

|                                    |                             |                                             |
|------------------------------------|-----------------------------|---------------------------------------------|
|                                    | $t_{10} = 5^h 23^m 46^s,20$ |                                             |
|                                    | $t_{20} = - 2 \ 30 \ 25,02$ |                                             |
|                                    | $t_0 = - 3 \ 18 \ 54,99$    |                                             |
| $\cos t_{10}$ . . . . .            | 9,197 076                   | $\cos t_{20}$ . . . . . 9,898 859           |
| $\operatorname{tg} p_1$ . . . . .  | 0,574 825                   | $\operatorname{tg} p_2$ . . . . . 9,873 042 |
| $\operatorname{tg} p_0$ . . . . .  | 9,771 901                   | $\operatorname{tg} p_0$ . . . . . 9,771 901 |
| $\sec t_0$ . . . . .               | 0,189 497                   |                                             |
| $\operatorname{tg} \Phi$ . . . . . | 9,961 398                   | $\Phi = 42^\circ 27' 25'',2$                |
| $\sec \Phi$ . . . . .              | 0,132 071                   |                                             |
| $\cotg t_0$ . . . . .              | 9,927 980 <sub>n</sub>      |                                             |
| $\operatorname{tg} a$ . . . . .    | 0,060 051                   | $a = 48^\circ 56' 55'',1$                   |
|                                    |                             | $\Delta A = - 49,1$                         |
|                                    |                             | <u><math>A = 48^\circ 56' 06'',0</math></u> |

## DRITTES ZAHLENBEISPIEL

*(Berechnung der Unbekannten durch eine Ausgleichung)*

Die Beobachtungsdaten zu diesem Beispiel entnehmen wir der Azimutbestimmung, welche das militärgeographische Institut Rumäniens im Jahre 1938 auf dem Triangulationspunkt erster Ordnung Trifesti hat ausführen lassen\*). Die Richtung des Objektes, des Triangulationspunktes Sabaoani, weicht nur um  $8^\circ$  von N gegen E von der Meridianrichtung ab. Die Beobachtungen wurden auf sechs Nächte erstreckt; in der einzelnen Nacht wurden bis zu 16 Sterndurchgänge beobachtet.

Befürchtet man den Einfluß von systematischen Fehlern, die der Zeit proportional zu- oder abnehmen, so empfiehlt es sich, vier aufeinanderfolgende Sterne in der Anordnung NSSN oder SNNS zu beobachten; die Nord- und Südsterne sind in solchen Zenitdistanzen zu wählen, daß ihr durchschnittlicher Abstand nicht erheblich von  $90^\circ$  abweicht. In mittleren Breiten hat diese Vorschrift zur Folge, daß auf der Nordseite auch Sterne in das Programm aufgenommen werden müssen, die in der Nähe der größten Digression zu beobachten sind. Wenn man die Beobachtung der Durchgangszeiten durch Einstellungen des beweglichen Fadens ersetzen kann, so entstehen daraus keine Schwierigkeiten. Will man aber in der Nähe der größten Digression die Durchgänge mit dem unpersonlichen Mikrometer registrieren, so muß das Instrument wegen der schiefen Bewegungsrichtung des Sternes mit einer Vorrichtung versehen sein, die das Fernrohr dem Stern in Zenitdistanz automatisch nachführt. Das zur Azimutbestimmung benützte Bambergische Passageninstrument war nicht mit einer solchen Vorrichtung ausgerüstet; der Beobachter hat deshalb darauf verzichtet, Sterne in der Nähe der größten Digression heranzuziehen, und beschränkte auf der Nordseite seine Auswahl auf Sterne, deren Zenitdistanz kleiner als  $34^\circ$  ist. In der Regel wurden gleichviel Nord- und Südsterne beobachtet, dagegen wurde auf eine symmetrische Anordnung der Sterne kein Bedacht genommen.

Die Messungen sind nicht nach den hier entwickelten Formeln reduziert worden insofern, als der Uhrfehler nicht als zweite Unbekannte neben dem Instru-

\*) Azimut astronomique direct (avec une application) par le Capitaine JOAN STAMATIN. Imprimerie de l'Institut géographique militaire (Roumanie), 1941.

mentenazimut aus den Beobachtungen abgeleitet wurde; der Uhrfehler wurde vielmehr aus Aufnahmen der drahtlosen Zeitzeichen in Verbindung mit der bekannten Länge der Beobachtungsstation ermittelt, und mit dem so bestimmten Wert wurde das Azimut der Sterne berechnet. Es soll am Schluß unserer Durchrechnung die Frage beantwortet werden, wie die doppelte Bestimmung des Uhrfehlers, nämlich der aus den Beobachtungen selber abgeleitete Wert und der aus den drahtlosen Zeichen ermittelte, in korrekter Weise zur Azimutbestimmung verwertet werden kann.

Der zitierten Veröffentlichung entnehmen wir die in der Tabelle 1 vereinigten Daten von vier Sternen, die am 26. August 1938 innerhalb einer Stunde in der Reihenfolge NSSN beobachtet worden sind. Die aufeinanderfolgenden Zeilen enthalten:

1. die arithmetischen Mittel  $\bar{U}$  der an je 10 Kontakten vor und nach dem Umlegen beobachteten Uhrzeiten;
2. die beobachteten Neigungen  $i$ , bezogen auf das dem Stern im Azimut um  $90^\circ$  vorangehende Achsenende;
3. die mikrometrisch gemessenen Azimutunterschiede  $\Delta A$  des Instrumenten- und Objektvertikales.

Es folgen weiter die zur Reduktion erforderlichen Werte von

$$eb + i \cos z$$

mit  $e = +1$  (\* S),  $e = -1$  (\* N),  $b = 0^s 050$  und die scheinbaren Örter der Sterne (ohne Berücksichtigung der täglichen Aberration).

Tabelle 1

|                      | $\epsilon$ Drac N                                   | $\epsilon$ Aqu S                                     | $\zeta$ Aqu S                                        | 98 H Ceph N                                         |
|----------------------|-----------------------------------------------------|------------------------------------------------------|------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------|
| $\bar{U}$ . . . . .  | 19 <sup>h</sup> 09 <sup>m</sup> 32 <sup>s</sup> ,81 | 19 <sup>h</sup> 15 <sup>m</sup> 02 <sup>s</sup> ,910 | 19 <sup>h</sup> 21 <sup>m</sup> 18 <sup>s</sup> ,594 | 19 <sup>h</sup> 42 <sup>m</sup> 02 <sup>s</sup> ,66 |
| $i$ . . . . .        | — 0 <sup>o</sup> ,18                                | + 0 <sup>o</sup> ,30                                 | + 0 <sup>o</sup> ,33                                 | + 0 <sup>o</sup> ,42                                |
| $\Delta A$ . . . . . | — 4,13                                              | — 4,13                                               | — 4,13                                               | — 4,16                                              |
| $eb + i \cos z$ .    | — 0 <sup>s</sup> ,061                               | + 0 <sup>s</sup> ,067                                | + 0 <sup>s</sup> ,068                                | — 0 <sup>s</sup> ,026                               |
| $\cos z$ . . . . .   | 0,916                                               | 0,847                                                | 0,835                                                | 0,848                                               |
| $\sin z$ . . . . .   | 0,402                                               | 0,532                                                | 0,550                                                | 0,530                                               |
| $\alpha$ . . . . .   | 19 <sup>h</sup> 48 <sup>m</sup> 26 <sup>s</sup> ,85 | 18 <sup>h</sup> 56 <sup>m</sup> 51 <sup>s</sup> ,917 | 19 <sup>h</sup> 02 <sup>m</sup> 37 <sup>s</sup> ,100 | 21 <sup>h</sup> 06 <sup>m</sup> 52 <sup>s</sup> ,33 |
| $p$ . . . . .        | 19 <sup>o</sup> 52' 57",73                          | 75 <sup>o</sup> 00' 41",51                           | 76 <sup>o</sup> 13' 27",49                           | 12 <sup>o</sup> 07' 05,01                           |

Die Ableitung der auf den Instrumentenvertikal reduzierten Durchgangszeiten ist in der Tabelle 2 dargestellt. Die Kenntnis eines Näherungswertes der Uhrkorrektur verschaffen wir uns auf folgendem Weg. Sieht man die Uhrzeiten  $\bar{U}$  als Näherungswerte der Zeiten des Durchganges durch den Instrumentenvertikal an, so kann die Uhrkorrektur mit Hilfe der Reduktionsformeln der Döllnmethod ermittelt werden; sie lauten, wenn sich der Index 1 auf den Nordstern, der Index 2 auf den Südsterne bezieht:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{tg} p_1 \cotg p_2 \sin(t_1 - t_2)}{1 - \operatorname{tg} p_1 \cotg p_2 \cos(t_1 - t_2)},$$

$$\sin m = \cotg \Phi \operatorname{tg} p_2 \sin x,$$

$$u = (\alpha_2 - U_2) + (x - m).$$

Wir benützen die Sterne  $\varepsilon$  Drac und  $\varepsilon$  Aqu zu dieser Rechnung und erhalten:

$$\begin{aligned} U_1 - \alpha_1 &= 23^h 21^m 05^s,96 & \Phi &= 43^\circ 05',0 \\ U_2 - \alpha_2 &= 0 \ 18 \ 10,99 & \operatorname{tg} p_1 &\dots\dots\dots 9,55829 \\ t_1 - t_2 &= 23 \ 02 \ 55,0 & \operatorname{cotg} p_2 &\dots\dots\dots 9,42770 \\ & & \operatorname{cotg} \Phi &\dots\dots\dots 0,02908 \end{aligned}$$

Unter Verwendung von Subtraktionslogarithmen ergibt sich die folgende Berechnung:

$$\begin{aligned} \sin(t_1 - t_2) &\dots\dots\dots 9,39183_n \\ \operatorname{tg} p_1 \operatorname{cotg} p_2 &\dots\dots\dots 8,98599 \\ \cos(t_1 - t_2) &\dots\dots\dots 9,98639 \\ \operatorname{tg} p_1 \operatorname{cotg} p_2 \cos(t_1 - t_2) &\dots\dots\dots 8,97238 \\ \lg(a) - \lg(b) = B &\dots\dots\dots 1,02762 \\ &A \dots\dots\dots 0,98482 \\ \lg(a-b) = \lg(b) + A &\dots\dots\dots 9,95720 \\ \operatorname{tg} p_1 \operatorname{cotg} p_2 \sin(t_1 - t_2) &\dots\dots\dots 8,37782_n \\ \operatorname{tg} x &\dots\dots\dots 8,42062_n \\ \sin x &\dots\dots\dots 8,42046_n \\ \operatorname{cotg} \Phi \operatorname{tg} p_2 &\dots\dots\dots 0,60138 \\ \sin m &\dots\dots\dots 9,02184_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= -06^m 02^s,12, & x - m &= +18^m 06^s,5, \\ m &= -24 \ 08,66, & \alpha_2 - U_2 &= -18 \ 11,0, \\ & & u &= -4,5. \end{aligned}$$

Das genäherte Azimut des Instrumentenvertikals beträgt

$$8^\circ 14'3 \text{ respektive } 188^\circ 14'3.$$

Damit erhält man für die Koordinaten  $\mu$  und  $\nu$  der Achsenenden die folgenden Werte:

| Achsenende im Azimut | $\mu$           | $\nu$            |
|----------------------|-----------------|------------------|
| $98^\circ 14'$       | $6^h 24^m 08^s$ | $84^\circ 23',2$ |
| 188 14               | 18 24 08        | 95 36,8          |

In der Tabelle 2 ist die von  $m'' = 2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2} / \sin 1''$  abhängige Korrektur nach den Angaben STAMATINS angesetzt worden, da in der Publikation die Werte von  $\vartheta = \frac{1}{2} (U'' - U')$  nicht angegeben werden. Der Koeffizient von  $(eb + i \cos z)$  ist mit  $C$  bezeichnet; es ist

$$C = \operatorname{cosec} p \operatorname{cosec} \nu \operatorname{cosec} (\mu - \bar{i}).$$

In der letzten Zeile der Tabelle 2 sind die mit den Werten

$$u_0 = -4^s,500$$

berechneten Stundenwinkel  $t_{0i}$  der Sterne angegeben.

In der Tabelle 3 ist ausführlich die Berechnung der Azimutwerte  $a_i$  dargestellt, die der Ausgleichung zugrunde gelegt werden; sie sind logarithmisch siebenstellig unter Verwendung von Subtraktionslogarithmen nach der Formel

$$\operatorname{tg} a_i = - \frac{\operatorname{tg} p_i \operatorname{cosec} \Phi \sin t_{0i}}{1 - \operatorname{tg} p_i \operatorname{cotg} \Phi \cos t_{0i}}$$

berechnet worden; zur Kontrolle sind sie auch in sechsstelliger Rechnung mit Hilfe des folgenden Systemes ermittelt worden:

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} \Psi_i &= \cos t_{0i} \operatorname{tg} p_i, \\ \operatorname{tg} a_i &= \sin \Psi_i \operatorname{cosec} (\Psi_i - \Phi) \operatorname{tg} t_{0i}.\end{aligned}$$

Der genaue Wert von  $\Phi$  ist

$$\Phi = 43^{\circ}05'0'',11.$$

Tabelle 2

|                                                        | $\varepsilon$ Drac | $\varepsilon$ Aqu | $\zeta$ Aqu   | 98 H Ceph    |
|--------------------------------------------------------|--------------------|-------------------|---------------|--------------|
| $\bar{t} = \bar{U} + u_0 - \alpha$ . . . . .           | - 0h38m58s,5       | + 0h18m06s,5      | + 0h18m37s,0  | - 1h24m54s,2 |
| $\mu - \bar{t}$ . . . . .                              | 19 03 06           | 6 06 02           | 6 05 31       | 19 49 02     |
| $\operatorname{cosec} (\mu - \bar{t}) / \sin v \sin p$ | - 3,07             | + 1,04            | + 1,04        | - 5,38       |
| $\cotg (\mu - \bar{t}) \cdot \frac{m''}{15}$ . .       | + 0s,02            | + 0s,001          | + 0s,001      | + 0s,10      |
| $(e b + i \cos z) \cdot C$ . . . .                     | + 0,19             | + 0,070           | + 0,071       | + 0,14       |
| $t_0 - \bar{t}$ . . . . .                              | + 0,21             | + 0,071           | + 0,072       | + 0,24       |
| $U_0$ . . . . .                                        | 19h09m33s,02       | 19h15m02s,981     | 19h21m18s,666 | 19h42m02s,90 |
| $\alpha - u_0$ . . . . .                               | 19 48 31,35        | 18 56 56,417      | 19 02 41,600  | 21 06 56,83  |
| $t_{0i}$ . . . . .                                     | - 0 38 58,33       | + 0 18 06,56      | + 0 18 37,07  | - 1 24 53,93 |

Die Korrektur, die an den Werten  $a_i$  wegen der täglichen Aberration anzubringen ist, beträgt (vergleiche Seite 130):

$$* \text{ Nord } - 0'',322 \sin \Phi \cos a_N = + 0'',218,$$

$$* \text{ Süd } - 0,322 \sin \Phi \cos a_S = - 0,218.$$

Als Näherungswert  $a_0$  des unbekannten Azimutes  $a$  des Instrumentenvertikales ist eingeführt

$$a_0 = 8^{\circ} \text{ respektive } 188^{\circ}14'16'',00.$$

Tabelle 3

|                                                                 | $\varepsilon$ Drac      | $\varepsilon$ Aqu       | $\zeta$ Aqu             | 98 H Ceph               |
|-----------------------------------------------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|
| $\operatorname{tg} p_i$ . . . . .                               | 9,558 2928              | 0,572 2972              | 0,610 5259              | 9,331 8545              |
| $\sin t_{0i}$ . . . . .                                         | 9,228 4768 <sub>n</sub> | 8,897 2678              | 8,909 2688              | 9,558 7405 <sub>n</sub> |
| $\operatorname{tg} p_i \operatorname{cosec} \Phi$ . . . . .     | 9,723 8329              | 0,737 8373              | 0,776 0660              | 9,497 3946              |
| $\operatorname{tg} p_i \cotg \Phi$ . . . . .                    | 9,587 3702              | 0,601 3746              | 0,639 6033              | 9,360 9319              |
| $\cos t_{0i}$ . . . . .                                         | 9,993 6904              | 9,998 6428              | 9,998 5654              | 9,969 4941              |
| $\operatorname{tg} p_i \cotg \Phi \cos t_{0i}$ . .              | 9,581 0606              | 0,600 0174              | 0,638 1687              | 9,330 4260              |
| $\lg (a) - \lg (b)$ . . . . .                                   | 0,418 9393              | 0,600 0174              | 0,638 1687              | 0,669 5740              |
| $(A) \text{ resp. } (C)$ . . . . .                              | 0,208 3929              | 0,125 6217              | 0,113 5402              | 0,104 5808              |
| $\lg (a-b)$ . . . . .                                           | 9,791 6071              | 0,474 3957 <sub>n</sub> | 0,524 6285 <sub>n</sub> | 9,895 4192              |
| $\operatorname{tg} p_i \operatorname{cosec} \Phi \sin t_{0i}$ . | 8,952 3097 <sub>n</sub> | 9,635 1051              | 9,685 3348              | 9,056 1351 <sub>n</sub> |
| $\operatorname{tg} a_i =$ . . . . .                             | 9,160 7026              | 9,160 7094              | 9,160 7063              | 9,160 7159              |
| $a_i =$ . . . . .                                               | 188°14'16'',54          | 8°14'17'',00            | 8°14'16'',79            | 188°14'17'',44          |
| $a_i - a_0 =$ . . . . .                                         | + 0'',54                | + 1'',00                | + 0'',79                | + 1'',44                |
| $\sin z_i =$ . . . . .                                          | 0,402                   | 0,532                   | 0,550                   | 0,530                   |
| $(a_i - a_0) \sin z_i =$ . .                                    | + 0,217                 | + 0,532                 | + 0,434                 | + 0,763                 |
| $- 0'',322 \sin \Phi \cos a_i =$                                | + 0,218                 | - 0,218                 | - 0,218                 | + 0,218                 |
| $l_i =$ . . . . .                                               | + 0,435                 | + 0,314                 | + 0,216                 | + 0,981                 |

Die Fehlergleichungen, die der Ausgleichung zugrunde zu legen sind, können entweder in der Form

$$x \sin z_i \mp y \cos z_i = l_i \sin z_i + \lambda_i$$

mit

$$\begin{aligned} du &= y \operatorname{cosec} \Phi \sec a, \\ da &= x + du \cos \Phi \end{aligned}$$

oder in der Form (vergleiche Beziehung (67), Seite 132):

$$da \sin z_i - du \sin p_i \cos q_i = l_i \sin z_i + \lambda_i$$

angesetzt werden. Wir wählen die zweite Form, trotzdem sie wegen der Berechnung des Koeffizienten  $\sin p \cos q$  eine Mehrarbeit erfordert, weil die dieser Form zugehörigen Normalgleichungen in einfacher Weise erlauben, den Einfluß des Uhrfehlers, der aus den Aufnahmen der Zeitzeichen abgeleitet worden ist, zu berücksichtigen.

Die Koeffizienten  $\sin p_i \cos q_i$  berechnen wir mit Hilfe der Beziehung

$$\sin p_i \cos q_i = \cos \Phi \sin z_i + \sin \Phi \cos z_i \cos a_i,$$

worin für  $a_i$  der in der Richtung des Sternes liegende Wert des Instrumentenazimutes einzuführen ist. Die Fehlergleichungen lauten dann, wenn die Gewichte von  $l_i$  proportional  $\sin^2 z_i$  angenommen werden:

$$\begin{aligned} 0,402 da + 0,326 du &= + 0,435 + \lambda_1, \\ 0,532 da - 0,961 du &= + 0,314 + \lambda_2, \\ 0,550 da - 0,967 du &= + 0,216 + \lambda_3, \\ 0,530 da + 0,186 du &= + 0,981 + \lambda_4. \end{aligned}$$

Die Normalgleichungen in der reduzierten Form sind:

$$\begin{aligned} 1,028 da - 0,813 du &= + 0,981, \\ 1,358 du &= + 0,589, \\ [\lambda\lambda] &= + 0,1041; \end{aligned}$$

sie führen zu den folgenden Werten der unbekannten Verbesserungen und ihrer mittleren Fehler:

$$\begin{aligned} du &= + 0,434 \pm 0,195, \\ da &= + 1,297 \pm 0,274. \end{aligned}$$

Schreibt man die reduzierten Normalgleichungen in der Form:

$$\begin{aligned} da + \alpha'_2 du &= \chi_1, \text{ Gew. } [aa], \\ du &= \chi_2, \text{ Gew. } [bb_1], \end{aligned}$$

so sind  $\chi_1$  und  $\chi_2$  fingierte, voneinander unabhängige Beobachtungswerte, welche den ursprünglichen Beobachtungsgrößen  $l_i$  in bezug auf die Unbekannten  $da$  und  $du$  vollständig äquivalent sind, wenn ihnen die Gewichte

$$[aa] = 1,028$$

und

$$[bb_1] = 1,358$$

beigelegt werden.

Liegt nun für  $du$  ein zweiter, auf anderem Weg gewonnener Wert vor:

$$du = \chi'_2,$$

so kann  $\chi'_2$  mit dem Wert  $du = \chi_2$  nach Maßgabe der Gewichte zu einem Mittel vereinigt werden. Ist  $m'_2$  der mittlere Fehler von  $\chi'_2$  und  $m$  der mittlere Fehler des Gewichtes 1 in der Ausgleichung, so wird das Gewicht  $g'$  von  $\chi'_2$  gleich

$$g' = m^2/m'^2_2.$$

Der definitive Wert von  $du$  wird also gleich

$$du = \frac{[bb_1] \chi_2 + g' \chi'_2}{[bb_1] + g'},$$

und das Quadrat des mittleren Fehlers  $m_u$  von  $du$  wird gleich

$$m_u^2 = \frac{m^2}{[bb_1] + g'}.$$

Infolge der Änderung des Wertes von  $du$  ändert sich auch der Wert von  $da$ ; es wird

$$da = \chi_1 - \alpha'_2 \frac{[bb_1] \chi_2 + g' \chi'_2}{[bb_1] + g'},$$

und der mittlere Fehler  $m_a$  von  $da$  wird gegeben durch den Ausdruck:

$$m_a^2 = m^2 \left( \frac{1}{[aa]} + \frac{\alpha'_2 \alpha'_2}{[bb_1] + g'} \right).$$

Der Publikation STAMATINS entnehmen wir nun den aus den Zeitsignalaufnahmen abgeleiteten Wert des Uhrfehlers für die mittlere Epoche  $u_0 = 19^h 37$ :

$$u = -4^s 488 = -4^s 500 + 0^s 012.$$

Es ist somit zu setzen

$$\chi'_2 = +0^s 012 = 0'' 180.$$

Über den mittleren Fehler dieses Wertes von  $\chi'_2$  werden keine Angaben gemacht. Wir nehmen willkürlich das Gewicht von  $\chi'_2$  gleich groß an wie das Gewicht von  $\chi_2$ , setzen also

$$du = \frac{1}{2} (0'' 434 + 0'' 180) = 0'' 307.$$

Es wird dann mit  $\alpha'_2 = -0,790$ :

$$da = 0'' 954 + 0,790 \cdot 0'' 307 = 1'' 20.$$

Das reziproke Gewicht dieses Wertes wird gleich 1,20; somit ist

$$m_a = \pm \sqrt{\frac{0,1041}{4-2}} 1,20 = \pm 0'' 25.$$

Das Schlußresultat lautet also:

$$a = 188^\circ 14' 16'' 00 + 1'' 20 = 188^\circ 14' 17'' 20 \pm 0'' 25,$$

$$A = a + \Delta A = 188 \ 14 \ 17,20 - 4,14 = 188 \ 14 \ 13,05 \pm 0,25$$

$$\pm 0,25 \pm 0,01.$$