

noch die Verbesserung

$$+ 0,322 \sin \Phi \operatorname{cosec} z^* \cos a_N \sim + 0,322 \sin \Phi \operatorname{cosec} z^*$$

anzubringen, wie sich aus der Beziehung (63, 2), Seite 130, ergibt.

7. *Die Laplacesche Kontrollgleichung*⁸⁾. Es sei (vergleiche Figur 18) Λ die astronomisch bestimmte Länge eines Punktes und Φ die Poldistanz seines Zenites Z . Durch eine trigonometrische Vermessung habe sich in bezug auf denselben Anfangsmeridian als geodätische Länge des Punktes der Wert Λ' und als Poldistanz des geodätischen Zenites Z' der Wert Φ' ergeben. ZO sei der Vertikal eines irdischen Objektes und a dessen Azimut. $Z'O$ bildet dann mit dem geodätischen Meridian PZ' das geodätische Azimut a' . Da durch die Triangulation die Lage des geodätischen Zenites Z' gegenüber dem astronomischen Zenit Z festgelegt ist, muß zwischen a und a' eine Beziehung bestehen; diese Beziehung, die als Laplacesche Gleichung bekannt ist, kann auf folgendem Weg abgeleitet werden.

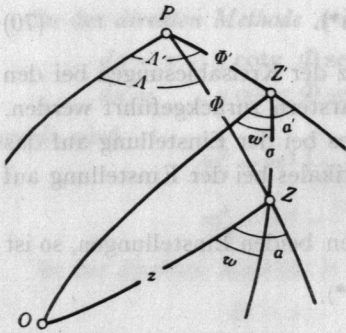


Fig. 18

Es ist

$$ZZ' = \sigma$$

die Lotablenkung des Zenites. Der Großkreis ZZ' bilde mit dem Vertikal ZO den Winkel w und mit dem geodätischen Vertikal $Z'O$ den Winkel w' . Dann gibt das Dreieck PZZ' die Beziehung:

$\sin(\Lambda' - \Lambda) \cos \Phi = -\cos(a' - w') \sin(a - w) + \sin(a' - w') \cos(a - w) \cos \sigma$,
oder, da σ ein kleiner Winkel ist, dessen Cosinus gleich 1 gesetzt werden darf:

$$\sin(\Lambda' - \Lambda) \cos \Phi = \sin(a' - a) - (w' - w). \quad (72)$$

Im Dreieck OZZ' ist

$$\cotg z \sin \sigma = -\cos \sigma \cos w + \sin w \cotg w';$$

setzt man hierin $\sin \sigma = \sigma$ und $\cos \sigma = 1$, so erhält man

$$\sigma \sin w' \cotg z = -\sin(w' - w).$$

Ist $z = 90^\circ$, das heißt liegt das Objekt im Horizont, so ist $w' - w = 0$; ist z nahe gleich 90° , so ist $w' - w$ eine kleine Größe höherer Ordnung gegenüber σ und darf in der Beziehung (72) neben $a' - a$ vernachlässigt werden. Man erhält dann, wenn die Sinus der kleinen Winkel durch ihre Argumente ersetzt werden, aus (72):

$$(\Lambda' - \Lambda) \cos \Phi = a' - a$$

oder

$$(a - \Lambda \cos \Phi) - (a' - \Lambda' \cos \Phi) = 0.$$

Das ist die gesuchte Beziehung; sie gestattet, die Lotabweichung ($\Lambda' - \Lambda$) in Länge auf die Lotabweichung ($a' - a$) in Azimut zurückzuführen.

Von dieser Möglichkeit macht man heute kaum mehr Gebrauch, da die direkte Bestimmung der Lotabweichung in Länge keine Schwierigkeiten bietet. Die Laplacesche Gleichung wird aber als Kontrollgleichung immer von Bedeutung sein; denn bei fehlerfreien astronomischen und geodätischen Messungen stellt sie eine Bedingungsgleichung dar, die auf jedem Triangulationspunkt, auf dem die Lotabweichungen in Länge und Azimut bestimmt worden sind, erfüllt sein muß.

Führt man die astronomische Länge Λ auf die Differenz der Sternzeiten an der Station und am Ausgangsmeridian zurück:

$$\Lambda = \Theta - \Theta_0,$$

und ersetzt die Sternzeit Θ durch die Uhrzeit U und die Uhrkorrektur u :

$$\Theta = U + u,$$

so erscheinen in der Differenz

$$a - \Lambda \cos \Phi \equiv a - (U + u - \Theta_0) \cos \Phi$$

die aus astronomischen Beobachtungen zu ermittelnden Größen a und u in der Verbindung

$$a - u \cos \Phi,$$

oder, wenn a und u auf die Näherungswerte a_0 und u_0 und deren Verbesserungen da und du zurückgeführt werden, in der Verbindung

$$x = da - du \cos \Phi.$$

Diese lineare Funktion der beiden Verbesserungen da und du tritt aber als Unbekannte auf, wenn aus den Durchgängen von 2 oder mehr Sternen die Lage eines ganz beliebigen Vertikales gegenüber dem Pol des Äquators festgelegt wird.

Sind z_1 und z_2 die Zenitdistanzen zweier Sterne, deren Durchgänge durch einen beliebigen Vertikal beobachtet worden sind, so bestehen zwischen den Unbekannten x und y und den fingierten Beobachtungsgrößen l_1 und l_2 die Beziehungen

$$x - y \cotg z_1 = l_1,$$

$$x \mp y \cotg z_2 = l_2;$$

in der zweiten Gleichung ist das obere oder untere Zeichen zu nehmen, je nachdem der zweite Stern auf derselben Seite des Zenites beobachtet worden ist wie der erste oder auf der entgegengesetzten Seite. Diese Beziehungen sagen aber aus, daß sich die Unbekannte x bestimmen läßt schon aus der Beobachtung eines *einzelnen* Sternes, wenn sein Durchgang durch den Instrumenten-

vertikal in der Zenitdistanz $z = 90^\circ$, das heißt im Horizont, entweder im Azimut a oder im Azimut $a + 180^\circ$ beobachtet wird.

Praktisch kommt die Wahl $z = 90^\circ$, wenn man Azimut und Uhrkorrektion nicht getrennt, sondern nur in der Verbindung, in der diese Größen in der Laplaceschen Gleichung vorkommen, ermitteln will, nicht in Frage wegen der großen Luftunruhe, unter der Beobachtungen im Horizont leiden. Beobachtet man in kleineren Zenitdistanzen, so wird zwar die Genauigkeit, mit der x bestimmt wird, kleiner, doch wird der Verlust an Genauigkeit zum Teil kompensiert durch die größere Sicherheit, mit der sich die Durchgänge in kleineren Zenitdistanzen beobachten lassen. Der mittlere Fehler, der in diesem Fall x zuzuschreiben ist, ergibt sich auf folgendem Weg.

Eliminiert man aus den Beziehungen

$$x \sin z_1 - y \cos z_2 = (l_1 + \varepsilon_1) \sin z_1,$$

$$x \sin z_2 + y \cos z_2 = (l_2 + \varepsilon_2) \sin z_2$$

die Unbekannte y , so erhält man den wahren Wert von x aus der Gleichung

$$x \sin (z_1 + z_2) = (l_1 + \varepsilon_1) \sin z_1 \cos z_2 + (l_2 + \varepsilon_2) \sin z_2 \cos z_1,$$

so daß der wahre Fehler ε_x von x gegeben wird durch

$$\varepsilon_x = (\varepsilon_1 \sin z_1 \cdot \cos z_2 + \varepsilon_2 \sin z_2 \cdot \cos z_1) \operatorname{cosec} (z_1 + z_2).$$

Sind m_1 und m_2 die mittleren Fehler, die den wahren Fehlern $\varepsilon_1 \sin z_1$ und $\varepsilon_2 \sin z_2$ entsprechen, so wird der mittlere Fehler m_x gleich:

$$m_x^2 = \frac{m_1^2 \cos^2 z_2 + m_2^2 \cos^2 z_1}{\sin^2 (z_1 + z_2)}. \quad (73)$$

Wir nehmen wieder an, es sei die Zahl der Faden- oder Kontaktbeobachtungen so bemessen worden, daß $m_1^2 = m_2^2 \equiv m^2$ ist; es wird dann

$$m_x^2 = m^2 \frac{\cos^2 z_1 + \cos^2 z_2}{\sin^2 (z_1 + z_2)} \quad (74a)$$

oder, wenn man statt der Zenitdistanzen die Höhen $h = 90^\circ - z$ einführt:

$$m_x^2 = m^2 \frac{\sin^2 h_1 + \sin^2 h_2}{\sin^2 (h_1 + h_2)}. \quad (74b)$$

Aus der letzten Form ist ersichtlich, daß m_x^2 von den Höhen der beiden Sterne in derselben Weise abhängig ist wie m_u^2 in der Meridianzeitbestimmung von den Zenitdistanzen oder m_k^2 von den Poldistanzen oder wie m_ϕ^2 bei der Bestimmung der Polhöhe aus Durchgängen durch den ersten Vertikal von den Zenitdistanzen. Im besonderen ergibt sich nun:

Den kleinsten Wert nimmt m_x an, wenn man $h_1 = h_2$ gegen Null gehen läßt; es wird dann

$$m_x^2 = \frac{1}{2} m^2;$$

man kann auch h_1 gegen Null und h_2 gegen 180° gehen lassen. Die eine oder andere Wahl kommt wegen der ungünstigen atmosphärischen Verhältnisse nicht in Betracht.

Wählt man die beiden Sterne so, daß sie im Vertikal 90° Abstand haben, so wird

$$m_x^2 = m^2.$$

Hält man h_2 fest, so nimmt

$$F(h_1, h_2) = \frac{\sin^2 h_1 + \sin^2 h_2}{\sin^2 (h_1 + h_2)}$$

einen Minimalwert an für einen Wert $h_1 = h_0$, der durch die Beziehung

$$\operatorname{tg} (h_0 + h_2) = 2 \operatorname{tg} h_2$$

gegeben wird; es ist dann

$$F(h_0, h_2) = \frac{1}{2} (1 + \sin^2 h_2).$$

Zusammengehörige Werte von h_0 , h_2 und $F(h_0, h_2)$ sind:

h_2	90°	80°	70°	60°	50°	40°	$35,3$	30°	20°	10°	0°
h_0	0°	$5,9$	$9,7$	$13,9$	$17,2$	$19,2$	$19,5$	$19,1$	$16,1$	$9,4$	0°
$F(h_0, h_2)$	1,00	0,98	0,94	0,88	0,79	0,71	0,67	0,62	0,56	0,52	0,50

Wenn man nicht unter ungünstigen atmosphärischen Verhältnissen beobachten will, so wird man sich auf Sterne beschränken, deren Zenitdistanzen kleiner als 50° bis 60° bleiben. Der Bereich, aus dem die Sterne zu beiden Seiten des Zenites ausgewählt werden können, ist immer noch so groß, daß leicht ein gedrängtes Beobachtungsprogramm aufgestellt werden kann, ohne daß man auf Sterne greifen müßte, deren Abstand beim Durchgang durch den Vertikal erheblich unter 90° sinkt.

ERSTES ZAHLENBEISPIEL

(Direkte Azimutbestimmung nach der Methode A)

Ort: Astronomische Anstalt der Universität Basel in Binningen, Pfeiler der Passagenhütte.

Instrument: Bambergisches Passageninstrument mit unpersönlichem Mikrometer; Vergrößerung 86fach.

Beobachter: Dr. J. O. FLECKENSTEIN.

Zeit: 30. Juni 1941.

Der Stern 9H Drac wurde in der Nähe seiner westlichen größten Digression in beiden Lagen an den Instrumentenvertikal mikrometrisch angeschlossen; unmittelbar darauf wurde der Durchgang des Sternes γ Herc mit dem unpersönlichen Mikrometer beobachtet.

Die Beobachtungsdaten sind nachstehend zusammengestellt.