Übernehmen wir die Zahlenwerte

$$\left(\frac{b_0}{2V}\right)^2 + m^{*2} + m_r^2 = 0{,}75,$$
$$a_0^2 = 2{,}02,$$

so erhält man

$$m_l^2 = 0{,}75 + 0{,}41 \cdot 2{,}02 = 1{,}58 = (1''{,}26)^2;$$

es wird also ($\sin \Phi = 0{,}675$):

$$m_u \sin \Phi = m_\Phi = \sqrt{\frac{2}{3}}\, 1''{,}26 = \pm\, 1''{,}03,$$
$$m_u = \pm\, 0^s{,}10.$$

---

**b) Die simultane Bestimmung der Zeit, der Polhöhe und des Azimutes zweier Richtungen mit Hilfe von Vertikaldurchgängen** [9a)]

1. *Die Funktionaldeterminante.* Es seien $A_i$, $B_i$, $C_i$ die partiellen Ableitungen der Funktion

$$y_i = \operatorname{cotg} a \sin(U_i + u - \alpha_i) + \operatorname{cotg} p_i \sin \Phi - \cos \Phi \cos(U_i + u - \alpha_i) \qquad (79)$$

nach $u$, $a$ und $\Phi$:

$$A_i = \frac{\partial y_i}{\partial u} = \frac{\cos \Phi \sin z_i + \sin \Phi \cos z_i \cos a}{\sin a \sin p_i},$$
$$B_i = \frac{\partial y_i}{\partial a} = -\frac{\sin z_i}{\sin a \sin p_i},$$
$$C_i = \frac{\partial y_i}{\partial \Phi} = \frac{\cos z_i}{\sin a}.$$

Die Funktionaldeterminante $J$ der drei Funktionen $y_i$ ($i = 1, 2, 3$) in bezug auf $u$, $a$ und $\Phi$ als Unbekannte kann dann in der folgenden Form geschrieben werden:

$$J = S A_1 (B_2 C_3 - B_3 C_2),$$

worin $S$ die durch zyklische Vertauschung entstehende Summe bezeichnet. Da

$$B_2 C_3 - B_3 C_2 = -\frac{\sin(z_2 - z_3)}{\sin^2 a \sin p_2 \sin p_3}$$

ist, wird

$$J \cdot \sin^3 a \sin p_1 \sin p_2 \sin p_3 = -S(\cos \Phi \sin z_1 + \sin \Phi \cos z_1) \sin(z_2 - z_3).$$

Da aber

$$S \sin z_1 \sin(z_2 - z_3) = 0,$$
$$S \cos z_1 \sin(z_2 - z_3) = 0$$

ist, wird $J$ identisch gleich null; es besteht also eine Abhängigkeit zwischen den drei Unbekannten $u$, $a$ und $\Phi$.

Es sei $Z'$ ein beliebig gewählter Punkt des Instrumentenvertikales und $\Phi' = PZ'$ seine Poldistanz. Ist $a'$ das Azimut, unter welchem der Meridian

$PZ'$ den Vertikal schneidet, und $t_i'$ der Stundenwinkel des Sternes $(\alpha_i, p_i)$ von diesem willkürlich gewählten Meridian aus, so besteht die Beziehung

$$y_i' = \operatorname{cotg} a' \sin t_i' + \operatorname{cotg} p_i \sin \Phi - \cos \Phi \cos t_i' = 0.$$

Da die Funktionaldeterminante von $y_i'$ $(i = 1, 2)$ in bezug auf $a'$ und $\Phi'$ als Unbekannte nicht verschwindet, wenn $z_1 \neq z_2$ ist, so gibt es unendlich viele zusammengehörige Wertepaare $a'$ und $\Phi'$, von denen jedes die Lage des Instrumentenvertikales gegenüber dem Pol $P$ bestimmt; die Lage des Zenites $Z$ im Vertikal bleibt aber unbestimmt, auch wenn die Durchgangszeiten $U_i$ von mehr als 2 Sternen beobachtet werden.

Unter den unendlich vielen Wertepaaren von $a'$ und $\Phi'$ sind zwei durch spezielle Werte ausgezeichnet, nämlich:

1. das Paar, in dem $a' = 90^0$ ist, so daß der Meridian $PZ'$ senkrecht zum Vertikal steht, und
2. das Paar, in dem $\Phi' = 90^0$ ist.

Im ersten Fall sei $Z' = Z_0$ der Fußpunkt des von $P$ auf den Vertikal gefällten Lotes, der über dem Horizont des Beobachtungspunktes liegt; es sei $t_0$ der Stundenwinkel und $p_0 = PZ_0$ die Poldistanz von $Z_0$. Es wird dann

$$t_1' = t_1 - t_0,$$
$$t_2' = t_2 - t_0.$$

Da $a' = 90^0$ ist, lauten die Beziehungen $y_i' = 0$ $(i = 1, 2)$:

$$\operatorname{cotg} p_1 \sin p_0 - \cos p_0 \cos(t_1 - t_0) = 0,$$
$$\operatorname{cotg} p_2 \sin p_0 - \cos p_0 \cos(t_2 - t_0) = 0.$$

Eliminiert man hieraus $p_0$, so wird

$$\operatorname{tg} p_0 \equiv \operatorname{tg} p_1 \cos(t_1 - t_0) = \operatorname{tg} p_2 \cos(t_2 - t_0), \tag{80}$$

und wenn man hierin $(t_2 - t_0)$ mittels

$$t_2 - t_0 = (t_1 - t_0) - (t_1 - t_2)$$

auf $(t_1 - t_0)$ zurückführt, so erhält man die Beziehung

$$\operatorname{cotg}(t_1 - t_0) = \frac{\operatorname{cotg} p_1 \operatorname{tg} p_2 \sin(t_1 - t_2)}{1 - \operatorname{cotg} p_1 \operatorname{tg} p_2 \cos(t_1 - t_2)}. \tag{81}$$

Im zweiten Fall, wo $\Phi' = 90^0$ ist, ist $Z' = Z_0'$ der Schnittpunkt des Vertikals mit dem Äquator. Ist $t_0'$ der Stundenwinkel von $Z_0'$, so wird

$$t_1' = t_1 - t_0',$$
$$t_2' = t_2 - t_0',$$

und die Beziehungen $y_i' = 0$ lauten mit $a' = a_0'$:

$$\operatorname{cotg} a_0' \sin(t_1 - t_0') + \operatorname{cotg} p_1 = 0,$$
$$\operatorname{cotg} a_0' \sin(t_2 - t_0') + \operatorname{cotg} p_2 = 0.$$

Die Elimination von $a_0'$ führt zu

$$-\operatorname{tg} a_0' \equiv \operatorname{tg} p_1 \sin(t_1 - t_0') = \operatorname{tg} p_2 \sin(t_2 - t_0').$$

Setzt man in diesen Beziehungen

$$t_1 - t_0' = 90^0 + (t_1 - t_0),$$
$$t_2 - t_0' = 90^0 + (t_2 - t_0),$$

so geht sie über in die Beziehung (80); es ist aber

$$t_0 - t_0' = 90^0,$$

denn es steht der Stundenkreis des Punktes ($a' = 90^0$, $\Phi' = p_0$) senkrecht auf dem Stundenkreis des Punktes ($a' = a_0'$, $\Phi' = 90^0$), weil $Z_0'$ Pol zu $PZ_0$ als Polare ist.

2. *Die Reduktionsformeln.* Werden die Durchgänge von je zwei Sternen durch zwei *verschiedene* Vertikale mit derselben Uhr beobachtet, so wird das Zenit des Beobachtungsortes als Schnittpunkt der beiden Vertikale bestimmt. Es seien

$U_1$, $U_2$ die Uhrzeiten, zu welchen sich die Sterne ($\alpha_1$, $p_1$), ($\alpha_2$, $p_2$) im Vertikal des Azimutes $a$ respektive $a + 180^0$ und

$U_3$, $U_4$ die Uhrzeiten, zu welchen sich die Sterne ($\alpha_3$, $p_3$), ($\alpha_4$, $p_4$) im Vertikal des Azimutes $b$ respektive $b + 180^0$ befunden haben.

Wir fällen von $P$ die Lote auf die beiden Vertikale; es seien

$t_a$, $t_b$ die Stundenwinkel der Fußpunkte dieser Lote und

$p_a$, $p_b$ ihre Poldistanzen.

$t_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$) seien die Stundenwinkel der vier Sterne im Moment des Durchganges durch den Vertikal $a$ respektive $b$.

Zur Abkürzung setzen wir

$$t_{12} = t_1 - t_2; \quad t_{34} = t_3 - t_4$$

und

$$t_i - t_a = t_{ia} \qquad (i = 1, 2),$$
$$t_i - t_b = t_{ib} \qquad (i = 3, 4).$$

Die Uhrkorrektion $u$, die Poldistanz $\Phi$ des Zenites und die Azimute $a$ und $b$ der beiden Vertikale lassen sich dann in folgender Weise ermitteln. Die Differenzen $t_{ia}$ und $t_{ib}$ ergeben sich gemäß (81) aus den folgenden Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{cotg} t_{1a} &= \frac{\operatorname{cotg} p_1 \operatorname{tg} p_2 \sin t_{12}}{1 - \operatorname{cotg} p_1 \operatorname{tg} p_2 \cos t_{12}}, \quad t_{2a} = t_{1a} - t_{12}, \\ \operatorname{cotg} t_{3b} &= \frac{\operatorname{cotg} p_3 \operatorname{tg} p_4 \sin t_{34}}{1 - \operatorname{cotg} p_3 \operatorname{tg} p_4 \cos t_{34}}, \quad t_{4b} = t_{3b} - t_{34}. \end{aligned}\right\} \tag{82}$$