in welchem dem von m_Φ abhängigen Fehlerbetrag nicht der Faktor $\frac{1}{2}$, sondern der Faktor 1 zu geben ist, weil der wahre Fehler $d\Phi$ als konstanter Fehler das aus den beiden Sternpaaren abgeleitete Azimut beeinflußt.

Setzt man die beiden Ausdrücke von m_a^2 einander gleich, so erhält man mit der Abkürzung

$$M = \frac{m_\Phi^2}{m_0^2 + m^{*2}}$$

die Beziehung

$$\frac{1}{2}\,(1 + \operatorname{cotg}^2 \Phi \sec^2 a^*) + M \operatorname{cotg}^2 \Phi \operatorname{tg}^2 a^* = 1 + \frac{1}{2} \operatorname{cotg}^2 \Phi.$$

Der Wert $a = a_0$, der diese Beziehung erfüllt, folgt aus

$$\operatorname{tg}^2 a_0 = \frac{\operatorname{tg}^2 \Phi}{1 + 2\,M}.$$

In der folgenden Tabelle sind die Werte angegeben, die a_0 annimmt in verschiedenen Polhöhen $\varphi = 90^0 - \Phi$, wenn man M die Werte 0, $\frac{1}{2}$, 1 und 2 beilegt.

φ	$M = 0$	$M = \frac{1}{2}$	$M = 1$	$M = 2$
0^0	90^0	90^0	90^0	90^0
15	75	69	65	59
30	60	51	45	38
45	45	35	30	24
60	30	22	18	14
75	15	11	9	7
90	0	0	0	0

Man wird, wenn eine gute Polhöhenbestimmung der Station vorliegt, das Verhältnis von m_Φ^2 zu $(m_0^2 + m^{*2})$ kaum größer als 1 ansetzen müssen. Die Tabelle läßt dann erkennen, daß man in mittleren Breiten bis zu einem Absolutwert $a_0 = 30^0$ bis 35^0 die Methode A anwenden darf, ohne befürchten zu müssen, an Genauigkeit gegenüber der in jedem Azimut verwendbaren Methode B in erheblichem Maß zu verlieren.

3. *Vergleichung der indirekten Methode der Azimutbestimmung mit den direkten Methoden.* Mißt man den Horizontalwinkel zwischen dem Polarstern und einem irdischen Objekt, so stellt man den Polarstern am Mittelfaden ein; das hat zur Folge, daß man zur Elimination des Einflusses der Kollimation zwei Messungen hintereinander in zwei um 180^0 verschiedenen Lagen des Instrumentes machen muß. Sind dU_1' und dU_2'' die Fehler der Uhrzeiten der beiden Messungen, so ist der von diesen Fehlern herrührende Beitrag im arithmetischen Mittel der beiden Azimutwerte gleich

$$df_1 = \cos q \sin p \,\frac{dU_1' + dU_1''}{2}.$$

Einer jeden solchen Doppelmessung ordnen wir eine zweite zu, die der Beobachter 12^h später vornimmt, zur Zeit, da sich der Polarstern an der diametralen Stelle seiner Bahn befindet. Da sich die parallaktischen Winkel an diametralen Stellen der Bahn nahe um 180^0 unterscheiden, ist jetzt ein Betrag df_2 in Rechnung zu stellen, der gleich

$$df_2 = -\cos q \sin p \, \frac{dU_2' + dU_2''}{2}$$

ist. Im Mittel aus zwei solchen Doppelmessungen hebt sich der Einfluß der Unsicherheit des Polarisortes, da

$$df_1^* = \cos q \sin p \, d\alpha + \sin q \, dp = -df_2^*$$

ist, wie auch der Einfluß des Fehlers $d\Phi$, weil in zwei zum Meridian symmetrischen Azimutrichtungen $\sin a_1^*$ gleich $-\sin a_2^*$ ist. Der Fehler der Uhrkorrektion geht mit dem Betrag $\frac{1}{2}(du_1 - du_2)$ in das Mittel von zwei solchen Doppelmessungen ein.

Ist nun $d\bar{a}$ die Verbesserung, die am Mittel der vier Einzelwerte des Azimutes, die aus zwei solchen Doppelmessungen hervorgehen, wegen der Fehler dU und du anzubringen ist, und führt man an Stelle der einzelnen Zenitdistanzen den Mittelwert Φ ein, so erhält man die Beziehung

$$\sin \Phi \, d\bar{a} = \cos q \sin p \left(\frac{dU_1' + dU_1'' - dU_2 - dU_2''}{4} + \frac{du_1 - du_2}{2} \right).$$

Die Fehler du dürfen als klein gegenüber den Fehlern dU angenommen werden, wenn gute Zeitbestimmungen neben den Azimutbestimmungen gemacht werden und wenn man nicht mit starken Gangschwankungen der Beobachtungsuhr rechnen muß. Wir vernachlässigen die von den Fehlern der Uhrkorrektion abhängigen Glieder. Geht man nun zu den mittleren Fehlern über, so erhält man den Ausdruck:

$$m_{\bar{a}}^2 = \cos^2 q \sin^2 p \cdot \frac{m_U^2}{4} \operatorname{cosec}^2 \Phi.$$

Hierin führen wir ein

$$\cos^2 q \sin^2 p \cdot m_U^2 = a_0^2 \cos^2 q \sin^2 p + \frac{b_0^2}{V^2} \, .$$

Da a_0 und b_0/V von gleicher Größenordnung sind, ist das erste Glied rechter Hand wegen des Faktors $\sin^2 p$ immer klein gegenüber dem zweiten, so daß es genügt, zu setzen:

$$m_{\bar{a}}^2 = \frac{1}{4} \frac{b_0^2}{V^2} \operatorname{cosec}^2 \Phi + \cdots . \qquad (57)$$

Diesen mittleren Fehler des Azimutes der indirekten Methode vergleichen wir mit dem mittleren Fehler des Azimutes, das nach dem direkten Verfahren B ermittelt wird. Zu jeder Polariseinstellung gehört beim indirekten Verfahren eine Messung des Winkels Polaris–Objekt. Wenn man in Betracht zieht, daß neben den Beobachtungen zur Azimutbestimmung auch Beobachtungen zur Zeitbestimmung gemacht werden müssen und daß die Winkelmessungen erheblich mehr Zeit beanspruchen als der mikrometrische Anschluß des Objektvertikales beim direkten Verfahren, so wird man den Zeitbedarf, den die Durchführung von zwei Doppelmessungen der indirekten Methode erfordert, nicht kleiner ansetzen dürfen als das Zeitintervall, in dem bei der direkten Methode B ein Sternpaar einschließlich des mikrometrischen Anschlusses und ein Zeitbestimmungssternpaar beobachtet werden kann. Dann ist dem mittleren Fehler $m_{\bar{a}}$ der Beziehung (57) der folgende mittlere Fehler der direkten Methode B gegenüberzustellen:

$$m_a^2 = (m_0^2 + m^{*2})\left(1 + \frac{1}{2}\operatorname{cotg}^2 \Phi\right).$$

Den Einfluß der Unsicherheit des Sternortes eliminiert man bei der direkten Methode dadurch, daß eine größere Zahl von verschiedenen Sternpaaren beobachtet wird. Wir nehmen diese Zahl so groß an, daß im Endmittel aller Azimutwerte kein merklicher Einfluß dieser Fehlerquelle vorhanden ist, so daß der durch die Beziehung

$$m_a^2 = m_0^2\left(1 + \frac{1}{2}\operatorname{cotg}^2 \Phi\right)$$

gegebene mittlere Fehler des direkten Verfahrens mit dem mittleren Fehler der Beziehung (57) zu vergleichen ist. Erfahrungsgemäß darf man in der Beziehung

$$m_0^2 = \frac{1}{2\,n}\left(a_0^2 \cos^2 q \sin^2 p + \frac{b_0^2}{V^2}\right)$$

die Konstanten a_0 und b_0 bis zu hohen Deklinationen verwenden zur Berechnung des mittleren Fehlers der Durchgangszeit. Ob speziell die Konstante b_0 für Durchgangsbeobachtungen und Einstellungen des Polarsternes gleich groß anzunehmen ist wie bei weniger polnahem Stern, mag zweifelhaft erscheinen; doch kann die Abweichung nicht groß sein, so daß die Berücksichtigung der wahren Werte von b_0 das Resultat, zu dem die Annahme der Gleichheit führt, nicht wesentlich ändern kann. Die mittleren Fehler der Azimute, welche die beiden Methoden liefern, werden demnach gleich groß unter der folgenden Bedingung:

$$\frac{1}{4}\,\frac{b_0^2}{V^2}\operatorname{cosec}^2 \Phi = \frac{1}{2\,n}\left(a_0 \cos^2 q \sin^2 p + \frac{b_0^2}{V^2}\right)\left(1 + \frac{1}{2}\operatorname{cotg}^2 \Phi\right).$$

Da die direkte Methode B das Azimut jeder beliebigen Richtung mit der gleichen Genauigkeit zu bestimmen erlaubt, lassen wir den Instrumentenvertikal mit dem ersten Vertikal zusammenfallen. Ferner nehmen wir an, es seien die beiden Azimutsterne, die im Abstand von 90° durch den Vertikal gehen, so gewählt worden, daß sie symmetrisch zum Zenit durch den Vertikal gehen; es ist dann wegen $z = 45^0$:

$$\cos^2 q \sin^2 p = \sin^2 z \cos^2 \Phi = \frac{1}{2} \cos^2 \Phi,$$

so daß sich die obige Bedingung in der folgenden Form schreiben läßt:

$$2\,n = \frac{2\,V^2}{b_0^2} \left(\frac{1}{2}\, a_0^2 \cos^2 \Phi + \frac{b_0^2}{V^2} \right) (1 + \sin^2 \Phi);$$

unter der Annahme, daß die Vergrößerung V so gewählt werde, daß

$$\frac{V a_0}{b_0} = 1$$

ist, erhält man schließlich:

$$2\,n = (2 + \cos^2 \Phi)\ (2 - \cos^2 \Phi) = 4 - \cos^4 \Phi.$$

Es wird somit $2\,n = 3$ für $\Phi = 0^0$ und $2\,n = 4$ für $\Phi = 90^0$, das heißt, beobachtet man in der direkten Azimutbestimmung B die Durchgänge der Sterne insgesamt an $2\,n$, das heißt an 3 bis 4 Fäden, so erhält man das Azimut des Instrumentenvertikales mit derselben Genauigkeit wie in der indirekten Bestimmung. Gewöhnlich beobachtet man die Durchgänge an 10 Fäden oder an 20 Kontakten. Berücksichtigt man noch, daß die Winkelmessung der indirekten Methode erheblich ungenauer ist als der mikrometrische Anschluß der direkten Methode, so wird die Überlegenheit der direkten Methode über die indirekte offensichtlich.

Daß auch die Methode A der direkten Bestimmung innerhalb des Azimutbereiches, in dem sie angewendet werden kann, der indirekten Bestimmung überlegen ist, braucht keinen besonderen Nachweis, da die direkten Methoden A und B gleichwertig sind.

Werden die Sterndurchgänge durch die Fäden eines Netzes mit einem Handtaster auf dem Chronographen registriert, so kann der Beobachter die in Zenitdistanz erforderliche Nachführung des Fernrohres selbst übernehmen, da er eine Hand frei hat. Wird das unpersönliche Mikrometer zur Beobachtung der Durchgänge benützt, so ist es in größerer Entfernung vom Meridian notwendig, das Fernrohr dem Stern automatisch nachfolgen zu lassen, wozu die Seite 29/30 beschriebene Vorrichtung dienen kann.

4. *Die Reduktionsformeln der direkten Methode.* Wir betrachten den Fall, daß die Uhrzeit U_1 des Durchganges des Südsternes und die Uhrzeit U_2 des Durchganges des Nordsternes durch den Instrumentenvertikal bekannt sei; diese Zeiten sind aus den Faden- oder Kontaktbeobachtungen mit Hilfe der Beziehungen (6) und (9) abzuleiten. Den Fall, daß der Nordstern in der Nähe der größten Digression beobachtet werde, können wir auf den Fall, daß die Zeit des Durchganges durch den Instrumentenvertikal gegeben sei, zurückführen.

Um den Instrumentenvertikal gegenüber dem Pol P des Äquators festzulegen, fällen wir das Lot von P auf den Vertikal und geben die Poldistanz p_0 des Fußpunktes dieses Lotes an. Ist p_0 bekannt, so ist die Aufgabe der Azimut-