V. KAPITEL

Die Bestimmung des Azimutes eines irdischen Objektes

1. *Allgemeine Bemerkungen.* In astronomisch-geodätischen Untersuchungen ist die genaue Kenntnis des Azimutes eines irdischen Objektes von besonderer Wichtigkeit. Das Verfahren, das bisher am häufigsten zur Azimutbestimmung verwendet worden ist, besteht darin, daß man den Horizontalwinkel zwischen der Richtung nach dem Polarstern und der Objektrichtung mit einem Universalinstrument mißt und das Azimut des Polarsternes aus der Sternzeit, zu welcher er eingestellt worden ist, in Verbindung mit seinem scheinbaren Ort ermittelt. Dieses Verfahren kann man als *indirekte Methode der Azimutbestimmung* bezeichnen und ihm als *direkte Methode* das Verfahren gegenüberstellen, das den Vertikal des Instrumentes, in welchem man den Durchgang eines Gestirnes beobachtet, sehr nahe zusammenfallen läßt mit dem Objektvertikal; es fällt dann eine eigentliche Winkelmessung weg; eine kleine Abweichung des Instrumentenvertikals vom Objektvertikal kann durch mikrometrische Messung überbrückt werden[7].)

Beobachtet man nicht nur den Durchgang eines einzelnen Sternes, sondern die Durchgänge mehrerer Sterne in verschiedenen Zenitdistanzen, so ist es zur Ermittlung des Instrumentenazimutes nicht nötig, daß man sowohl die Uhrkorrektion als die Polhöhe des Beobachtungsortes kennt wie bei der indirekten Methode; die eine dieser beiden Größen kann immer aus den beobachteten Durchgangszeiten neben dem Azimut berechnet werden, wenn die andere bekannt ist. Wir beantworten zunächst die Frage, wann das eine oder andere der beiden möglichen direkten Verfahren von fehlertheoretischen Gesichtspunkten aus zu wählen sei.

2. *Die mittleren Fehler des Azimutes in den direkten Methoden.* Im Differentialausdruck (12a) des Kotangentensatzes führen wir zur Abkürzung ein

$$dt = dU + du - d\alpha,$$
$$df = \cos q \sin p\, dU,$$
$$df^* = \cos q \sin p\, d\alpha + \sin q\, dp$$

und unterscheiden die beiden Sterne durch die Indizes 1 und 2; das Azimut des Sternes 1 sei a^*, das des Sternes 2 $a^* + 180^0$. Man hat dann von den Beziehungen

$$\left.\begin{aligned} \sin z_1\, da^* &= df_1 - df_1^* + \cos q_1 \sin p_1\, du + \cos z_1 \sin a^*\, d\Phi, \\ \sin z_2\, da^* &= df_2 - df_2^* + \cos q_2 \sin p_2\, du - \cos z_2 \sin a^*\, d\Phi \end{aligned}\right\} \quad (56)$$

auszugehen und je nachdem, ob man die Polhöhe oder die Uhrkorrektion als bekannt voraussetzt, du oder $d\Phi$ zu eliminieren. Die resultierende Beziehung kann man in eine einfache Form bringen unter Benützung der Gleichungen

$$\begin{aligned} \sin p_1 \cos q_1 &= \cos \Phi \sin z_1 + \sin \Phi \cos z_1 \cos a^*, \\ \sin p_2 \cos q_2 &= \cos \Phi \sin z_2 - \sin \Phi \cos z_2 \cos a^*; \end{aligned}$$

sie führen zu folgenden Beziehungen:

$$\begin{aligned} \sin z_2 \sin p_1 \cos q_1 - \sin z_1 \sin p_2 \cos q_2 &= \sin \Phi \sin (z_1 + z_2) \cos a^*, \\ \cos z_2 \sin p_1 \cos q_1 + \cos z_1 \sin p_2 \cos q_2 &= \cos \Phi \sin (z_1 + z_2). \end{aligned}$$

A. *Elimination von du.* Die Elimination von du führt zu der Beziehung:

$$\begin{aligned} \sin \Phi \cos a^* \sin (z_1 + z_2)\, da^* = &- (df_1 - df_1^*) \cos q_2 \sin p_2 \\ &+ (df_2 - df_2^*) \cos q_1 \sin p_1 \\ &- d\Phi \cos \Phi \sin a^* \sin (z_1 + z_2). \end{aligned}$$

Es ist hieraus ersichtlich, daß die Fehler df und df^* den kleinsten Einfluß auf das Azimut ausüben, wenn man die Sterne so auswählt, daß sie im Abstand

$$z_1 + z_2 = 90^0$$

durch den Vertikal gehen. Wir gehen unter dieser Annahme von den wahren Fehlern, mit welchen wir die Verbesserungen identifizieren, zu den mittleren Fehlern über. Es entspreche

$$\begin{array}{llll} \text{dem wahren Fehler} & df_i & \text{der mittlere Fehler} & \left.\begin{array}{l} m_i \\ m_i^* \end{array}\right\} \quad (i = 1, 2) \\ & df_i^* & & \\ & d\Phi & & m_\Phi, \\ & da^* & & m_a; \end{array}$$

dann wird

$$\begin{aligned} \sin^2 \Phi \cos^2 a^*\, m_a^2 = &(m_1^2 + m_1^{*2}) \cos^2 q_2 \sin^2 p_2 \\ &+ (m_2^2 + m_2^{*2}) \cos^2 q_1 \sin^2 p_1 \\ &+ m_\Phi^2 \cos^2 \Phi \sin^2 a^*. \end{aligned}$$

Hierin sind m_i und m_i^* $(i = 1, 2)$ auf die mittleren Fehler der darin enthaltenen Komponenten zurückzuführen. Ist der Stern 1 an n_1, der Stern 2 an n_2 Fäden oder Kontakten beobachtet, so wird

$$\begin{aligned} m_1^2 &= \frac{1}{n_1} m_{U_1}^2 \cos^2 q_1 \sin^2 p_1 = \frac{1}{n_1} \left(a_0^2 \cos^2 q_1 \sin^2 p_1 + \frac{b_0^2}{V^2} \right), \\ m_2^2 &= \frac{1}{n_2} m_{U_2}^2 \cos^2 q_2 \sin^2 p_2 = \frac{1}{n_2} \left(a_0^2 \cos^2 q_2 \sin^2 p_2 + \frac{b_0^2}{V^2} \right). \end{aligned}$$

Wir nehmen an, der Beobachter habe die Durchgänge an soviel Fäden oder Kontakten beobachtet, daß

$$m_1^2 = m_2^2 \equiv m_0^2$$

wird. Ferner wird, da

$$m_\alpha \sin p = m_p \equiv m^*$$

ist:

$$m_1^{*2} = m_2^{*2} \equiv m^{*2}.$$

Berücksichtigt man noch, daß wegen $z_1 + z_2 = 90^0$

$$\cos^2 q_1 \sin^2 p_1 + \cos^2 q_2 \sin^2 p_2 = \cos^2 \Phi + \sin^2 \Phi \cos^2 a^*$$

wird, so erhält man

$$m_a^2 = (m_0^2 + m^{*2})\,(1 + \operatorname{cotg}^2 \Phi \sec^2 a^*) + m_\Phi^2 \operatorname{cotg}^2 \Phi \operatorname{tg}^2 a^*. \tag{A}$$

Läßt man $a^* = 0$ werden, das heißt beobachtet man im Meridian, so wird

$$m_a^2 = (m_0^2 + m^{*2}) \operatorname{cosec}^2 \Phi$$

in Übereinstimmung mit dem mittleren Fehler des Azimutes in der Meridianzeitbestimmung.

Stellt man die Forderung, daß der von m_Φ herrührende Beitrag zum Gesamtfehler m_a nicht mehr als $\pm 0\overset{''}{.}05$ betrage, so darf das Azimut, absolut genommen, den Wert $|\, a_0^*, |$ der durch die Bedingung

$$\operatorname{tg} |\, a_0^* | = \frac{0\overset{''}{.}05}{m_\Phi} \operatorname{tg} \Phi$$

bestimmt ist, nicht übersteigen. In mittleren Breiten wird mit $\operatorname{tg} \Phi = 1$

$$\begin{aligned} a_0^* &= \pm 45^0, \text{ wenn } m_\Phi = \pm 0\overset{''}{.}05,\\ &= \pm 27^0, \qquad\qquad\quad \pm 0,10,\\ &= \pm 14^0, \qquad\qquad\quad \pm 0,20. \end{aligned}$$

B. *Elimination von $d\Phi$.* Die Elimination von $d\Phi$ aus den Beziehungen (56) führt zu

$$\sin (z_1 + z_2)\, da = + (df_1 - df_1^*) \cos z_2 + (df_2 - df_2^*) \cos z_1 + du \cos \Phi \sin (z_1 + z_2).$$

Wählt man wieder die Sterne so aus, daß sie im Abstand $z_1 + z_2 = 90^0$ durch den Vertikal gehen und beobachtet sie an soviel Fäden oder Kontakten, daß die df_1 und df_2 entsprechenden mittleren Fehler m_1 und m_2 gleich groß und gleich m_0 werden, so erhält man den folgenden Ausdruck, der den mittleren Fehler m_a mit den mittleren Fehlern m_0 und m^* sowie m_u verbindet:

$$m_a^2 = (m_0^2 + m^{*2}) + m_u^2 \cos^2 \Phi. \tag{B}$$

Es ist bemerkenswert, daß in diesem Fall sich das Azimut jeder Richtung mit der gleichen Genauigkeit bestimmen läßt.

Vergleichung der beiden direkten Methoden

Bei der Methode A tritt neben dem Instrumentenazimut die Uhrkorrektion und bei der Methode B die Polhöhe als Unbekannte auf. Die bei der Methode B erforderliche Kenntnis der Uhrkorrektion muß man sich an jedem Beobachtungstag durch besondere Beobachtungen verschaffen. Liegt das zu bestimmende Azimut in der Nähe von 90^0 oder 270^0, so kann nur die Methode B verwendet werden. Entfernt sich der Vertikal von der Ost-West-Richtung, so kommt man zu einer Grenze, von welcher an es vorteilhafter ist, die Methode A zu verwenden. Da man bei der Methode B außer den Beobachtungen zur Azimutbestimmung auch Beobachtungen zur Zeitbestimmung ausführen muß, ist die Entscheidung, von welchem Azimutwert an die eine oder andere Methode vorzuziehen sei, von der Antwort auf die Frage abhängig zu machen: Welches Verfahren führt innerhalb einer gegebenen Zeit zur genaueren Kenntnis des Azimutes?

Um diese Frage zu beantworten, nehmen wir an, daß der Beobachter bei der Methode B seine Zeit gleichmäßig auf die zur Azimut- und zur Zeitbestimmung erforderlichen Beobachtungen verteilt. Zu einer vollständigen Zeitbestimmung muß er die Durchgänge zweier Sterne durch denselben Vertikal oder denselben Almukantarat beobachten; dazu braucht er ungefähr gleichviel Zeit wie zur Beobachtung der beiden Sterne, die der Azimutbestimmung dienen sollen. Benützt der Beobachter zur Zeitbestimmung die Zingersche Methode oder beobachtet er den Durchgang zweier zenitnaher Sterne durch den Meridian, so wird der mittlere Fehler m_u der Uhrkorrektion gegeben durch den Ausdruck:

$$m_u^2 = \frac{1}{2}\,(m_0^2 + m^{*2})\,\mathrm{cosec}^2\,\Phi;$$

es wird also

$$m_u^2 \cos^2 \Phi = \frac{1}{2}\,(m_0^2 + m^{*2})\,\mathrm{cotg}^2\,\Phi.$$

Diesen Wert führen wir in

$$m_a^2 = (m_0^2 + m^{*2}) + m_u^2 \cos^2 \Phi$$

ein, indem wir annehmen, daß man in beiden Beziehungen dem Fehleraggregat $(m_0^2 + m^{*2})$ denselben Wert beilegen dürfe; es wird dann

$$m_a^2 = (m_0^2 + m^{*2})\left(1 + \frac{1}{2}\,\mathrm{cotg}^2\,\Phi\right).$$

Der Beobachter, der das Verfahren A benützt, erhält in derselben Zeit die Durchgänge von zwei Azimutsternpaaren, wenn die Polhöhe als bekannt angenommen wird, so daß er zu deren Bestimmung keine Zeit aufwenden muß; in diesem Fall wird der mittlere Fehler des Azimutes gegeben durch den Ausdruck

$$m_a^2 = \frac{1}{2}\,(m_0^2 + m^{*2})\,(1 + \mathrm{cotg}^2\,\Phi\,\sec^2 a^*) + m_\Phi^2\,\mathrm{cotg}^2\,\Phi\,\mathrm{tg}^2\,a^*,$$

in welchem dem von m_Φ abhängigen Fehlerbetrag nicht der Faktor $\frac{1}{2}$, sondern der Faktor 1 zu geben ist, weil der wahre Fehler $d\Phi$ als konstanter Fehler das aus den beiden Sternpaaren abgeleitete Azimut beeinflußt.

Setzt man die beiden Ausdrücke von m_a^2 einander gleich, so erhält man mit der Abkürzung

$$M = \frac{m_\Phi^2}{m_0^2 + m^{*2}}$$

die Beziehung

$$\frac{1}{2}\,(1 + \operatorname{cotg}^2 \Phi \sec^2 a^*) + M \operatorname{cotg}^2 \Phi \operatorname{tg}^2 a^* = 1 + \frac{1}{2} \operatorname{cotg}^2 \Phi .$$

Der Wert $a = a_0$, der diese Beziehung erfüllt, folgt aus

$$\operatorname{tg}^2 a_0 = \frac{\operatorname{tg}^2 \Phi}{1 + 2\,M} .$$

In der folgenden Tabelle sind die Werte angegeben, die a_0 annimmt in verschiedenen Polhöhen $\varphi = 90^0 - \Phi$, wenn man M die Werte 0, $\frac{1}{2}$, 1 und 2 beilegt.

φ	$M = 0$	$M = \frac{1}{2}$	$M = 1$	$M = 2$
0^0	90^0	90^0	90^0	90^0
15	75	69	65	59
30	60	51	45	38
45	45	35	30	24
60	30	22	18	14
75	15	11	9	7
90	0	0	0	0

Man wird, wenn eine gute Polhöhenbestimmung der Station vorliegt, das Verhältnis von m_Φ^2 zu $(m_0^2 + m^{*2})$ kaum größer als 1 ansetzen müssen. Die Tabelle läßt dann erkennen, daß man in mittleren Breiten bis zu einem Absolutwert $a_0 = 30^0$ bis 35^0 die Methode A anwenden darf, ohne befürchten zu müssen, an Genauigkeit gegenüber der in jedem Azimut verwendbaren Methode B in erheblichem Maß zu verlieren.

3. *Vergleichung der indirekten Methode der Azimutbestimmung mit den direkten Methoden.* Mißt man den Horizontalwinkel zwischen dem Polarstern und einem irdischen Objekt, so stellt man den Polarstern am Mittelfaden ein; das hat zur Folge, daß man zur Elimination des Einflusses der Kollimation zwei Messungen hintereinander in zwei um 180^0 verschiedenen Lagen des Instrumentes machen muß. Sind dU_1' und dU_2'' die Fehler der Uhrzeiten der beiden Messungen, so ist der von diesen Fehlern herrührende Beitrag im arithmetischen Mittel der beiden Azimutwerte gleich

$$df_1 = \cos q \sin p \,\frac{dU_1' + dU_1''}{2} .$$