Die Elimination von a_0' führt zu

$$-\operatorname{tg} a_0' \equiv \operatorname{tg} p_1 \sin(t_1 - t_0') = \operatorname{tg} p_2 \sin(t_2 - t_0').$$

Setzt man in diesen Beziehungen

$$t_1 - t_0' = 90^0 + (t_1 - t_0),$$
$$t_2 - t_0' = 90^0 + (t_2 - t_0),$$

so geht sie über in die Beziehung (80); es ist aber

$$t_0 - t_0' = 90^0,$$

denn es steht der Stundenkreis des Punktes ($a' = 90^0$, $\Phi' = p_0$) senkrecht auf dem Stundenkreis des Punktes ($a' = a_0'$, $\Phi' = 90^0$), weil Z_0' Pol zu PZ_0 als Polare ist.

2. *Die Reduktionsformeln.* Werden die Durchgänge von je zwei Sternen durch zwei *verschiedene* Vertikale mit derselben Uhr beobachtet, so wird das Zenit des Beobachtungsortes als Schnittpunkt der beiden Vertikale bestimmt. Es seien

U_1, U_2 die Uhrzeiten, zu welchen sich die Sterne (α_1, p_1), (α_2, p_2) im Vertikal des Azimutes a respektive $a + 180^0$ und

U_3, U_4 die Uhrzeiten, zu welchen sich die Sterne (α_3, p_3), (α_4, p_4) im Vertikal des Azimutes b respektive $b + 180^0$ befunden haben.

Wir fällen von P die Lote auf die beiden Vertikale; es seien

t_a, t_b die Stundenwinkel der Fußpunkte dieser Lote und

p_a, p_b ihre Poldistanzen.

t_i ($i = 1, 2, 3, 4$) seien die Stundenwinkel der vier Sterne im Moment des Durchganges durch den Vertikal a respektive b.

Zur Abkürzung setzen wir

$$t_{12} = t_1 - t_2; \quad t_{34} = t_3 - t_4$$

und

$$t_i - t_a = t_{ia} \qquad (i = 1, 2),$$
$$t_i - t_b = t_{ib} \qquad (i = 3, 4).$$

Die Uhrkorrektion u, die Poldistanz Φ des Zenites und die Azimute a und b der beiden Vertikale lassen sich dann in folgender Weise ermitteln. Die Differenzen t_{ia} und t_{ib} ergeben sich gemäß (81) aus den folgenden Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{cotg} t_{1a} &= \frac{\operatorname{cotg} p_1 \operatorname{tg} p_2 \sin t_{12}}{1 - \operatorname{cotg} p_1 \operatorname{tg} p_2 \cos t_{12}}, \quad t_{2a} = t_{1a} - t_{12}, \\ \operatorname{cotg} t_{3b} &= \frac{\operatorname{cotg} p_3 \operatorname{tg} p_4 \sin t_{34}}{1 - \operatorname{cotg} p_3 \operatorname{tg} p_4 \cos t_{34}}, \quad t_{4b} = t_{3b} - t_{34}. \end{aligned}\right\} \tag{82}$$

Die Längen der Lote p_a und p_b folgen dann aus

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg} p_a &= \operatorname{tg} p_1 \cos t_{1a} \equiv \operatorname{tg} p_2 \cos t_{2a}, \\ \operatorname{tg} p_b &= \operatorname{tg} p_3 \cos t_{3b} \equiv \operatorname{tg} p_4 \cos t_{4b}. \end{aligned}\right\} \tag{83}$$

Eliminiert man Φ aus den Beziehungen

$$\cos t_a = \operatorname{tg} p_a \operatorname{cotg} \Phi,$$
$$\cos t_b = \operatorname{tg} p_b \operatorname{cotg} \Phi,$$

so folgt

$$\cos t_a \operatorname{cotg} p_a = \cos t_b \operatorname{cotg} p_b.$$

Führt man hierin t_b auf t_a zurück mittels

$$\left.\begin{aligned} t_b &= t_a - t_{ab} \\ \text{und} \quad t_{ab} &= (t_a - t_1) + (t_1 - t_3) + (t_3 - t_b), \end{aligned}\right\} \tag{84a}$$

so erhält man

$$\operatorname{cotg} t_a = \frac{\operatorname{cotg} p_b \operatorname{tg} p_a \sin t_{ab}}{1 - \operatorname{cotg} p_b \operatorname{tg} p_a \cos t_{ab}}. \tag{84b}$$

Der Uhrfehler wird dann gleich:

$$\begin{aligned} u &= t_a + t_{1a} - (U_1 - \alpha_1) = t_a + t_{2a} - (U_2 - \alpha_2) \\ &= t_b + t_{3b} - (U_3 - \alpha_3) = t_b + t_{4b} - (U_4 - \alpha_4). \end{aligned}$$

Die Poldistanz Φ des Zenites folgt aus

$$\operatorname{cotg} \Phi = \operatorname{cotg} p_a \cos t_a = \operatorname{cotg} p_b \cos t_b. \tag{85}$$

Die beiden Azimute werden gegeben durch die Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{cotg} a &= -\cos \Phi \operatorname{tg} t_a, \\ \operatorname{cotg} b &= -\cos \Phi \operatorname{tg} t_b. \end{aligned}\right\} \tag{86}$$

Die Lösung der Aufgabe, u, Φ, a und b zu ermitteln, erfordert die Durchrechnung der Gleichungen (82), (83), (84), (85) und (86).

Sind mehr als 2 Sterne in jedem der beiden Vertikale beobachtet worden, so daß zur Berechnung der Unbekannten die Vorschriften der Ausgleichsrechnung angewendet werden müssen, so hat man das Seite 131 auseinandergesetzte Verfahren sowohl auf den Vertikal a als auf den Vertikal b anzuwenden. Mit Hilfe der Näherungswerte u_0 und Φ_0 berechnet man Näherungswerte a_i und b_i der Azimute:

$$\operatorname{tg} a_i \text{ respektive } \operatorname{tg} b_i = -\frac{\operatorname{tg} p_i \operatorname{cosec} \Phi_0 \sin (U_i + u_0 - \alpha_i)}{1 - \operatorname{tg} p_i \operatorname{cotg} \Phi_0 \cos (U_i + u_0 - \alpha_i)}.$$

Die fingierten Beobachtungsgrößen werden, wenn a_0 und b_0, respektive $a_0 + 180^0$ und $b_0 + 180^0$ Näherungswerte der Azimute der beiden Vertikale sind, gleich:

$$\begin{aligned} l_{ai} &= a_i - a_0 \quad \text{respektive} \quad a_i - (a_0 + 180^0), \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \\ l_{bi} &= b_i - b_0 \quad \text{respektive} \quad b_i - (b_0 + 180^0), \quad (i = 1, 2, \ldots, n'). \end{aligned}$$

Setzt man

$$
\begin{aligned}
x_a &= da - du \cos \Phi_0, \\
y_a &= \phantom{da - {}} du \sin \Phi_0 \cos a_0 + d\Phi \sin a_0
\end{aligned}
\tag{87}
$$

und

$$
\begin{aligned}
x_b &= db - du \cos \Phi_0, \\
y_b &= \phantom{db - {}} du \sin \Phi_0 \cos b_0 + d\Phi \sin b_0,
\end{aligned}
\tag{88}
$$

so erhält man die folgenden Fehlergleichungen

$$
\left.
\begin{aligned}
x_a \sin z_i \mp y_a \cos z_i &= l_{a\,i} \sin z_i + \lambda_{a\,i}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \\
x_b \sin z_i \mp y_b \cos z_i &= l_{b\,i} \sin z_i + \lambda_{b\,i}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n').
\end{aligned}
\right\}
\tag{89}
$$

Die Gewichte dieser Gleichungen sind gleich 1 zu setzen, wenn die Durchgangsbeobachtungen an soviel Fäden oder Kontakten gemacht werden, daß die Quadrate der mittleren Fehler der fingierten Beobachtungsgrößen $\operatorname{cosec}^2 z_i$ proportional werden.

Sind durch 2 getrennte Ausgleichungen die Unbekannten x und y berechnet, so folgen die gesuchten Verbesserungen der Näherungswerte aus den Beziehungen:

$$
\left.
\begin{aligned}
du \sin \Phi_0 \cdot \sin (a_0 - b_0) &= - y_a \sin b_0 + y_b \sin a_0, \\
d\Phi \cdot \sin (a_0 - b_0) &= + y_a \cos b_0 - y_b \cos a_0, \\
da &= + x_a + du \cos \Phi_0, \\
db &= + x_b + du \cos \Phi_0.
\end{aligned}
\right\}
\tag{90}
$$

Statt daß *ein* Beobachter mit demselben Instrument die Durchgänge in den beiden Vertikalen vom gleichen Stationspunkt aus beobachtet, kann man auch *zwei* Beobachter nebeneinander arbeiten lassen, indem der eine sein Instrument im Vertikal a, der andere sein Instrument im Vertikal b aufstellt. Wegen der unmittelbaren Nähe der beiden Aufstellungsorte kann derselbe Näherungswert Φ_0 und, wenn beide Beobachter dieselbe Uhr benützen, auch derselbe Näherungswert u_0 in die beiden Ausgleichungen eingeführt werden. Man hat dann aber in den Beziehungen (87/88) zwischen du_a und du_b einerseits und zwischen $d\Phi_a$ und $d\Phi_b$ andrerseits zu unterscheiden und hat vor der Auflösung du_b auf du_a und $d\Phi_b$ auf $d\Phi_a$ mittels der linearen Breiten- und Längenunterschiede der beiden Aufstellungsorte zurückzuführen.

3. *Berücksichtigung der täglichen Aberration.* Sind die scheinbaren Örter, die der Berechnung der fingierten Beobachtungsgrößen zugrunde gelegt werden, wegen der täglichen Aberration nicht verbessert worden, so hat man die auf gleiches Gewicht reduzierten Beobachtungsgrößen $l_{a\,i} \sin z_i$ respektive $l_{b\,i} \sin z_i$ zu verbessern um den Betrag

$$
- 0\overset{''}{.}322 \sin \Phi \cos a^* \quad \text{respektive} \quad - 0\overset{''}{.}322 \sin \Phi \cos b^*,
$$

wobei für a^* respektive b^* die in die Richtung des Sternes fallenden Azimute des Instrumentenvertikales einzuführen sind.