Die Korrektion δl_i, die an den fingierten Beobachtungsgrößen l_i anzubringen ist, wenn zu deren Berechnung die scheinbaren Örter nicht wegen der täglichen Aberration verbessert worden sind, wird durch den Ausdruck

$$\delta l_i = -(\sin q_i\, d\alpha_i \sin p_i - \cos q_i\, dp_i)$$

gegeben, in welchem zu setzen ist

$$d\alpha_i \sin p_i = +\, 0\overset{''}{.}322 \sin \Phi \cos t_i,$$
$$dp_i = -\, 0\overset{''}{.}322 \sin \Phi \sin t_i \cos p_i.$$

Da aber

$$\cos t_i \sin q_i + \sin t_i \cos q_i \cos p_i = \sin a_i \cos z$$

ist, wird

$$\delta l_i = -\, 0\overset{''}{.}322 \sin \Phi \cos z \sin a_i.$$

Verbessert man um diesen Betrag die Werte von l_i in den Fehlergleichungen, so lassen sie sich, wenn

$$du' = du - 0\overset{''}{.}322 \cos z$$

gesetzt wird, in der alten Form schreiben:

$$dz - du' \sin \Phi_0 \sin a_i + d\Phi \cos a_i = l_i + \lambda_i.$$

Daraus ist ersichtlich, daß man an dem Wert du, der ohne Rücksicht auf den Einfluß der täglichen Aberration ermittelt wird, die Korrektion

$$\delta u = +\, 0\overset{''}{.}322 \cos z = +\, 0\overset{s}{.}021 \cos z$$

anzubringen hat. Die andern Unbekannten, dz und $d\Phi$, bedürfen keiner Verbesserung.

5. *Die mittleren Fehler der Unbekannten.* Im Differentialausdruck des Cosinussatzes:

$$dz + d\Phi \cos a_i - du \sin \Phi \sin a_i$$
$$= dU_i \sin p_i \sin q_i - (d\alpha_i \sin p_i \sin q_i - dp_i \cos q_i)$$

identifizieren wir dU_i, $d\alpha_i$, dp_i mit den wahren Fehlern der Größen U_i, α_i, p_i und setzen

$$\varepsilon_i = \varepsilon_{U_i} \sin p_i \sin q_i - (\varepsilon_{\alpha_i} \sin p_i \sin q_i - \varepsilon_{p_i} \cos q_i);$$

mittels der Beziehungen

$$\varepsilon_z + \varepsilon_\Phi \cos a_1 - \varepsilon_u \sin \Phi \sin a_1 = \varepsilon_1,$$
$$\varepsilon_z + \varepsilon_\Phi \cos a_2 - \varepsilon_u \sin \Phi \sin a_2 = \varepsilon_2,$$
$$\varepsilon_z + \varepsilon_\Phi \cos a_3 - \varepsilon_u \sin \Phi \sin a_3 = \varepsilon_3$$

führen wir die wahren Fehler ε_Φ und ε_u auf die wahren Fehler ε_{U_i}, ε_{α_i} und

ε_{p_i} zurück, indem wir diese Beziehungen nach den Unbekannten ε_Φ und ε_u auflösen. Setzt man zur Abkürzung

$$c_{ik} = \cos a_i - \cos a_k,$$
$$s_{ik} = \sin a_i - \sin a_k,$$

so führt die Elimination von dz zunächst zu den beiden Gleichungen

$$c_{21}\,\varepsilon_\Phi - s_{21}\,\varepsilon_u \sin\Phi = \varepsilon_2 - \varepsilon_1,$$
$$c_{32}\,\varepsilon_\Phi - s_{32}\,\varepsilon_u \sin\Phi = \varepsilon_3 - \varepsilon_2;$$

somit wird

$$(s_{21}\,c_{32} - s_{32}\,c_{21})\,\varepsilon_u \sin\Phi = \varepsilon_1\,c_{32} - \varepsilon_2(c_{32}+c_{21}) + \varepsilon_3\,c_{21},$$
$$(s_{21}\,c_{32} - s_{32}\,c_{21})\,\varepsilon_\Phi = \varepsilon_1\,s_{32} - \varepsilon_2(s_{32}+s_{21}) + \varepsilon_3\,s_{21}.$$

Geht man von den wahren Fehlern ε zu den mittleren Fehlern m über, so erhält man:

$$(s_{21}\,c_{32} - s_{32}\,c_{21})^2\,m_u^2 \sin^2\Phi = m_1^2\,c_{32}^2 + m_2^2\,(c_{32}+c_{21})^2 + m_3^2\,c_{21}^2,$$
$$(s_{21}\,c_{32} - s_{32}\,c_{21})^2\,m_\Phi^2 = m_1^2\,s_{32}^2 + m_2^2\,(s_{32}+s_{21})^2 + m_3^2\,s_{21}^2.$$

Die rechter Hand auftretenden mittleren Fehler m_i führen wir auf ihre Komponenten zurück; es ist

$$m_i^2 = m_{U_i}^2 \sin^2 p_i \sin^2 q_i + m^{*2},$$

worin m^* die aus der Unsicherheit des Sternortes entspringende Fehlerkomponente bezeichnet. Führt man m_{U_i} auf die beiden Komponenten a_0 und b_0 zurück (vergleiche Seite 46) und auf den Winkel (q), den die Bewegungsrichtung des Sternes mit der Normalen zum Almukantarat bildet: $(q) = 90^0 - q$, so erhält man, wenn n Fadendurchgänge oder Kontaktbeobachtungen vorliegen:

$$m_i^2 = \frac{1}{n}\sin^2 p_i \sin^2 q_i\left(a_0^2 + \frac{b_0^2 \operatorname{cosec}^2 p_i}{V^2 \sin^2 q_i}\right) + m^{*2}. \qquad (76a)$$

Wir nehmen wieder an, die Zahl n der Durchgänge werde so gewählt, daß m_i^2 gleich dem konstanten Wert m^2 wird. Die Ausdrücke für die Quadrate der mittleren Fehler von u und Φ nehmen dann die Form an:

$$(s_{21}\,c_{32} - s_{32}\,c_{21})^2\,m_u^2 \sin^2\Phi = 2\,m^2\,(c_{32}^2 + c_{32}\,c_{21} + c_{21}^2),$$
$$(s_{21}\,c_{32} - s_{32}\,c_{21})^2\,m_\Phi^2 = 2\,m^2\,(s_{32}^2 + s_{32}\,s_{21} + s_{21}^2).$$

Nimmt man nun an, die drei Sterne seien in drei um je 120^0 verschiedenen Azimuten beobachtet worden, so daß

$$s_{21} = -\frac{3}{2}\sin a_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos a_1; \quad s_{32} = -\sqrt{3}\cos a_1$$

$$c_{21} = -\frac{3}{2}\cos a_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin a_1; \quad c_{32} = -\sqrt{3}\sin a_1$$

wird, so findet man leicht, daß

$$2\,(c_{32}^2 + c_{32}\,c_{21} + c_{21}^2) = 2\,(s_{32}^2 + s_{32}\,s_{21} + s_{21}^2) = \frac{2}{3}\,(s_{21}\,c_{32} - s_{32}\,c_{21})^2 = \frac{9}{2}$$

ist. Somit erhält man die Beziehung

$$m_u^2 \sin^2 \Phi = m_\Phi^2 = \frac{2}{3}\,m^2. \tag{76b}$$

Ist nicht nur *eine* Gruppe von drei Sternen in Azimutunterschieden von 120⁰ beobachtet worden, sondern liegen N' solcher Gruppen vor, so daß das arithmetische Mittel der Gruppenwerte von u und von Φ als Endresultat aller Beobachtungen anzunehmen ist, so sind diesen Mittelwerten mittlere Fehler M_u und M_Φ beizulegen, die durch die Beziehung

$$M_u^2 \sin^2 \Phi = M_\Phi^2 = \frac{2\,m^2}{3\,N'}$$

gegeben werden. Da aber die Gesamtzahl aller einzelnen Beobachtungen gleich $3\,N'$ ist, so erhält man, wenn

$$3\,N' = N$$

gesetzt wird:

$$M_u \sin \Phi = M_\Phi = \pm \sqrt{\frac{2}{N}}\;m.$$

75c

6. *Das Gewicht der Fehlergleichung* (74c). In den vorangehenden Ausführungen haben wir angenommen, daß Fadendurchgänge oder Kontaktbeobachtungen gemacht worden seien. Die Reduktion auf die Zeit des Durchganges durch den Almukantarat des Mittelfadens ist nach der Beziehung (4) respektive (5b), Seite 33, zu berechnen. Das Prismenastrolab enthält in der vom Hersteller gelieferten Form kein Fadennetz, so daß nur der Moment der Koinzidenz der beiden Bilder beobachtet werden kann. Es besteht dann nicht die Möglichkeit, die mittleren Fehler in verschiedenen Azimuten durch die Zahl der beobachteten Fadendurchgänge — wenigstens angenähert — gleich groß zu machen.

Bei der Ableitung des Gewichtes, das der Fehlergleichung (75c) beizulegen ist, behalten wir die Annahme, daß die Zahl der Faden- oder Kontaktbeobachtungen gleich n sei, bei; die resultierende Gewichtsformel ist leicht auf den Fall, daß als Beobachtungszeiten nur Koinzidenzmomente vorliegen, zu spezialisieren; man hat nur $n = 1$ zu setzen und an Stelle der Vergrößerungszahl V den doppelten Betrag $2\,V$ einzuführen, weil die Relativgeschwindigkeit der beiden Sternbilder gegeneinander doppelt so groß ist als die Geschwindigkeit der Bewegung des einzelnen Bildes gegenüber einem festen Faden.

Es sei ε_l der wahre Fehler der fingierten Beobachtungsgrößen in den Fehlergleichungen (75c). Da l_i durch die Beziehung

$$l_i = \zeta_i - z_0 - dr_i$$