidenzen nur auf ganze Sekunden genau beobachtet werden. Der Vorteil, den die Verwertung eines Sekundensprunges zur Erzielung einer höheren Genauigkeit bietet, wird durch die mit der chronographischen Vergleichung verbundenen Fehler wieder aufgehoben.
