Die Koeffizienten F_1', F_2', F_1'', F_2'' nehmen in den einzelnen Fällen die folgenden Werte an:

F	F_1'	F_2'	F_1''	F_2''
du	0	$-\dfrac{\sin b}{\sin\Phi\,\sin(a-b)}$	0	$+\dfrac{\sin a}{\sin\Phi\,\sin(a-b)}$
$d\Phi$	0	$+\dfrac{\cos b}{\sin(a-b)}$	0	$-\dfrac{\cos a}{\sin(a-b)}$
da	1	$-\dfrac{\sin b}{\sin(a-b)}\operatorname{cotg}\Phi$	0	$+\dfrac{\sin a}{\sin(a-b)}\operatorname{cotg}\Phi$
db	0	$+\dfrac{\sin b}{\sin(b-a)}\operatorname{cotg}\Phi$	1	$-\dfrac{\sin a}{\sin(b-a)}\operatorname{cotg}\Phi$

Man erhält damit die folgenden Ausdrücke für die Quadrate der mittleren Fehler von du, $d\Phi$, da und db:

1. *Mittlerer Fehler m_u von du*:

$$m_u^2 = \left(\frac{m'^2}{[b'b_1']}\sin^2 b + \frac{m''^2}{[b''b_1'']}\sin^2 a\right)\operatorname{cosec}^2\Phi\,\operatorname{cosec}^2(a-b).$$

2. *Mittlerer Fehler m_Φ von $d\Phi$*:

$$m_\Phi^2 = \left(\frac{m'^2}{[b'b_1']}\cos^2 b + \frac{m''^2}{[b''b_1'']}\cos^2 a\right)\operatorname{cosec}^2(a-b).$$

3. *Mittlerer Fehler m_a von da*:

$$m_a^2 = m'^2\left(\frac{1}{[a'a']} + \frac{1}{[b'b_1']}\left(\frac{\sin b\operatorname{cotg}\Phi}{\sin(a-b)} + \alpha_2'\right)^2\right) + \frac{m''^2}{[b''b_1'']}\,\frac{\operatorname{cotg}^2\Phi\sin^2 a}{\sin^2(a-b)}.$$

4. *Mittlerer Fehler m_b von db*:

$$m_b^2 = \frac{m'^2}{[b'b_1']}\,\frac{\operatorname{cotg}^2\Phi\sin^2 b}{\sin^2(b-a)} + m''^2\left(\frac{1}{[a''a'']} + \frac{1}{[b''b_1'']}\left(\frac{\sin a\operatorname{cotg}\Phi}{\sin(b-a)} + \beta_2'\right)^2\right).$$

5. *Die günstigsten Beobachtungsumstände.* Es seien ε_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ die wahren Fehler der 4 fingierten Beobachtungsgrößen l_i, von welchen sich die beiden ersten auf den Vertikal a und die beiden letzten auf den Vertikal b beziehen; die Sterne seien zu verschiedenen Seiten des Zenites beobachtet.

Die wahren Fehler der 4 unbekannten Verbesserungen du, $d\Phi$, da und db seien ε_u, ε_Φ, ε_a und ε_b; sie werden durch die folgenden Beziehungen mit den voneinander unabhängigen wahren Fehlern ε_i verbunden:

$$\sin z_1(\varepsilon_a - \varepsilon_u\cos\Phi) - \cos z_1(\varepsilon_u\sin\Phi\cos a + \varepsilon_\Phi\sin a) = \varepsilon_1\sin z_1,$$

$$\sin z_2(\varepsilon_a - \varepsilon_u\cos\Phi) + \cos z_2(\varepsilon_u\sin\Phi\cos a + \varepsilon_\Phi\sin a) = \varepsilon_2\sin z_2,$$

$$\sin z_3(\varepsilon_b - \varepsilon_u\cos\Phi) - \cos z_3(\varepsilon_u\sin\Phi\cos b + \varepsilon_\Phi\sin b) = \varepsilon_3\sin z_3,$$

$$\sin z_4(\varepsilon_b - \varepsilon_u\cos\Phi) + \cos z_4(\varepsilon_u\sin\Phi\cos b + \varepsilon_\Phi\sin b) = \varepsilon_4\sin z_4.$$

Durch Auflösung dieser Gleichungen nach ε_u, ε_Φ, ε_a und ε_b als Unbekannten erhält man folgende Darstellung:

$$\varepsilon_u \sin\Phi \sin(a-b) = +(\varepsilon_1-\varepsilon_2)\frac{\sin z_1 \sin z_2}{\sin(z_1+z_2)}\sin b - (\varepsilon_3-\varepsilon_4)\frac{\sin z_3 \sin z_4}{\sin(z_3+z_4)}\sin a,$$

$$\varepsilon_\Phi \sin(a-b) = -(\varepsilon_1-\varepsilon_2)\frac{\sin z_1 \sin z_2}{\sin(z_1+z_2)}\cos b + (\varepsilon_3-\varepsilon_4)\frac{\sin z_3 \sin z_4}{\sin(z_3+z_4)}\cos a,$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_a = \Big\{ & \varepsilon_1 \sin z_1 \left(\cos z_2 + \sin z_2 \frac{\sin b}{\sin(a-b)}\operatorname{cotg}\Phi\right) \\ & + \varepsilon_2 \sin z_2 (\cos z_1 - \sin z_1)\frac{\sin b}{\sin(a-b)}\operatorname{cotg}\Phi\Big\}\cdot\operatorname{cosec}(z_1+z_2) \\ & - (\varepsilon_3-\varepsilon_4)\frac{\sin z_3 \sin z_4}{\sin(z_3+z_4)}\,\frac{\sin a}{\sin(a-b)}\operatorname{cotg}\Phi,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_b = & -(\varepsilon_1-\varepsilon_2)\frac{\sin z_1 \sin z_2}{\sin(z_1+z_2)}\,\frac{\sin b}{\sin(b-a)}\operatorname{cotg}\Phi \\ & + \Big\{\varepsilon_3 \sin z_3\left(\cos z_4 + \sin z_4 \frac{\sin a}{\sin(b-a)}\operatorname{cotg}\Phi\right) \\ & + \varepsilon_4 \sin z_4 (\cos z_3 - \sin z_3)\frac{\sin a}{\sin(b-a)}\operatorname{cotg}\Phi\Big\}\cdot\operatorname{cosec}(z_3+z_4).\end{aligned}$$

Von den wahren Fehlern ε gehen wir zu den mittleren Fehlern m über. Dabei machen wir wieder die Annahme, es seien die Durchgangsbeobachtungen an soviel Fäden oder Kontakten angestellt oder beruhen auf soviel Pointierungen, daß die mittleren Fehler m_i, die den wahren Fehlern ε_i entsprechen, $\operatorname{cosec} z_i$ proportional werden; dieser Annahme entsprechend setzen wir

$$m_i^2 \sin^2 z_i = m^2 = \text{constans}.$$

Zur Vereinfachung der Schreibweise führen wir die folgenden Abkürzungen ein:

$$f(a,b) = \frac{\sin^2 a}{\sin^2(a-b)}, \qquad g(a,b) = \frac{\cos^2 a}{\sin^2(a-b)},$$

$$F(z_i,z_k) = \frac{\sin^2 z_i + \sin^2 z_k}{\sin^2(z_i+z_k)}, \quad G(z_i,z_k) = \frac{\cos^2 z_i + \cos^2 z_k}{\sin^2(z_i+z_k)}.$$

Die Quadrate der mittleren Fehler von du, $d\Phi$, da und db lassen sich dann in folgender Form schreiben:

$$\left.\begin{aligned} m_u^2 \sin^2\Phi &= m^2\{F(z_1,z_2)\,f(b,a) + F(z_3,z_4)\,f(a,b)\}, \\ m_\Phi^2 &= m^2\{F(z_1,z_2)\,g(b,a) + F(z_3,z_4)\,g(a,b)\}, \\ m_a^2 &= m^2\Big\{G(z_1,z_2) + \big(F(z_1,z_2)\,f(b,a) + F(z_3,z_4)\,f(a,b)\big)\operatorname{cotg}^2\Phi \\ &\quad + 2\,\frac{\sin z_2\cos z_2 - \sin z_1 \cos z_1}{\sin(z_1+z_2)}\,\frac{\sin b}{\sin(a-b)}\operatorname{cotg}\Phi\Big\}, \\ m_b^2 &= m^2\Big\{G(z_3,z_4) + \big(F(z_3,z_4)\,f(a,b) + F(z_1,z_2)\,f(b,a)\big)\operatorname{cotg}^2\Phi \\ &\quad + 2\,\frac{\sin z_4\cos z_4 - \sin z_3 \cos z_3}{\sin(z_3+z_4)}\,\frac{\sin a}{\sin(b-a)}\operatorname{cotg}\Phi\Big\}. \end{aligned}\right\} \quad (91)$$

In den beiden letzten Beziehungen verschwinden rechter Hand die Glieder, welche den Faktor

$$2\,(\sin z_k \cos z_k - \sin z_i \cos z_i) \equiv \sin 2\,z_k - \sin 2\,z_i$$

enthalten in 2 Fällen, nämlich

a) wenn in jedem der beiden Vertikale die Sterne symmetrisch zum Zenit beobachtet werden, so daß

$$z_k = z_i$$

ist, und

b) wenn die Summe der Zenitdistanzen gleich 90^0 ist:

$$z_k + z_i = 90^0.$$

Im Falle a) setzen wir

$$z_1 = z_2 = z_a, \qquad z_3 = z_4 = z_b.$$

Die Ausdrücke für die Quadrate der mittleren Fehler lauten dann:

$$\left.\begin{aligned} m_u^2 \sin^2 \Phi &= \frac{m^2}{2}\left\{\sec^2 z_a\, f(b, a) + \sec^2 z_b\, f(a, b)\right\},\\ m_\Phi^2 &= \frac{m^2}{2}\left\{\sec^2 z_a\, g(b, a) + \sec^2 z_b\, g(a, b)\right\},\\ m_a^2 &= \frac{m^2}{2}\operatorname{cosec}^2 z_a + m_u^2 \cos^2 \Phi,\\ m_b^2 &= \frac{m^2}{2}\operatorname{cosec}^2 z_b + m_u^2 \cos^2 \Phi. \end{aligned}\right\} \tag{92}$$

Die Uhrkorrektion und die Polhöhe werden somit am genauesten bestimmt, wenn man in jedem Vertikal die beiden Sterne ins Zenit rücken läßt, so daß $\sec z = 1$ wird; das Azimut bleibt dann aber unbestimmt, denn es wird $m_a = m_b = \pm\infty$.

Stehen die beiden Vertikale senkrecht zueinander, so ist

$$f(a, b) + f(b, a) = g(a, b) + g(b, a) = 1. \tag{93}$$

Sind ferner die Zenitdistanzen in beiden Vertikalen gleich groß, so daß

$$z_a = z_b = z$$

zu setzen ist, so wird:

$$m_u^2 \sin^2 \Phi = m_\Phi^2 = \frac{m^2}{2}\sec^2 z,$$

$$m_a^2 = m_b^2 = \frac{m^2}{2}(\operatorname{cosec}^2 z + \sec^2 z \operatorname{cotg}^2 \Phi).$$

In der letzten Beziehung nimmt der Klammerausdruck den kleinstmöglichen Wert an für den Wert $z = z_0$, der die Bedingung

$$\operatorname{tg} z_0 = \sqrt{\operatorname{tg} \Phi}$$

erfüllt; es wird dann

$$m_a^2 = m_b^2 = \frac{m^2}{2}\operatorname{cosec}^2 \Phi.$$

In mittleren Breiten wird mit tg $\Phi = 1$:

$$z_0 = 45^0,$$

also

$$m_u^2 = 2\, m_\Phi^2 = m_a^2 = m_b^2 = 2\, m^2.$$

Im Falle b), wo $z_k + z_i = 90^0$ ist, wird

$$F(z_i, z_k) = G(z_i, z_k) = 1.$$

Somit lauten nun die Ausdrücke für die Quadrate der mittleren Fehler:

$$\left.\begin{aligned} m_u^2 \sin^2 \Phi &= m^2 \{ f(b, a) + f(a, b) \}, \\ m_\Phi^2 &= m^2 \{ g(b, a) + g(a, b) \}, \\ m_a^2 = m_b^2 &= m^2 + m_u^2 \cos^2 \Phi. \end{aligned}\right\} \quad (94)$$

Legt man jetzt die beiden Vertikale senkrecht zueinander, so erhält man wegen der Beziehungen (93):

$$m_u^2 \sin^2 \Phi = m_\Phi^2 = m_a^2 \sin^2 \Phi = m_b^2 \sin^2 \Phi = m^2.$$

Es werden also, ganz unabhängig davon, in welche Richtungen die zueinander senkrecht stehenden Vertikale fallen, die Uhrkorrektion und die beiden Azimute mit derselben Genauigkeit bestimmt; der mittlere Fehler dieser drei Größen verhält sich zum mittleren Fehler der Polhöhe wie cosec Φ zu 1.

Nach unseren Voraussetzungen ist es gleichgültig, an welcher Stelle des Vertikals die beiden Sterne beobachtet werden; es darf zum Beispiel $z_1 = 0^0$ und $z_2 = 90^0$ gewählt werden; bei der praktischen Durchführung wird man von dieser Wahl absehen und sich auf Sterne beschränken, die nicht zu nahe am Horizont den Vertikal passieren, um lateralen Refraktionsanomalien nicht einen zu starken Einfluß einzuräumen.

Will man auf einer Station nur das Azimut *einer* Richtung bestimmen und legt auf die gleichzeitige Bestimmung der Polhöhe keinen Wert, so kann man die Frage stellen, in welches Azimut der zweite Vertikal zu legen sei, damit das Azimut der Objektrichtung aus den Beobachtungen in beiden Vertikalen so genau als möglich hervorgehe. Wenn die Objektrichtung in den Meridian fällt, ist offenbar der zweite Vertikal ebenfalls in den Meridian zu legen. Fällt die Objektrichtung in den ersten Vertikal, so hat man den zweiten Vertikal wieder in den Meridian fallen zu lassen; denn aus Meridianbeobachtungen geht die Uhrkorrektion, deren Kenntnis zur Berechnung des Azimutes des im ersten Vertikal aufgestellten Instrumentes erforderlich ist, am genauesten hervor. Bei beliebiger Orientierung des Objektvertikales hat man den zweiten Vertikal aber nicht in den Meridian zu legen, wie aus Folgendem ersichtlich ist. Die Funktion

$$F(a, b) = f(a, b) + f(b, a) = \frac{\sin^2 a + \sin^2 b}{\sin^2 (a - b)},$$

von der die mittleren Fehler der Azimute der beiden Instrumentenvertikale abhängen, ist formal identisch mit der Funktion $F(v, v')$, welche die mittleren Fehler der Uhrkorrektion und des Instrumentenazimutes in der Meridianzeitbestimmungsmethode bestimmt (vergleiche Seite 83/84). Die dort gegebene Diskussion läßt sich auf $F(a, b)$ übertragen. Bei festgehaltenem Wert von a nimmt $F(a, b)$ einen Minimalwert an für einen Wert $b = b_0$, der die Bedingung

$$\operatorname{tg} b_0 = -\frac{\operatorname{tg} a}{1 + \operatorname{tg}^2 a}$$

oder die Bedingung

$$\operatorname{tg}(b_0 - a) = -2 \operatorname{tg} a$$

erfüllt. Es wird dann

$$F(a, b_0) = \frac{1}{2}(1 + \sin^2 a) < 1,$$

und die Funktion

$$G(a, b) = g(a, b) + g(b, a) = \frac{\cos^2 a + \cos^2 b}{\sin^2(a - b)},$$

von welcher der mittlere Fehler m_Φ der Polhöhe abhängt, wird gleich

$$G(a, b_0) = \frac{1}{2}(1 + \cos^2 a + \operatorname{cosec}^2 a).$$

Am stärksten weicht der zweite Vertikal vom Meridian ab, wenn $a = a_m$ die Bedingung

$$\sin^2 a_m = \frac{1}{3}$$

erfüllt; es wird dann der a_m entsprechende Wert $b = b_m$ gegeben durch die Beziehung

$$\operatorname{tg} b_m = -\frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Es ist

$$a_m = 35^0 16' \quad \text{und} \quad b_m = -19^0 28'.$$

Ferner wird

$$F(a_m, b_m) = \frac{2}{3},$$

$$G(a_m, b_m) = 2\frac{1}{3}.$$

In der nachstehenden Tabelle sind zusammengehörige Werte von a, b_0, $F(a, b_0)$ und $G(a, b_0)$ angegeben.

a	b_0	$F(a, b_0)$	$G(a, b_0)$
0°00′	0°00′	0,500	∞
15 00	− 13 11	0,534	8,43
30 00	− 19 06	0,625	2,88
35 16	− 19 28	0,666..	2,333..
45 00	− 19 26	0,750	1,75
60 00	− 13 15	0,875	1,29
75 00	− 7 22	0,967	1,07
90 00	0 00	1,000	1,00

Die Quadrate der mittleren Fehler von du, $d\Phi$, da und db nehmen in den 3 Fällen

$$a = 0^0, \quad 35^0 16', \quad 90^0$$

die folgenden Werte an:

(m. F.)^2	$a = 0^0$	$a = 35^0 16'$	$a = 90^0$
m_u^2	$\frac{1}{2} m^2 \operatorname{cosec}^2 \Phi$	$\frac{2}{3} m^2 \operatorname{cosec}^2 \Phi$	$m^2 \operatorname{cosec}^2 \Phi$
m_Φ^2	∞	$\frac{7}{3} m^2$	m^2
$m_a^2 = m_b^2$	$m^2\left(1 + \frac{1}{2} \operatorname{cotg}^2 \Phi\right)$	$m^2\left(1 + \frac{2}{3} \operatorname{cotg}^2 \Phi\right)$	$m^2 \operatorname{cosec}^2 \Phi$

Da $\operatorname{cosec}^2 \Phi = 1 + \operatorname{cotg}^2 \Phi$ ist, ist im Falle $a = 90^0$ der mittlere Fehler m_a oder m_b größer als im Falle $a = 0^0$ und $a = 35^0 16'$. Der Gewinn an Genauigkeit, der im Falle $a < 90^0$ erzielt wird dadurch, daß der zweite Vertikal mit dem ersten den Winkel $a - b_0$ und nicht den Winkel $a - b = 90^0$ bildet, ist relativ bescheiden; denn es verhält sich der Faktor $(1 + \frac{1}{2} \operatorname{cotg}^2 \Phi)$ im Falle $a = 0^0$ zum Faktor $\operatorname{cosec}^2 \Phi = 1 + \operatorname{cotg}^2 \Phi$ im Falle $a = 90^0$ in mittleren Breiten ($\operatorname{cotg} \Phi = 1$) wie 3 zu 4. Diese geringe Steigerung der Genauigkeit wird erkauft durch den Verzicht auf die gleichzeitige Bestimmung des Azimutes einer zweiten Objektrichtung.

Der Ausdruck für m_a^2, der im Falle $a = 0^0$ gilt, kann dem Ausdruck für m_a^2 gegenübergestellt werden, der im Kapitel V, Seite 124, unter der Annahme abgeleitet worden ist, daß bei Verwendung der Methode B ergänzende Beobachtungen im Meridian oder nach der Zingerschen Methode im ersten Vertikal zum Zweck der Ermittlung der Uhrkorrektion gemacht werden. Es ist dort angenommen worden, daß die beiden im Meridian beobachteten Sterne sehr nahe Zenitsterne seien; es ist dann

$$m_u^2 = \frac{m^2}{2} \operatorname{cosec}^2 \Phi.$$

Hier ist vorausgesetzt worden, daß die im Azimut b beobachteten Sterne die Bedingung

$$z_3 + z_4 = 90^0$$

erfüllen, so daß, wenn $a - b = 90^0$ ist,

$$m_u^2 = m^2 \operatorname{cosec}^2 \Phi$$

wird. Trotzdem ist der mittlere Fehler des aus den Beobachtungen in den Vertikalen a und b_0 abgeleiteten Azimutes nicht größer, sondern gleich groß wie in der Methode B der direkten Azimutbestimmung, nämlich gleich

$$m_a^2 = m^2\left(1 + \frac{1}{2} \operatorname{cotg}^2 \Phi\right).$$

Der scheinbare Widerspruch löst sich, wenn man beachtet, daß bei der Azimutbestimmung nach der Methode B des Kapitels V die Durchgangsbeobachtungen zum Zweck der Azimutbestimmung, auch wenn sie im Meridian stattfinden, völlig unabhängig sind von den Beobachtungen zum Zweck der Zeitbestimmung, daß aber hier, bei der simultanen Bestimmung, die Beobachtungen in beiden Vertikalen zusammenwirken; im Falle $a = b_0 = 0^0$ tragen alle Beobachtungen zur Bestimmung des gemeinsamen Azimutes *und* der Uhrkorrektion bei.

6. *Die Laplacesche Kontrollgleichung.* Soll die Laplacesche Gleichung in den beiden Vertikalen aufgestellt werden, so kommt es nur auf die beiden Unbekannten

$$x_a = da - du \cos \Phi,$$
$$x_b = db - du \cos \Phi$$

an. Die mittleren Fehler m'_a und m'_b von x_a und x_b sind gegeben durch die Ausdrücke (vergleiche Beziehung (74a), Seite 138):

$$m'^2_a = m^2 \cdot G(z_1, z_2),$$
$$m'^2_b = m^2 \cdot G(z_3, z_4).$$

Die Unbekannten x_a und x_b werden also am genauesten bestimmt, wenn man die Sterne am Horizont beobachtet (vergleiche Seite 139). Man wird aber in der praktischen Durchführung nicht unnötig über 60^0 Zenitdistanz hinausgehen, um anormale Refraktionsverhältnisse nicht einen starken Einfluß gewinnen zu lassen.

7. *Historische Bemerkungen.* Das hier behandelte Problem der simultanen Bestimmung ist schon von Daniel Bernoulli [9b]) gestellt und gelöst worden; seine Formulierung lautet:

> Connoissant les déclinaisons et les ascensions droites de quatre astres E, E', ε, ε', et l'intervalle de tems entre les momens où E se trouve dans un même vertical avec E', et où ε se trouve dans un même vertical avec ε', trouver l'heure de l'une des observations (et la hauteur du pole).

Bernoulli hat sich mit den Aufgaben der astronomisch-geographischen Ortsbestimmung abgegeben, als er sich um den Preis bewarb, den die Akademie der Wissenschaften zu Paris ausgeschrieben hatte für die beste Lösung des Problemes, die Länge eines Punktes auf dem Meere zu bestimmen. Um anzudeuten, daß es ihm mehr auf die zur Längenbestimmung erforderliche Zeit ankomme als auf die Polhöhe, hat er offenbar die letzten Worte der Formulierung in Klammern gesetzt.

Um das Jahr 1890 hat sich mit dieser Aufgabe W. F. Wislicenus [9c]), um 1935 F. Kepinski [9d]) und um 1940 E. Guyot [9e]) beschäftigt. Wislicenus und Guyot scheinen von der Behandlung der Aufgabe durch Bernoulli keine