Schneidet der Deklinationskreis $P\bar{S}$ den Instrumentenvertikal im Punkte $\bar{S}'$ und setzt man $P\bar{S}' = p'$, so ist

$$0 = \cos p' \cos \nu + \sin p' \sin \nu \cos (\mu - \bar{t}).$$

Aus der Differenz dieser beiden Beziehungen erhält man mit

$$\bar{p} = \frac{1}{2}(p + p')$$

leicht:

$$2 \sin \frac{p' - p}{2} = - \sin F \,/\, \left(\cos \nu \sin \bar{p} - \sin \nu \cos \bar{p} \cos (\mu - \bar{t})\right). \qquad (66)$$

Man wird meist p auf p' umrechnen können mit Hilfe der Beziehung

$$p' - p = - F \,/\, \left(\cos \nu \sin p - \sin \nu \cos p \cos (\mu - \bar{t})\right);$$

sie läßt sich wegen der Näherungsbeziehung

$$\sin q = \cos \nu \sin p - \sin \nu \cos p \cos (\mu - \bar{t})$$

in der Form

$$p' = p - F \operatorname{cosec} q$$

schreiben. Einen ausreichend genauen Wert von q erhält man meist schon aus

$$\sin q = \sin \Phi \sin \bar{t} \operatorname{cosec} z.$$

Mit dem Wert von p' an Stelle des Wertes von p für den Nordstern darf man jetzt die abgeleiteten Reduktionsformeln zur Berechnung des Instrumentenazimutes benützen.

5. *Ermittlung der Unbekannten in den beiden direkten Verfahren durch eine Ausgleichung.* Hat man nicht nur je *einen* Stern zu beiden Seiten des Zenites beobachtet, sondern eine Reihe von Sternen, so wird man, insofern man sich auf die Konstanz des Instrumentenazimutes verlassen kann, die Unbekannten aus der Gesamtheit der Beobachtungen nach den Vorschriften der Ausgleichungsrechnung ermitteln. Um die zur Ausgleichung erforderlichen linearen Beziehungen aufzustellen, führen wir Näherungswerte der Unbekannten ein und berechnen deren Verbesserungen; wir setzen

$$u = u_0 + du,$$
$$\Phi = \Phi_0 + d\Phi$$

und berechnen die zu den Näherungswerten u_0 und Φ_0 gehörigen Azimutwerte a_i aus der Beziehung

$$\operatorname{tg} a_i = \frac{\operatorname{tg} p_i \operatorname{cosec} \Phi_0 \sin (U_i + u_0 - \alpha_i)}{l - \operatorname{tg} p_i \operatorname{cotg} \Phi_0 \cos (U_i + u_0 - \alpha_i)} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

An den Werten a_i hat man eine Verbesserung da_i anzubringen, durch die sie in die wahren Werte des Azimutes a des Instrumentenvertikales im Süden oder des Azimutes $a + 180^0$ im Norden übergeführt werden; diese Verbesserungen da_i werden durch die Beziehungen

$$\sin z_i \, da_i = -\sin q_i \, dp_i + \cos q_i \sin p_i \, d(U_i + u - \alpha_i) + \cos z_i \sin a_i \, d\Phi$$

gegeben, in welchen zu setzen ist:

$$da_i = a - a_i.$$

Führt man auch einen Näherungswert a_0 des wahren Azimutwertes a ein:

$$a = a_0 + da$$

und setzt in

$$\begin{aligned} da_i &= da - (a_i - a_0) \\ a_i - a_0 &= l_i, \end{aligned}$$

so lauten die linearen Beziehungen, durch welche die gesuchten Verbesserungen der Unbekannten mit den fingierten Beobachtungsgrößen l_i und mit den wahren Fehlern dU_i, $d\alpha_i$ und dp_i verbunden werden:

$$\begin{aligned} &\sin z_i \, da - \cos q_i \sin p_i \, du - \cos z_i \sin a_i \, d\Phi = \\ &\qquad = l_i \sin z_i + \cos q_i \sin p_i \, d(U_i - \alpha_i) - \sin q_i \, dp_i. \end{aligned} \tag{67}$$

Setzt man hierin

$$a_i = a \quad \text{oder} \quad a_i = a + 180^0,$$

je nachdem der Stern im Süden oder im Norden beobachtet wird, und berücksichtigt die Beziehung

$$\cos q_i \sin p_i = \cos \Phi \sin z_i \pm \sin \Phi \cos z_i \cos a \quad \begin{cases} * \text{ Süd}, \\ * \text{ Nord}, \end{cases}$$

so nimmt die linke Seite die Form an:

$$\begin{aligned} &\sin z_i \, da - (\cos \Phi \sin z_i \pm \sin \Phi \cos z_i \cos a) \, du \mp \cos z_i \sin a \, d\Phi \\ &\qquad \equiv \sin z_i (da - \cos \Phi \, du) \mp \cos z_i (du \sin \Phi \cos a + d\Phi \sin a). \end{aligned}$$

Führt man zur Abkürzung ein:

$$\left.\begin{aligned} x &= da - du \cos \Phi, \\ y &= du \sin \Phi \cos a + d\Phi \sin a, \end{aligned}\right\} \tag{68}$$

$$\varepsilon_i \sin z_i = \cos q_i \sin p_i \, dU_i - (\cos q_i \sin p_i \, d\alpha_i + \sin q_i \, dp_i),$$

so nehmen die gesuchten linearen Beziehungen die Form an:

$$x \mp y \operatorname{cotg} z_i = l_i + \varepsilon_i \quad \begin{cases} * \text{ Süd}, \\ * \text{ Nord}, \end{cases}$$

in welcher den fingierten Beobachtungsgrößen l_i die wahren Fehler ε_i zuzuschreiben sind.

Um die *Gewichte der fingierten Beobachtungsgrößen* l_i anzugeben, gehen wir von den wahren Fehlern ε_i zu den mittleren Fehlern m_i über; es ist, wenn man vom Fehler der Reduktion auf den Achsenäquator und auf den Instrumentenvertikal absieht:

$$\sin^2 z_i \cdot m_i^2 = \cos^2 q_i \sin^2 p_i \cdot m_{U_i}^2 + m^{*2},$$

also bei $2\,n_i$ Faden- oder Kontaktbeobachtungen:

$$\sin^2 z_i \cdot m_i^2 = \frac{1}{2\,n_i}\left(a_0^2 \cos^2 q_i \sin^2 p_i + \frac{b_0^2}{V^2} \right) + m^{*2}.$$

Wir nehmen an, der Beobachter habe die Zahl $2n_i$ der einzelnen Durchgangsbeobachtungen oder die Zahl der Pointierungen so gewählt, daß das erste Glied rechter Hand einen konstanten Wert annimmt; es wird dann

$$\sin^2 z_i \cdot m_i^2 = \text{constans},$$

und die Gewichte g_i, die den Quadraten der mittleren Fehler umgekehrt proportional sind, werden gleich

$$g_i = \text{constans} \cdot \sin^2 z_i.$$

Die auf gleiches Gewicht reduzierten Fehlergleichungen lauten dann mit λ_i als scheinbaren Fehlern an Stelle der wahren Fehler:

$$x \sin z_i \mp y \cos z_i = l_i \sin z_i + \lambda_i \left\{ \begin{array}{l} *\,\text{Süd}, \\ *\,\text{Nord}. \end{array} \right. \tag{69}$$

Sind x und y berechnet, so erhält man im Fall der direkten Methode A die Unbekannten aus den Beziehungen:

$$\begin{aligned} du &= y \operatorname{cosec} \Phi_0 \sec a; & u &= u_0 + du, \\ da &= x + du \cos \Phi; & a &= a_0 + da, \end{aligned}$$

und im Fall der Methode B aus den Beziehungen:

$$\begin{aligned} da &= x; & a &= a_0 + da, \\ d\Phi &= y \operatorname{cosec} a; & \Phi &= \Phi_0 + d\Phi. \end{aligned}$$

Der Einfluß der *täglichen Aberration* kann dadurch berücksichtigt werden, daß die fingierten Beobachtungsgrößen $l_i \sin z_i$ um den Betrag

$$-\,0\overset{''}{.}322 \sin \Phi \cos a^*$$

korrigiert werden.

Die *mittleren Fehler* des Azimutes a, der Uhrkorrektion u oder der Poldistanz Φ erhält man aus dem mittleren Fehler m der Gewichtseinheit

$$m = \sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{n-2}}$$

in folgender Weise.

Schreibt man die Fehlergleichungen (69) in der Form

$$a' x + b' y = l + \lambda \quad \text{(Gewicht 1)}$$

und die reduzierten Normalgleichungen in der Form

$$[a'a']\,x + [a'b']\,y = [a'l'] \quad \text{oder} \quad x + \alpha_2' y = \chi_1,$$
$$[b'b_1']\,y = [b'l_1'] \qquad\qquad y = \chi_2,$$

so wird der mittlere Fehler m_F einer Funktion $F = F\,(x, y)$ gegeben durch den Ausdruck

$$m_F^2 = m^2 \left(\frac{F_1^2}{[a'a']} + \frac{F_{21}^2}{[b'b_1']} \right),$$

worin

$$F_1 = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad F_2 = \frac{\partial F}{\partial y}, \quad F_{21} = F_2 - \alpha_2' F_1$$

bedeutet.

In der *direkten Methode A* ist

$$da = x + y \operatorname{cotg} \Phi \sec a, \quad F_1 = 1, \quad F_2 = \operatorname{cotg} \Phi \sec a,$$
$$du = y \operatorname{cosec} \Phi \sec a, \quad F_1 = 0, \quad F_2 = \operatorname{cosec} \Phi \sec a;$$

somit wird

$$m_a^2 = m^2 \left(\frac{1}{[a'a']} + \frac{(\operatorname{cotg} \Phi \sec a - \alpha_2')^2}{[b'b_1']} \right),$$
$$m_u^2 = m^2 \, \frac{(\operatorname{cosec} \Phi \sec a)^2}{[b'b_1']}.$$

In der *direkten Methode B* ist

$$da = x, \qquad F_1 = 1, \quad F_2 = 0,$$
$$d\Phi = y \operatorname{cosec} a, \quad F_1 = 0, \quad F_2 = \operatorname{cosec} a;$$

somit wird

$$m_a^2 = m^2 \left(\frac{1}{[a'a']} + \frac{\alpha_2'^2}{[b'b_1']} \right),$$
$$m_\Phi^2 = m^2 \, \frac{\operatorname{cosec}^2 a}{[b'b_1']}.$$

Das Azimut des irdischen Objektes

Der bewegliche Vertikalfaden wird in beiden Lagen auf das Objekt eingestellt. Es seien M' und M'' die beiden Ablesungen an der Trommel vor und nach dem Umlegen; es sei $M' > M''$ und der Faden soll sich im Sinn zunehmenden Azimutes bewegen, wenn er von der Stellung der Ablesung M'' zur Stellung der Ablesung M' gebracht wird. Dann ist

$$f = \frac{1}{2}\,(M' - M'') \times \text{Revolutionswert}$$

der Abstand des Objektes vom Achsenäquator, positiv genommen im Sinn zunehmenden Azimutes. Ist Δa der Unterschied «Azimut des Objektes minus Azimut des Instrumentenvertikales» und i die mittlere Neigung der Achse, positiv, wenn das dem Objekt um 90^0 im Azimut vorangehende Achsenende über dem Horizont liegt, so besteht im Dreieck, dessen Eckpunkte dieses Achsenende, das Zenit und das Objekt bilden, die Beziehung

$$\sin f = \sin i \cos z_0 + \cos i \sin z_0 \sin \Delta a,$$

in welcher z_0 die Zenitdistanz des Objektes bedeutet. Mit $\cos i = 1$ und $\sin i = i$ wird

$$\Delta a = (f - i \cos z_0) \operatorname{cosec} z_0.$$

Bedeutet a_V das Azimut des in der Richtung des Objektes liegenden Instrumentenvertikales, so wird das Azimut A des Objektes gleich

$$A = a_V + (f - i \cos z_0) \operatorname{cosec} z_0.$$

6. *Die Reduktionsformeln der indirekten Methode.* Ist a^* das Azimut des Polarsternes und a_{Obj} das Azimut des Objektes, so wird

$$a_{Obj} = a^* + (a_{Obj} - a^*). \tag{70}$$

Die Differenz $(a_{Obj} - a^*)$ kann auf die Differenz der Kreisablesungen bei den Einstellungen auf das Objekt und auf den Polarstern zurückgeführt werden. Es sei a_0 das Azimut des Instrumentenvertikales bei der Einstellung auf das Objekt und a das Azimut des Instrumentenvertikales bei der Einstellung auf den Polarstern.

Sind A_{Obj} und A^* die Kreisablesungen bei den beiden Einstellungen, so ist

$$a_0 - a = \pm (A_{Obj} - A^*),$$

worin das obere oder untere Zeichen zu nehmen ist, je nachdem die Kreislesungen mit wachsendem Azimut zu- oder abnehmen.

Die Differenz $(a_{Obj} - a^*)$ läßt sich auf die Differenz $(a_0 - a)$ zurückführen mit Hilfe der Abstände F_0 und F^* des Objektes respektive des Sternes vom zugehörigen Instrumentenvertikal; es ist

$$\sin (a^* - a) = \sin F^* \operatorname{cosec} z^*,$$
$$\sin (a_{Obj} - a_0) = \sin F_0 \operatorname{cosec} z_0$$

oder

$$a^* - a = F^* \operatorname{cosec} z^* = (i^* \cos z^* \pm c) \operatorname{cosec} z^*,$$
$$a_{Obj} - a_0 = F_0 \operatorname{cosec} z_0 = (i_0 \cos z_0 \pm c) \operatorname{cosec} z_0.$$

Hierin sind die Neigungen i^* und i_0 auf das westliche respektive linke Achsenende zu beziehen; c ist die Kollimation. Es wird also

$$a_{Obj} = a^* \pm (A_{Obj} - A^*) + (i_0 \cos z_0 \pm c) \operatorname{cosec} z_0 - (i^* \cos z^* \pm c) \operatorname{cosec} z^*. \tag{71a}$$

Das von Norden nach Osten genommene Azimut $a_N = a^* - 180^0$ des Polarsterns folgt aus der Beziehung

$$\operatorname{tg} a_N = - \frac{\operatorname{tg} p \operatorname{cosec} \Phi \sin t}{1 - \operatorname{tg} p \operatorname{cotg} \Phi \cos t}. \tag{71b}$$

Wird der scheinbare Ort nicht wegen der täglichen Aberration verbessert, so ist am Azimut des Objektes, das nach der Beziehung (71a) berechnet wird,