4. *Die mittleren Fehler von du, dΦ, da und db.* Die reduzierten Normalgleichungen, zu welchen die Fehlergleichungen (89) führen, schreiben wir in der Form:

$$x_a + \alpha_2' y_a = \chi_1'; \quad \text{Gewicht } [a'a']$$
$$y_a = \chi_2'; \quad \text{Gewicht } [b'b_1']$$

mit

$$\alpha_2' = \frac{[a'b']}{[a'a']},$$

und

$$x_b + \beta_2' y_b = \chi_1''; \quad \text{Gewicht } [a''a''],$$
$$y_b = \chi_2''; \quad \text{Gewicht } [b''b_1'']$$

mit

$$\beta_2' = \frac{[a''b'']}{[a''a'']}.$$

Die mit Hilfe der Beziehungen (90) berechneten Verbesserungen du, $d\Phi$, da und db sind lineare Funktionen der Unbekannten x_a, y_a, x_b, y_b; bezeichnen wir mit F irgendeine dieser Funktionen, so ist

$$F = F_1' x_a + F_2' y_a + F_1'' x_b + F_2'' y_b. \tag{A}$$

Hierin führen wir die Werte der Ausgleichungsunbekannten auf die voneinander unabhängigen, den ursprünglichen fingierten Beobachtungsgrößen vollständig äquivalenten Größen χ' und χ'' zurück; es ist

$$x_a = \chi_1' - \alpha_2' \chi_2'; \qquad x_b = \chi_1'' - \beta_2' \chi_2'';$$
$$y_a = \chi_2'; \qquad y_b = \chi_2''.$$

Führt man diese Werte in die Beziehung (A) ein und setzt zur Abkürzung

$$F_{21}' = F_2' - \alpha_2' F_1'; \qquad F_{21}'' = F_2'' - \beta_2' F_1'',$$

so erhält man

$$F = F_1' \chi_1' + F_{21}' \chi_2' + F_1'' \chi_1'' + F_{21}'' \chi_2''.$$

Sind nun m_1', m_2', m_1'', m_2'' der Reihe nach die mittleren Fehler von χ_1', χ_2', χ_1'', χ_2'', so wird der mittlere Fehler m_F von F gegeben durch den Ausdruck:

$$m_F^2 = F_1'^2 m_1'^2 + F_{21}' m_2'^2 + F_1''^2 m_1''^2 + F_{21}''^2 m_2''^2.$$

Die mittleren Fehler der Größen χ lassen sich aber zurückführen auf die mittleren Fehler des Gewichtes 1 in den beiden Ausgleichungen. Sind m' und m'' diese mittleren Fehler des Gewichtes 1, so ist

$$m_1'^2 = m'^2 / [a'a'], \qquad m_1''^2 = m''^2 / [a''a''],$$
$$m_2'^2 = m'^2 / [b'b_1'], \qquad m_2''^2 = m''^2 / [b''b_1''].$$

Mithin erhält man die folgenden Ausdrücke für m_F^2:

$$m_F^2 = m'^2 \left(\frac{F_1'^2}{[a'a']} + \frac{F_{21}'^2}{[b'b_1']} \right) + m''^2 \left(\frac{F_1''^2}{[a''a'']} + \frac{F_{21}''^2}{[b''b_1'']} \right).$$

Die Koeffizienten F_1', F_2', F_1'', F_2'' nehmen in den einzelnen Fällen die folgenden Werte an:

F	F_1'	F_2'	F_1''	F_2''
du	0	$-\dfrac{\sin b}{\sin\Phi\,\sin(a-b)}$	0	$+\dfrac{\sin a}{\sin\Phi\,\sin(a-b)}$
$d\Phi$	0	$+\dfrac{\cos b}{\sin(a-b)}$	0	$-\dfrac{\cos a}{\sin(a-b)}$
da	1	$-\dfrac{\sin b}{\sin(a-b)}\operatorname{cotg}\Phi$	0	$+\dfrac{\sin a}{\sin(a-b)}\operatorname{cotg}\Phi$
db	0	$+\dfrac{\sin b}{\sin(b-a)}\operatorname{cotg}\Phi$	1	$-\dfrac{\sin a}{\sin(b-a)}\operatorname{cotg}\Phi$

Man erhält damit die folgenden Ausdrücke für die Quadrate der mittleren Fehler von du, $d\Phi$, da und db:

1. *Mittlerer Fehler m_u von du*:

$$m_u^2 = \left(\frac{m'^2}{[b'\,b_1']}\sin^2 b + \frac{m''^2}{[b''\,b_1'']}\sin^2 a\right)\operatorname{cosec}^2\Phi\operatorname{cosec}^2(a-b).$$

2. *Mittlerer Fehler m_Φ von $d\Phi$*:

$$m_\Phi^2 = \left(\frac{m'^2}{[b'\,b_1']}\cos^2 b + \frac{m''^2}{[b''\,b_1'']}\cos^2 a\right)\operatorname{cosec}^2(a-b).$$

3. *Mittlerer Fehler m_a von da*:

$$m_a^2 = m'^2\left(\frac{1}{[a'\,a']} + \frac{1}{[b'\,b_1']}\left(\frac{\sin b\operatorname{cotg}\Phi}{\sin(a-b)} + \alpha_2'\right)^2\right) + \frac{m''^2}{[b''\,b_1'']}\,\frac{\operatorname{cotg}^2\Phi\sin^2 a}{\sin^2(a-b)}.$$

4. *Mittlerer Fehler m_b von db*:

$$m_b^2 = \frac{m'^2}{[b'\,b_1']}\,\frac{\operatorname{cotg}^2\Phi\sin^2 b}{\sin^2(b-a)} + m''^2\left(\frac{1}{[a''\,a'']} + \frac{1}{[b''\,b_1'']}\left(\frac{\sin a\operatorname{cotg}\Phi}{\sin(b-a)} + \beta_2'\right)^2\right).$$

5. *Die günstigsten Beobachtungsumstände.* Es seien ε_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ die wahren Fehler der 4 fingierten Beobachtungsgrößen l_i, von welchen sich die beiden ersten auf den Vertikal a und die beiden letzten auf den Vertikal b beziehen; die Sterne seien zu verschiedenen Seiten des Zenites beobachtet.

Die wahren Fehler der 4 unbekannten Verbesserungen du, $d\Phi$, da und db seien ε_u, ε_Φ, ε_a und ε_b; sie werden durch die folgenden Beziehungen mit den voneinander unabhängigen wahren Fehlern ε_i verbunden:

$$\sin z_1(\varepsilon_a - \varepsilon_u\cos\Phi) - \cos z_1(\varepsilon_u\sin\Phi\cos a + \varepsilon_\Phi\sin a) = \varepsilon_1\sin z_1,$$

$$\sin z_2(\varepsilon_a - \varepsilon_u\cos\Phi) + \cos z_2(\varepsilon_u\sin\Phi\cos a + \varepsilon_\Phi\sin a) = \varepsilon_2\sin z_2,$$

$$\sin z_3(\varepsilon_b - \varepsilon_u\cos\Phi) - \cos z_3(\varepsilon_u\sin\Phi\cos b + \varepsilon_\Phi\sin b) = \varepsilon_3\sin z_3,$$

$$\sin z_4(\varepsilon_b - \varepsilon_u\cos\Phi) + \cos z_4(\varepsilon_u\sin\Phi\cos b + \varepsilon_\Phi\sin b) = \varepsilon_4\sin z_4.$$