V. KAPITEL

Die Bestimmung des Azimutes eines irdischen Objektes

1. *Allgemeine Bemerkungen*. In astronomisch-geodätischen Untersuchungen ist die genaue Kenntnis des Azimutes eines irdischen Objektes von besonderer Wichtigkeit. Das Verfahren, das bisher am häufigsten zur Azimutbestimmung verwendet worden ist, besteht darin, daß man den Horizontalwinkel zwischen der Richtung nach dem Polarstern und der Objektrichtung mit einem Universalinstrument mißt und das Azimut des Polarsternes aus der Sternzeit, zu welcher er eingestellt worden ist, in Verbindung mit seinem scheinbaren Ort ermittelt. Dieses Verfahren kann man als *indirekte Methode der Azimutbestimmung* bezeichnen und ihm als *direkte Methode* das Verfahren gegenüberstellen, das den Vertikal des Instrumentes, in welchem man den Durchgang eines Gestirnes beobachtet, sehr nahe zusammenfallen läßt mit dem Objektvertikal; es fällt dann eine eigentliche Winkelmessung weg; eine kleine Abweichung des Instrumentenvertikals vom Objektvertikal kann durch mikrometrische Messung überbrückt werden[7].)

Beobachtet man nicht nur den Durchgang eines einzelnen Sternes, sondern die Durchgänge mehrerer Sterne in verschiedenen Zenitdistanzen, so ist es zur Ermittlung des Instrumentenazimutes nicht nötig, daß man sowohl die Uhrkorrektion als die Polhöhe des Beobachtungsortes kennt wie bei der indirekten Methode; die eine dieser beiden Größen kann immer aus den beobachteten Durchgangszeiten neben dem Azimut berechnet werden, wenn die andere bekannt ist. Wir beantworten zunächst die Frage, wann das eine oder andere der beiden möglichen direkten Verfahren von fehlertheoretischen Gesichtspunkten aus zu wählen sei.

2. *Die mittleren Fehler des Azimutes in den direkten Methoden*. Im Differentialausdruck (12a) des Kotangentensatzes führen wir zur Abkürzung ein

$$\begin{aligned} dt &= dU + du - d\alpha, \\ df &= \cos q \sin p \, dU, \\ df^* &= \cos q \sin p \, d\alpha + \sin q \, dp \end{aligned}$$

und unterscheiden die beiden Sterne durch die Indizes 1 und 2; das Azimut des Sternes 1 sei a^*, das des Sternes 2 $a^* + 180^0$. Man hat dann von den Beziehungen

$$\left.\begin{aligned} \sin z_1\, da^* &= df_1 - df_1^* + \cos q_1 \sin p_1\, du + \cos z_1 \sin a^*\, d\Phi, \\ \sin z_2\, da^* &= df_2 - df_2^* + \cos q_2 \sin p_2\, du - \cos z_2 \sin a^*\, d\Phi \end{aligned}\right\} \quad (56)$$

auszugehen und je nachdem, ob man die Polhöhe oder die Uhrkorrektion als bekannt voraussetzt, du oder $d\Phi$ zu eliminieren. Die resultierende Beziehung kann man in eine einfache Form bringen unter Benützung der Gleichungen

$$\begin{aligned} \sin p_1 \cos q_1 &= \cos \Phi \sin z_1 + \sin \Phi \cos z_1 \cos a^*, \\ \sin p_2 \cos q_2 &= \cos \Phi \sin z_2 - \sin \Phi \cos z_2 \cos a^*; \end{aligned}$$

sie führen zu folgenden Beziehungen:

$$\begin{aligned} \sin z_2 \sin p_1 \cos q_1 - \sin z_1 \sin p_2 \cos q_2 &= \sin \Phi \sin (z_1 + z_2) \cos a^*, \\ \cos z_2 \sin p_1 \cos q_1 + \cos z_1 \sin p_2 \cos q_2 &= \cos \Phi \sin (z_1 + z_2). \end{aligned}$$

A. *Elimination von du.* Die Elimination von du führt zu der Beziehung:

$$\begin{aligned} \sin \Phi \cos a^* \sin (z_1 + z_2)\, da^* = &- (df_1 - df_1^*) \cos q_2 \sin p_2 \\ &+ (df_2 - df_2^*) \cos q_1 \sin p_1 \\ &- d\Phi \cos \Phi \sin a^* \sin (z_1 + z_2). \end{aligned}$$

Es ist hieraus ersichtlich, daß die Fehler df und df^* den kleinsten Einfluß auf das Azimut ausüben, wenn man die Sterne so auswählt, daß sie im Abstand

$$z_1 + z_2 = 90^0$$

durch den Vertikal gehen. Wir gehen unter dieser Annahme von den wahren Fehlern, mit welchen wir die Verbesserungen identifizieren, zu den mittleren Fehlern über. Es entspreche

$$\begin{array}{llll} \text{dem wahren Fehler} & df_i & \text{der mittlere Fehler} & \left.\begin{array}{l} m_i \\ m_i^* \end{array}\right\} \quad (i = 1, 2) \\ & df_i^* & & \\ & d\Phi & & m_\Phi, \\ & da^* & & m_a; \end{array}$$

dann wird

$$\begin{aligned} \sin^2 \Phi \cos^2 a^*\, m_a^2 = &(m_1^2 + m_1^{*2}) \cos^2 q_2 \sin^2 p_2 \\ &+ (m_2^2 + m_2^{*2}) \cos^2 q_1 \sin^2 p_1 \\ &+ m_\Phi^2 \cos^2 \Phi \sin^2 a^*. \end{aligned}$$

Hierin sind m_i und m_i^* $(i = 1, 2)$ auf die mittleren Fehler der darin enthaltenen Komponenten zurückzuführen. Ist der Stern 1 an n_1, der Stern 2 an n_2 Fäden oder Kontakten beobachtet, so wird

$$\begin{aligned} m_1^2 &= \frac{1}{n_1} m_{U_1}^2 \cos^2 q_1 \sin^2 p_1 = \frac{1}{n_1} \left(a_0^2 \cos^2 q_1 \sin^2 p_1 + \frac{b_0^2}{V^2} \right), \\ m_2^2 &= \frac{1}{n_2} m_{U_2}^2 \cos^2 q_2 \sin^2 p_2 = \frac{1}{n_2} \left(a_0^2 \cos^2 q_2 \sin^2 p_2 + \frac{b_0^2}{V^2} \right). \end{aligned}$$

Wir nehmen an, der Beobachter habe die Durchgänge an soviel Fäden oder Kontakten beobachtet, daß

$$m_1^2 = m_2^2 \equiv m_0^2$$

wird. Ferner wird, da

$$m_\alpha \sin p = m_p \equiv m^*$$

ist:

$$m_1^{*2} = m_2^{*2} \equiv m^{*2}.$$

Berücksichtigt man noch, daß wegen $z_1 + z_2 = 90^0$

$$\cos^2 q_1 \sin^2 p_1 + \cos^2 q_2 \sin^2 p_2 = \cos^2 \Phi + \sin^2 \Phi \cos^2 a^*$$

wird, so erhält man

$$m_a^2 = (m_0^2 + m^{*2})\,(1 + \operatorname{cotg}^2 \Phi \sec^2 a^*) + m_\Phi^2 \operatorname{cotg}^2 \Phi \operatorname{tg}^2 a^*. \qquad \text{(A)}$$

Läßt man $a^* = 0$ werden, das heißt beobachtet man im Meridian, so wird

$$m_a^2 = (m_0^2 + m^{*2}) \operatorname{cosec}^2 \Phi$$

in Übereinstimmung mit dem mittleren Fehler des Azimutes in der Meridianzeitbestimmung.

Stellt man die Forderung, daß der von m_Φ herrührende Beitrag zum Gesamtfehler m_a nicht mehr als $\pm 0\overset{''}{.}05$ betrage, so darf das Azimut, absolut genommen, den Wert $|\,a_0^*,|$ der durch die Bedingung

$$\operatorname{tg} |\,a_0^*| = \frac{0\overset{''}{.}05}{m_\Phi} \operatorname{tg} \Phi$$

bestimmt ist, nicht übersteigen. In mittleren Breiten wird mit $\operatorname{tg} \Phi = 1$

$$\begin{aligned} a_0^* &= \pm 45^0, \text{ wenn } m_\Phi = \pm 0\overset{''}{.}05, \\ &= \pm 27^0, \qquad\qquad\quad \pm 0{,}10, \\ &= \pm 14^0, \qquad\qquad\quad \pm 0{,}20. \end{aligned}$$

B. *Elimination von $d\Phi$.* Die Elimination von $d\Phi$ aus den Beziehungen (56) führt zu

$$\sin(z_1 + z_2)\, da = +\,(df_1 - df_1^*) \cos z_2 + (df_2 - df_2^*) \cos z_1 + du \cos \Phi \sin(z_1 + z_2).$$

Wählt man wieder die Sterne so aus, daß sie im Abstand $z_1 + z_2 = 90^0$ durch den Vertikal gehen und beobachtet sie an soviel Fäden oder Kontakten, daß die df_1 und df_2 entsprechenden mittleren Fehler m_1 und m_2 gleich groß und gleich m_0 werden, so erhält man den folgenden Ausdruck, der den mittleren Fehler m_a mit den mittleren Fehlern m_0 und m^* sowie m_u verbindet:

$$m_a^2 = (m_0^2 + m^{*2}) + m_u^2 \cos^2 \Phi. \qquad \text{(B)}$$

Es ist bemerkenswert, daß in diesem Fall sich das Azimut jeder Richtung mit der gleichen Genauigkeit bestimmen läßt.

Vergleichung der beiden direkten Methoden

Bei der Methode A tritt neben dem Instrumentenazimut die Uhrkorrektion und bei der Methode B die Polhöhe als Unbekannte auf. Die bei der Methode B erforderliche Kenntnis der Uhrkorrektion muß man sich an jedem Beobachtungstag durch besondere Beobachtungen verschaffen. Liegt das zu bestimmende Azimut in der Nähe von 90^0 oder 270^0, so kann nur die Methode B verwendet werden. Entfernt sich der Vertikal von der Ost-West-Richtung, so kommt man zu einer Grenze, von welcher an es vorteilhafter ist, die Methode A zu verwenden. Da man bei der Methode B außer den Beobachtungen zur Azimutbestimmung auch Beobachtungen zur Zeitbestimmung ausführen muß, ist die Entscheidung, von welchem Azimutwert an die eine oder andere Methode vorzuziehen sei, von der Antwort auf die Frage abhängig zu machen: Welches Verfahren führt innerhalb einer gegebenen Zeit zur genaueren Kenntnis des Azimutes?

Um diese Frage zu beantworten, nehmen wir an, daß der Beobachter bei der Methode B seine Zeit gleichmäßig auf die zur Azimut- und zur Zeitbestimmung erforderlichen Beobachtungen verteilt. Zu einer vollständigen Zeitbestimmung muß er die Durchgänge zweier Sterne durch denselben Vertikal oder denselben Almukantarat beobachten; dazu braucht er ungefähr gleichviel Zeit wie zur Beobachtung der beiden Sterne, die der Azimutbestimmung dienen sollen. Benützt der Beobachter zur Zeitbestimmung die Zingersche Methode oder beobachtet er den Durchgang zweier zenitnaher Sterne durch den Meridian, so wird der mittlere Fehler m_u der Uhrkorrektion gegeben durch den Ausdruck:

$$m_u^2 = \frac{1}{2}\,(m_0^2 + m^{*2})\,\operatorname{cosec}^2 \Phi;$$

es wird also

$$m_u^2 \cos^2 \Phi = \frac{1}{2}\,(m_0^2 + m^{*2})\,\operatorname{cotg}^2 \Phi.$$

Diesen Wert führen wir in

$$m_a^2 = (m_0^2 + m^{*2}) + m_u^2 \cos^2 \Phi$$

ein, indem wir annehmen, daß man in beiden Beziehungen dem Fehleraggregat $(m_0^2 + m^{*2})$ denselben Wert beilegen dürfe; es wird dann

$$m_a^2 = (m_0^2 + m^{*2})\left(1 + \frac{1}{2}\operatorname{cotg}^2 \Phi\right).$$

Der Beobachter, der das Verfahren A benützt, erhält in derselben Zeit die Durchgänge von zwei Azimutsternpaaren, wenn die Polhöhe als bekannt angenommen wird, so daß er zu deren Bestimmung keine Zeit aufwenden muß; in diesem Fall wird der mittlere Fehler des Azimutes gegeben durch den Ausdruck

$$m_a^2 = \frac{1}{2}\,(m_0^2 + m^{*2})\,(1 + \operatorname{cotg}^2 \Phi \sec^2 a^*) + m_\Phi^2 \operatorname{cotg}^2 \Phi \operatorname{tg}^2 a^*,$$

in welchem dem von m_Φ abhängigen Fehlerbetrag nicht der Faktor $\frac{1}{2}$, sondern der Faktor 1 zu geben ist, weil der wahre Fehler $d\Phi$ als konstanter Fehler das aus den beiden Sternpaaren abgeleitete Azimut beeinflußt.

Setzt man die beiden Ausdrücke von m_a^2 einander gleich, so erhält man mit der Abkürzung

$$M = \frac{m_\Phi^2}{m_0^2 + m^{*2}}$$

die Beziehung

$$\frac{1}{2}\,(1 + \operatorname{cotg}^2 \Phi \sec^2 a^*) + M \operatorname{cotg}^2 \Phi \operatorname{tg}^2 a^* = 1 + \frac{1}{2} \operatorname{cotg}^2 \Phi .$$

Der Wert $a = a_0$, der diese Beziehung erfüllt, folgt aus

$$\operatorname{tg}^2 a_0 = \frac{\operatorname{tg}^2 \Phi}{1 + 2\,M}\,.$$

In der folgenden Tabelle sind die Werte angegeben, die a_0 annimmt in verschiedenen Polhöhen $\varphi = 90^0 - \Phi$, wenn man M die Werte 0, $\frac{1}{2}$, 1 und 2 beilegt.

φ	$M = 0$	$M = \frac{1}{2}$	$M = 1$	$M = 2$
0^0	90^0	90^0	90^0	90^0
15	75	69	65	59
30	60	51	45	38
45	45	35	30	24
60	30	22	18	14
75	15	11	9	7
90	0	0	0	0

Man wird, wenn eine gute Polhöhenbestimmung der Station vorliegt, das Verhältnis von m_Φ^2 zu $(m_0^2 + m^{*2})$ kaum größer als 1 ansetzen müssen. Die Tabelle läßt dann erkennen, daß man in mittleren Breiten bis zu einem Absolutwert $a_0 = 30^0$ bis 35^0 die Methode A anwenden darf, ohne befürchten zu müssen, an Genauigkeit gegenüber der in jedem Azimut verwendbaren Methode B in erheblichem Maß zu verlieren.

3. *Vergleichung der indirekten Methode der Azimutbestimmung mit den direkten Methoden.* Mißt man den Horizontalwinkel zwischen dem Polarstern und einem irdischen Objekt, so stellt man den Polarstern am Mittelfaden ein; das hat zur Folge, daß man zur Elimination des Einflusses der Kollimation zwei Messungen hintereinander in zwei um 180^0 verschiedenen Lagen des Instrumentes machen muß. Sind dU_1' und dU_2'' die Fehler der Uhrzeiten der beiden Messungen, so ist der von diesen Fehlern herrührende Beitrag im arithmetischen Mittel der beiden Azimutwerte gleich

$$df_1 = \cos q \sin p \,\frac{dU_1' + dU_1''}{2}\,.$$

Einer jeden solchen Doppelmessung ordnen wir eine zweite zu, die der Beobachter 12^h später vornimmt, zur Zeit, da sich der Polarstern an der diametralen Stelle seiner Bahn befindet. Da sich die parallaktischen Winkel an diametralen Stellen der Bahn nahe um 180^0 unterscheiden, ist jetzt ein Betrag df_2 in Rechnung zu stellen, der gleich

$$df_2 = -\cos q \sin p \frac{dU_2' + dU_2''}{2}$$

ist. Im Mittel aus zwei solchen Doppelmessungen hebt sich der Einfluß der Unsicherheit des Polarisortes, da

$$df_1^* = \cos q \sin p \, d\alpha + \sin q \, dp = -df_2^*$$

ist, wie auch der Einfluß des Fehlers $d\Phi$, weil in zwei zum Meridian symmetrischen Azimutrichtungen $\sin a_1^*$ gleich $-\sin a_2^*$ ist. Der Fehler der Uhrkorrektion geht mit dem Betrag $\frac{1}{2}(du_1 - du_2)$ in das Mittel von zwei solchen Doppelmessungen ein.

Ist nun $d\bar{a}$ die Verbesserung, die am Mittel der vier Einzelwerte des Azimutes, die aus zwei solchen Doppelmessungen hervorgehen, wegen der Fehler dU und du anzubringen ist, und führt man an Stelle der einzelnen Zenitdistanzen den Mittelwert Φ ein, so erhält man die Beziehung

$$\sin \Phi \, d\bar{a} = \cos q \sin p \left(\frac{dU_1' + dU_1'' - dU_2 - dU_2''}{4} + \frac{du_1 - du_2}{2} \right).$$

Die Fehler du dürfen als klein gegenüber den Fehlern dU angenommen werden, wenn gute Zeitbestimmungen neben den Azimutbestimmungen gemacht werden und wenn man nicht mit starken Gangschwankungen der Beobachtungsuhr rechnen muß. Wir vernachlässigen die von den Fehlern der Uhrkorrektion abhängigen Glieder. Geht man nun zu den mittleren Fehlern über, so erhält man den Ausdruck:

$$m_{\bar{a}}^2 = \cos^2 q \sin^2 p \cdot \frac{m_U^2}{4} \operatorname{cosec}^2 \Phi.$$

Hierin führen wir ein

$$\cos^2 q \sin^2 p \cdot m_U^2 = a_0^2 \cos^2 q \sin^2 p + \frac{b_0^2}{V^2}.$$

Da a_0 und b_0/V von gleicher Größenordnung sind, ist das erste Glied rechter Hand wegen des Faktors $\sin^2 p$ immer klein gegenüber dem zweiten, so daß es genügt, zu setzen:

$$m_{\bar{a}}^2 = \frac{1}{4} \frac{b_0^2}{V^2} \operatorname{cosec}^2 \Phi + \cdots. \tag{57}$$

Diesen mittleren Fehler des Azimutes der indirekten Methode vergleichen wir mit dem mittleren Fehler des Azimutes, das nach dem direkten Verfahren B ermittelt wird. Zu jeder Polariseinstellung gehört beim indirekten Verfahren eine Messung des Winkels Polaris–Objekt. Wenn man in Betracht zieht, daß neben den Beobachtungen zur Azimutbestimmung auch Beobachtungen zur Zeitbestimmung gemacht werden müssen und daß die Winkelmessungen erheblich mehr Zeit beanspruchen als der mikrometrische Anschluß des Objektvertikales beim direkten Verfahren, so wird man den Zeitbedarf, den die Durchführung von zwei Doppelmessungen der indirekten Methode erfordert, nicht kleiner ansetzen dürfen als das Zeitintervall, in dem bei der direkten Methode B ein Sternpaar einschließlich des mikrometrischen Anschlusses und ein Zeitbestimmungssternpaar beobachtet werden kann. Dann ist dem mittleren Fehler $m_{\bar{a}}$ der Beziehung (57) der folgende mittlere Fehler der direkten Methode B gegenüberzustellen:

$$m_a^2 = (m_0^2 + m^{*2}) \left(1 + \frac{1}{2} \operatorname{cotg}^2 \Phi \right).$$

Den Einfluß der Unsicherheit des Sternortes eliminiert man bei der direkten Methode dadurch, daß eine größere Zahl von verschiedenen Sternpaaren beobachtet wird. Wir nehmen diese Zahl so groß an, daß im Endmittel aller Azimutwerte kein merklicher Einfluß dieser Fehlerquelle vorhanden ist, so daß der durch die Beziehung

$$m_a^2 = m_0^2 \left(1 + \frac{1}{2} \operatorname{cotg}^2 \Phi \right)$$

gegebene mittlere Fehler des direkten Verfahrens mit dem mittleren Fehler der Beziehung (57) zu vergleichen ist. Erfahrungsgemäß darf man in der Beziehung

$$m_0^2 = \frac{1}{2n} \left(a_0^2 \cos^2 q \sin^2 p + \frac{b_0^2}{V^2} \right)$$

die Konstanten a_0 und b_0 bis zu hohen Deklinationen verwenden zur Berechnung des mittleren Fehlers der Durchgangszeit. Ob speziell die Konstante b_0 für Durchgangsbeobachtungen und Einstellungen des Polarsternes gleich groß anzunehmen ist wie bei weniger polnahem Stern, mag zweifelhaft erscheinen; doch kann die Abweichung nicht groß sein, so daß die Berücksichtigung der wahren Werte von b_0 das Resultat, zu dem die Annahme der Gleichheit führt, nicht wesentlich ändern kann. Die mittleren Fehler der Azimute, welche die beiden Methoden liefern, werden demnach gleich groß unter der folgenden Bedingung:

$$\frac{1}{4} \frac{b_0^2}{V^2} \operatorname{cosec}^2 \Phi = \frac{1}{2n} \left(a_0 \cos^2 q \sin^2 p + \frac{b_0^2}{V^2} \right) \left(1 + \frac{1}{2} \operatorname{cotg}^2 \Phi \right).$$

Da die direkte Methode B das Azimut jeder beliebigen Richtung mit der gleichen Genauigkeit zu bestimmen erlaubt, lassen wir den Instrumentenvertikal mit dem ersten Vertikal zusammenfallen. Ferner nehmen wir an, es seien die beiden Azimutsterne, die im Abstand von 90° durch den Vertikal gehen, so gewählt worden, daß sie symmetrisch zum Zenit durch den Vertikal gehen; es ist dann wegen $z = 45^0$:

$$\cos^2 q \sin^2 p = \sin^2 z \cos^2 \Phi = \frac{1}{2} \cos^2 \Phi,$$

so daß sich die obige Bedingung in der folgenden Form schreiben läßt:

$$2\,n = \frac{2\,V^2}{b_0^2} \left(\frac{1}{2}\, a_0^2 \cos^2 \Phi + \frac{b_0^2}{V^2} \right) (1 + \sin^2 \Phi)\,;$$

unter der Annahme, daß die Vergrößerung V so gewählt werde, daß

$$\frac{V a_0}{b_0} = 1$$

ist, erhält man schließlich:

$$2\,n = (2 + \cos^2 \Phi)\ (2 - \cos^2 \Phi) = 4 - \cos^4 \Phi.$$

Es wird somit $2\,n = 3$ für $\Phi = 0^0$ und $2\,n = 4$ für $\Phi = 90^0$, das heißt, beobachtet man in der direkten Azimutbestimmung B die Durchgänge der Sterne insgesamt an $2\,n$, das heißt an 3 bis 4 Fäden, so erhält man das Azimut des Instrumentenvertikales mit derselben Genauigkeit wie in der indirekten Bestimmung. Gewöhnlich beobachtet man die Durchgänge an 10 Fäden oder an 20 Kontakten. Berücksichtigt man noch, daß die Winkelmessung der indirekten Methode erheblich ungenauer ist als der mikrometrische Anschluß der direkten Methode, so wird die Überlegenheit der direkten Methode über die indirekte offensichtlich.

Daß auch die Methode A der direkten Bestimmung innerhalb des Azimutbereiches, in dem sie angewendet werden kann, der indirekten Bestimmung überlegen ist, braucht keinen besonderen Nachweis, da die direkten Methoden A und B gleichwertig sind.

Werden die Sterndurchgänge durch die Fäden eines Netzes mit einem Handtaster auf dem Chronographen registriert, so kann der Beobachter die in Zenitdistanz erforderliche Nachführung des Fernrohres selbst übernehmen, da er eine Hand frei hat. Wird das unpersönliche Mikrometer zur Beobachtung der Durchgänge benützt, so ist es in größerer Entfernung vom Meridian notwendig, das Fernrohr dem Stern automatisch nachfolgen zu lassen, wozu die Seite 29/30 beschriebene Vorrichtung dienen kann.

4. *Die Reduktionsformeln der direkten Methode.* Wir betrachten den Fall, daß die Uhrzeit U_1 des Durchganges des Südsternes und die Uhrzeit U_2 des Durchganges des Nordsternes durch den Instrumentenvertikal bekannt sei; diese Zeiten sind aus den Faden- oder Kontaktbeobachtungen mit Hilfe der Beziehungen (6) und (9) abzuleiten. Den Fall, daß der Nordstern in der Nähe der größten Digression beobachtet werde, können wir auf den Fall, daß die Zeit des Durchganges durch den Instrumentenvertikal gegeben sei, zurückführen.

Um den Instrumentenvertikal gegenüber dem Pol P des Äquators festzulegen, fällen wir das Lot von P auf den Vertikal und geben die Poldistanz p_0 des Fußpunktes dieses Lotes an. Ist p_0 bekannt, so ist die Aufgabe der Azimutbestimmung grundsätzlich gelöst, da jetzt die Lage des Zenites auf dem Instrumentenvertikal und damit die Lage des Meridianes durch ein rechtwinkliges Dreieck, von dem zwei Stücke bekannt sind, gegeben ist; die beiden Stücke sind p_0 und die Poldistanz Φ des Zenites im direkten Verfahren A und p_0 und der Stundenwinkel des von P aus gefällten Lotes im direkten Verfahren B.

Die Länge p_0 und die Differenz des Stundenwinkels t_0 des Lotes gegenüber dem Stundenwinkel t_1 oder t_2 lassen sich aus den gegebenen Größen in folgender Weise ermitteln. Wir setzen zur Abkürzung

$$t_1 - t_0 = t_{10},$$
$$t_2 - t_0 = t_{20}.$$

Eliminiert man aus den Beziehungen

$$\cos t_{10} = \operatorname{cotg} p_1 \operatorname{tg} p_0,$$
$$\cos t_{20} = \operatorname{cotg} p_2 \operatorname{tg} p_0,$$

$\operatorname{tg} p_0$ und setzt dann

$$t_{20} = t_{10} - (t_1 - t_2) = t_{10} - t_{12},$$

so erhält man eine Beziehung mit t_{10} als einziger Unbekannten; sie lautet

$$\operatorname{cotg} t_{10} = \frac{\operatorname{cotg} p_1 \operatorname{tg} p_2 \sin t_{12}}{1 - \operatorname{cotg} p_1 \operatorname{tg} p_2 \cos t_{12}}. \tag{58}$$

Es folgt dann p_0 aus der Beziehung

$$\operatorname{tg} p_0 = \cos t_{10} \operatorname{tg} p_1 \equiv \cos t_{20} \operatorname{tg} p_2 \tag{59}$$

mit

$$t_{20} = t_{10} - t_{12}$$

und

$$t_{12} = (U_1 - U_2) - (\alpha_1 - \alpha_2).$$

Im direkten Verfahren A, wo die Polhöhe bekannt ist, führt jetzt die Beziehung

$$\sin a = \sin p_0 \operatorname{cosec} \Phi \tag{60}$$

zur Kenntnis des Azimutes a des Instrumentenvertikals. Daß man a aus der Sinusfunktion ermitteln muß, bedeutet keine Beeinträchtigung der Rechnungsgenauigkeit, da man das Verfahren A nur anwenden darf, wenn die Absolutwerte des Azimutes erheblich unterhalb 45° liegen.

Im direkten Verfahren B, wo die Uhrkorrektion bekannt ist, leitet man zuerst den Stundenwinkel t_0 ab:

$$t_0 = t_1 - t_{10} = (U_1 + u - a_1) - t_{10}$$
$$= t_2 - t_{20} = (U_2 + u - a_2) - t_{20};$$

damit erhält man den Wert der Unbekannten Φ:

$$\operatorname{tg} \Phi = \operatorname{tg} p_0 \sec t_0 \tag{61}$$

und schließlich das Azimut a aus:

$$\operatorname{tg} a = -\operatorname{cotg} t_0 \sec \Phi. \tag{62}$$

Der Einfluß der *täglichen Aberration* kann leicht nachträglich angebracht werden, so daß es nicht nötig ist, die Ephemeridenörter wegen der täglichen Aberration zu korrigieren. Setzt man in

$$\begin{aligned} df^* &= \cos q \sin p \, d\alpha + \sin q \, dp \\ \sin p \, d\alpha &= +0'',322 \sin \Phi \cos t, \\ dp &= -0,322 \sin \Phi \sin t \cos p, \end{aligned}$$

so erhält man

$$df^* = 0'',322 \sin \Phi \cos a.$$

Die am Azimut wegen der täglichen Aberration anzubringende Verbesserung δa folgt aus den Beziehungen

$$\left.\begin{aligned} \sin z_1 \, \delta a &= -0'',322 \sin \Phi \cos a + \cos q_1 \sin p_1 \, du + \cos z_1 \sin a \, d\Phi, \\ \sin z_2 \, \delta a &= +0,322 \sin \Phi \cos a + \cos q_2 \sin p_2 \, du - \cos z_2 \sin a \, d\Phi, \end{aligned}\right\} \tag{63}$$

indem man in der Methode A $d\Phi = 0$ setzt und du eliminiert, in der Methode B $du = 0$ setzt und $d\Phi$ eliminiert; a ist das Azimut des Sternes (α_1, p_1).

Die Elimination von du führt zur Beziehung

$$\delta a = +0'',322 \cos \Phi \frac{\sin z_1 + \sin z_2}{\sin (z_1 + z_2)}, \tag{64}$$

die Elimination von $d\Phi$ zur Beziehung

$$\delta a = -0'',322 \sin \Phi \cos a \frac{\cos z_1 - \cos z_2}{\sin (z_1 + z_2)}. \tag{65}$$

Beobachtung eines polnahen Sternes oder eines Sternes in der Nähe der größten Digression

Hat der im Norden beobachtete Stern eine sehr kleine Poldistanz oder befindet er sich in der Nähe der größten Digression, so stellt man den beweglichen Faden in beiden Lagen auf den Stern ein und leitet nach der Beziehung (8b), Seite 38, den zur mittleren Uhrzeit $\overline{U}$ gehörigen Abstand $\overline{f}$ des Sternes vom Achsenäquator ab. Setzt man

$$F = \overline{f} + i \cos z,$$

so ist $90^0 + F$ bis auf kleine Größen höherer Ordnung der Abstand des Ortes $\overline{S}$ zur Zeit $\overline{U}$ vom Pol Q_0 des Instrumentenvertikales; es ist also

$$-\sin F = \cos p \cos \nu + \sin p \sin \nu \cos (\mu - \overline{t}).$$

Schneidet der Deklinationskreis $P\bar{S}$ den Instrumentenvertikal im Punkte $\bar{S}'$ und setzt man $P\bar{S}' = p'$, so ist

$$0 = \cos p' \cos \nu + \sin p' \sin \nu \cos (\mu - \bar{t}).$$

Aus der Differenz dieser beiden Beziehungen erhält man mit

$$\bar{p} = \frac{1}{2}(p + p')$$

leicht:

$$2 \sin \frac{p' - p}{2} = -\sin F \,/\, \big(\cos \nu \sin \bar{p} - \sin \nu \cos \bar{p} \cos (\mu - \bar{t})\big). \qquad (66)$$

Man wird meist p auf p' umrechnen können mit Hilfe der Beziehung

$$p' - p = -F \,/\, \big(\cos \nu \sin p - \sin \nu \cos p \cos (\mu - \bar{t})\big);$$

sie läßt sich wegen der Näherungsbeziehung

$$\sin q = \cos \nu \sin p - \sin \nu \cos p \cos (\mu - \bar{t})$$

in der Form

$$p' = p - F \operatorname{cosec} q$$

schreiben. Einen ausreichend genauen Wert von q erhält man meist schon aus

$$\sin q = \sin \Phi \sin \bar{t} \operatorname{cosec} z.$$

Mit dem Wert von p' an Stelle des Wertes von p für den Nordstern darf man jetzt die abgeleiteten Reduktionsformeln zur Berechnung des Instrumentenazimutes benützen.

5. *Ermittlung der Unbekannten in den beiden direkten Verfahren durch eine Ausgleichung*. Hat man nicht nur je *einen* Stern zu beiden Seiten des Zenites beobachtet, sondern eine Reihe von Sternen, so wird man, insofern man sich auf die Konstanz des Instrumentenazimutes verlassen kann, die Unbekannten aus der Gesamtheit der Beobachtungen nach den Vorschriften der Ausgleichungsrechnung ermitteln. Um die zur Ausgleichung erforderlichen linearen Beziehungen aufzustellen, führen wir Näherungswerte der Unbekannten ein und berechnen deren Verbesserungen; wir setzen

$$u = u_0 + du,$$
$$\Phi = \Phi_0 + d\Phi$$

und berechnen die zu den Näherungswerten u_0 und Φ_0 gehörigen Azimutwerte a_i aus der Beziehung

$$\operatorname{tg} a_i = \frac{\operatorname{tg} p_i \operatorname{cosec} \Phi_0 \sin (U_i + u_0 - \alpha_i)}{l - \operatorname{tg} p_i \operatorname{cotg} \Phi_0 \cos (U_i + u_0 - \alpha_i)} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

An den Werten a_i hat man eine Verbesserung da_i anzubringen, durch die sie in die wahren Werte des Azimutes a des Instrumentenvertikales im Süden oder des Azimutes $a + 180^0$ im Norden übergeführt werden; diese Verbesserungen da_i werden durch die Beziehungen

$$\sin z_i\, da_i = -\sin q_i\, dp_i + \cos q_i \sin p_i\, d(U_i + u - \alpha_i) + \cos z_i \sin a_i\, d\Phi$$

gegeben, in welchen zu setzen ist:

$$da_i = a - a_i.$$

Führt man auch einen Näherungswert a_0 des wahren Azimutwertes a ein:

$$a = a_0 + da$$

und setzt in

$$da_i = da - (a_i - a_0)$$
$$a_i - a_0 = l_i,$$

so lauten die linearen Beziehungen, durch welche die gesuchten Verbesserungen der Unbekannten mit den fingierten Beobachtungsgrößen l_i und mit den wahren Fehlern dU_i, $d\alpha_i$ und dp_i verbunden werden:

$$\begin{aligned} \sin z_i\, da - \cos q_i \sin p_i\, du - \cos z_i \sin a_i\, d\Phi &= \\ = l_i \sin z_i + \cos q_i \sin p_i\, d(U_i - \alpha_i) &- \sin q_i\, dp_i. \end{aligned} \tag{67}$$

Setzt man hierin

$$a_i = a \quad \text{oder} \quad a_i = a + 180^0,$$

je nachdem der Stern im Süden oder im Norden beobachtet wird, und berücksichtigt die Beziehung

$$\cos q_i \sin p_i = \cos\Phi \sin z_i \pm \sin\Phi \cos z_i \cos a \quad \left\{ \begin{array}{l} *\ \text{Süd,} \\ *\ \text{Nord,} \end{array} \right.$$

so nimmt die linke Seite die Form an:

$$\begin{aligned} &\sin z_i\, da - (\cos\Phi \sin z_i \pm \sin\Phi \cos z_i \cos a)\, du \mp \cos z_i \sin a\, d\Phi \\ &\quad \equiv \sin z_i (da - \cos\Phi\, du) \mp \cos z_i (du \sin\Phi \cos a + d\Phi \sin a). \end{aligned}$$

Führt man zur Abkürzung ein:

$$\left. \begin{aligned} x &= da - du \cos\Phi, \\ y &= du \sin\Phi \cos a + d\Phi \sin a, \end{aligned} \right\} \tag{68}$$

$$\varepsilon_i \sin z_i = \cos q_i \sin p_i\, dU_i - (\cos q_i \sin p_i\, d\alpha_i + \sin q_i\, dp_i),$$

so nehmen die gesuchten linearen Beziehungen die Form an:

$$x \mp y \operatorname{cotg} z_i = l_i + \varepsilon_i \quad \left\{ \begin{array}{l} *\ \text{Süd,} \\ *\ \text{Nord,} \end{array} \right.$$

in welcher den fingierten Beobachtungsgrößen l_i die wahren Fehler ε_i zuzuschreiben sind.

Um die *Gewichte der fingierten Beobachtungsgrößen* l_i anzugeben, gehen wir von den wahren Fehlern ε_i zu den mittleren Fehlern m_i über; es ist, wenn man vom Fehler der Reduktion auf den Achsenäquator und auf den Instrumentenvertikal absieht:

$$\sin^2 z_i \cdot m_i^2 = \cos^2 q_i \sin^2 p_i \cdot m_{U_i}^2 + m^{*2},$$

also bei $2\,n_i$ Faden- oder Kontaktbeobachtungen:

$$\sin^2 z_i \cdot m_i^2 = \frac{1}{2\,n_i}\left(a_0^2 \cos^2 q_i \sin^2 p_i + \frac{b_0^2}{V^2} \right) + m^{*2}.$$

Wir nehmen an, der Beobachter habe die Zahl $2n_i$ der einzelnen Durchgangsbeobachtungen oder die Zahl der Pointierungen so gewählt, daß das erste Glied rechter Hand einen konstanten Wert annimmt; es wird dann

$$\sin^2 z_i \cdot m_i^2 = \text{constans},$$

und die Gewichte g_i, die den Quadraten der mittleren Fehler umgekehrt proportional sind, werden gleich

$$g_i = \text{constans} \cdot \sin^2 z_i .$$

Die auf gleiches Gewicht reduzierten Fehlergleichungen lauten dann mit λ_i als scheinbaren Fehlern an Stelle der wahren Fehler:

$$x \sin z_i \mp y \cos z_i = l_i \sin z_i + \lambda_i \left\{ \begin{array}{l} *\,\text{Süd}, \\ *\,\text{Nord}. \end{array} \right. \tag{69}$$

Sind x und y berechnet, so erhält man im Fall der direkten Methode A die Unbekannten aus den Beziehungen:

$$du = y \operatorname{cosec} \Phi_0 \sec a; \qquad u = u_0 + du,$$
$$da = x + du \cos \Phi; \qquad a = a_0 + da,$$

und im Fall der Methode B aus den Beziehungen:

$$da = x; \qquad a = a_0 + da,$$
$$d\Phi = y \operatorname{cosec} a; \qquad \Phi = \Phi_0 + d\Phi.$$

Der Einfluß der *täglichen Aberration* kann dadurch berücksichtigt werden, daß die fingierten Beobachtungsgrößen $l_i \sin z_i$ um den Betrag

$$-\,0\overset{''}{.}322 \sin \Phi \cos a^*$$

korrigiert werden.

Die *mittleren Fehler* des Azimutes a, der Uhrkorrektion u oder der Poldistanz Φ erhält man aus dem mittleren Fehler m der Gewichtseinheit

$$m = \sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{n-2}}$$

in folgender Weise.

Schreibt man die Fehlergleichungen (69) in der Form

$$a'x + b'y = l + \lambda \quad (\text{Gewicht } 1)$$

und die reduzierten Normalgleichungen in der Form

$$[a'a']\,x + [a'b']\,y = [a'l'] \quad \text{oder} \quad x + \alpha_2' y = \chi_1,$$
$$[b'b_1']\,y = [b'l_1'] \qquad\qquad y = \chi_2,$$

so wird der mittlere Fehler m_F einer Funktion $F = F\,(x, y)$ gegeben durch den Ausdruck

$$m_F^2 = m^2 \left(\frac{F_1^2}{[a'\,a']} + \frac{F_{21}^2}{[b'\,b_1']} \right),$$

worin

$$F_1 = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad F_2 = \frac{\partial F}{\partial y}, \quad F_{21} = F_2 - \alpha_2' F_1$$

bedeutet.

In der *direkten Methode A* ist

$$da = x + y \operatorname{cotg} \Phi \sec a, \quad F_1 = 1, \quad F_2 = \operatorname{cotg} \Phi \sec a,$$
$$du = \quad y \operatorname{cosec} \Phi \sec a, \quad F_1 = 0, \quad F_2 = \operatorname{cosec} \Phi \sec a;$$

somit wird

$$m_a^2 = m^2 \left(\frac{1}{[a'\,a']} + \frac{(\operatorname{cotg} \Phi \sec a - \alpha_2')^2}{[b'\,b_1']} \right),$$
$$m_u^2 = m^2 \,\frac{(\operatorname{cosec} \Phi \sec a)^2}{[b'\,b_1']}.$$

In der *direkten Methode B* ist

$$da = x, \qquad F_1 = 1, \quad F_2 = 0,$$
$$d\Phi = y \operatorname{cosec} a, \quad F_1 = 0, \quad F_2 = \operatorname{cosec} a;$$

somit wird

$$m_a^2 = m^2 \left(\frac{1}{[a'\,a']} + \frac{\alpha_2'^2}{[b'\,b_1']} \right),$$
$$m_\Phi^2 = m^2 \,\frac{\operatorname{cosec}^2 a}{[b'\,b_1']}.$$

Das Azimut des irdischen Objektes

Der bewegliche Vertikalfaden wird in beiden Lagen auf das Objekt eingestellt. Es seien M' und M'' die beiden Ablesungen an der Trommel vor und nach dem Umlegen; es sei $M' > M''$ und der Faden soll sich im Sinn zunehmenden Azimutes bewegen, wenn er von der Stellung der Ablesung M'' zur Stellung der Ablesung M' gebracht wird. Dann ist

$$f = \frac{1}{2}\,(M' - M'') \times \text{Revolutionswert}$$

der Abstand des Objektes vom Achsenäquator, positiv genommen im Sinn zunehmenden Azimutes. Ist Δa der Unterschied «Azimut des Objektes minus Azimut des Instrumentenvertikales» und i die mittlere Neigung der Achse, positiv, wenn das dem Objekt um 90^0 im Azimut vorangehende Achsenende über dem Horizont liegt, so besteht im Dreieck, dessen Eckpunkte dieses Achsenende, das Zenit und das Objekt bilden, die Beziehung

$$\sin f = \sin i \cos z_0 + \cos i \sin z_0 \sin \Delta a,$$

in welcher z_0 die Zenitdistanz des Objektes bedeutet. Mit $\cos i = 1$ und $\sin i = i$ wird

$$\Delta a = (f - i \cos z_0) \operatorname{cosec} z_0 .$$

Bedeutet a_V das Azimut des in der Richtung des Objektes liegenden Instrumentenvertikales, so wird das Azimut A des Objektes gleich

$$A = a_V + (f - i \cos z_0) \operatorname{cosec} z_0 .$$

6. *Die Reduktionsformeln der indirekten Methode.* Ist a^* das Azimut des Polarsternes und a_{Obj} das Azimut des Objektes, so wird

$$a_{Obj} = a^* + (a_{Obj} - a^*). \tag{70}$$

Die Differenz $(a_{Obj} - a^*)$ kann auf die Differenz der Kreisablesungen bei den Einstellungen auf das Objekt und auf den Polarstern zurückgeführt werden. Es sei a_0 das Azimut des Instrumentenvertikales bei der Einstellung auf das Objekt und a das Azimut des Instrumentenvertikales bei der Einstellung auf den Polarstern.

Sind A_{Obj} und A^* die Kreisablesungen bei den beiden Einstellungen, so ist

$$a_0 - a = \pm (A_{Obj} - A^*),$$

worin das obere oder untere Zeichen zu nehmen ist, je nachdem die Kreislesungen mit wachsendem Azimut zu- oder abnehmen.

Die Differenz $(a_{Obj} - a^*)$ läßt sich auf die Differenz $(a_0 - a)$ zurückführen mit Hilfe der Abstände F_0 und F^* des Objektes respektive des Sternes vom zugehörigen Instrumentenvertikal; es ist

$$\sin (a^* - a) = \sin F^* \operatorname{cosec} z^*,$$
$$\sin (a_{Obj} - a_0) = \sin F_0 \operatorname{cosec} z_0$$

oder

$$a^* - a = F^* \operatorname{cosec} z^* = (i^* \cos z^* \pm c) \operatorname{cosec} z^*,$$
$$a_{Obj} - a_0 = F_0 \operatorname{cosec} z_0 = (i_0 \cos z_0 \pm c) \operatorname{cosec} z_0 .$$

Hierin sind die Neigungen i^* und i_0 auf das westliche respektive linke Achsenende zu beziehen; c ist die Kollimation. Es wird also

$$a_{Obj} = a^* \pm (A_{Obj} - A^*) + (i_0 \cos z_0 \pm c) \operatorname{cosec} z_0 - (i^* \cos z^* \pm c) \operatorname{cosec} z^* . \tag{71a}$$

Das von Norden nach Osten genommene Azimut $a_N = a^* - 180^0$ des Polarsterns folgt aus der Beziehung

$$\operatorname{tg} a_N = - \frac{\operatorname{tg} p \operatorname{cosec} \Phi \sin t}{1 - \operatorname{tg} p \operatorname{cotg} \Phi \cos t} . \tag{71b}$$

Wird der scheinbare Ort nicht wegen der täglichen Aberration verbessert, so ist am Azimut des Objektes, das nach der Beziehung (71a) berechnet wird, noch die Verbesserung

$$+ 0{,}''322 \sin \Phi \operatorname{cosec} z^* \cos a_N \sim + 0{,}''322 \sin \Phi \operatorname{cosec} z^*$$

anzubringen, wie sich aus der Beziehung (63, 2), Seite 130, ergibt.

7. *Die Laplacesche Kontrollgleichung*[8]). Es sei (vergleiche Figur 18) Λ die astronomisch bestimmte Länge eines Punktes und Φ die Poldistanz seines Zenites Z. Durch eine trigonometrische Vermessung habe sich in bezug auf denselben Anfangsmeridian als geodätische Länge des Punktes der Wert Λ' und als Poldistanz des geodätischen Zenites Z' der Wert Φ' ergeben. ZO sei der Vertikal eines irdischen Objektes und a dessen Azimut. $Z'O$ bildet dann mit dem geodätischen Meridian PZ' das geodätische Azimut a'. Da durch die Triangulation die Lage des geodätischen Zenites Z' gegenüber dem astronomischen Zenit Z festgelegt ist, muß zwischen a und a' eine Beziehung bestehen; diese Beziehung, die als Laplacesche Gleichung bekannt ist, kann auf folgendem Weg abgeleitet werden.

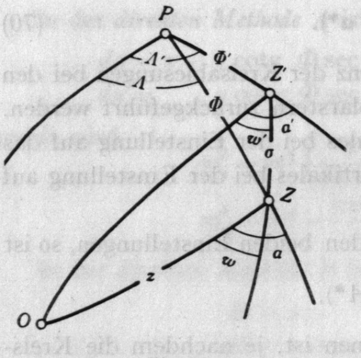

Fig. 18

Es ist

$$ZZ' = \sigma$$

die Lotablenkung des Zenites. Der Großkreis ZZ' bilde mit dem Vertikal ZO den Winkel w und mit dem geodätischen Vertikal $Z'O$ den Winkel w'. Dann gibt das Dreieck PZZ' die Beziehung:

$$\sin(\Lambda' - \Lambda) \cos \Phi = - \cos(a' - w') \sin(a - w) + \sin(a' - w') \cos(a - w) \cos \sigma,$$

oder, da σ ein kleiner Winkel ist, dessen Cosinus gleich 1 gesetzt werden darf:

$$\sin(\Lambda' - \Lambda) \cos \Phi = \sin\big((a' - a) - (w' - w)\big). \tag{72}$$

Im Dreieck OZZ' ist

$$\operatorname{cotg} z \sin \sigma = - \cos \sigma \cos w + \sin w \operatorname{cotg} w';$$

setzt man hierin $\sin \sigma = \sigma$ und $\cos \sigma = 1$, so erhält man

$$\sigma \sin w' \operatorname{cotg} z = - \sin(w' - w).$$

Ist $z = 90^0$, das heißt liegt das Objekt im Horizont, so ist $w' - w = 0$; ist z nahe gleich 90^0, so ist $w' - w$ eine kleine Größe höherer Ordnung gegenüber σ und darf in der Beziehung (72) neben $a' - a$ vernachlässigt werden. Man erhält dann, wenn die Sinus der kleinen Winkel durch ihre Argumente ersetzt werden, aus (72):

$$(\Lambda' - \Lambda) \cos \Phi = a' - a$$

oder

$$(a - \Lambda \cos \Phi) - (a' - \Lambda' \cos \Phi) = 0.$$

Das ist die gesuchte Beziehung; sie gestattet, die Lotabweichung $(\Lambda' - \Lambda)$ in Länge auf die Lotabweichung $(a' - a)$ in Azimut zurückzuführen.

Von dieser Möglichkeit macht man heute kaum mehr Gebrauch, da die direkte Bestimmung der Lotabweichung in Länge keine Schwierigkeiten bietet. Die Laplacesche Gleichung wird aber als Kontrollgleichung immer von Bedeutung sein; denn bei fehlerfreien astronomischen und geodätischen Messungen stellt sie eine Bedingungsgleichung dar, die auf jedem Triangulationspunkt, auf dem die Lotabweichungen in Länge und Azimut bestimmt worden sind, erfüllt sein muß.

Führt man die astronomische Länge Λ auf die Differenz der Sternzeiten an der Station und am Ausgangsmeridian zurück:

$$\Lambda = \Theta - \Theta_0,$$

und ersetzt die Sternzeit Θ durch die Uhrzeit U und die Uhrkorrektion u:

$$\Theta = U + u,$$

so erscheinen in der Differenz

$$a - \Lambda \cos \Phi \equiv a - (U + u - \Theta_0) \cos \Phi$$

die aus astronomischen Beobachtungen zu ermittelnden Größen a und u in der Verbindung

$$a - u \cos \Phi,$$

oder, wenn a und u auf die Näherungswerte a_0 und u_0 und deren Verbesserungen da und du zurückgeführt werden, in der Verbindung

$$x = da - du \cos \Phi.$$

Diese lineare Funktion der beiden Verbesserungen da und du tritt aber als Unbekannte auf, wenn aus den Durchgängen von 2 oder mehr Sternen die Lage eines ganz beliebigen Vertikales gegenüber dem Pol des Äquators festgelegt wird.

Sind z_1 und z_2 die Zenitdistanzen zweier Sterne, deren Durchgänge durch einen beliebigen Vertikal beobachtet worden sind, so bestehen zwischen den Unbekannten x und y und den fingierten Beobachtungsgrößen l_1 und l_2 die Beziehungen

$$x - y \operatorname{cotg} z_1 = l_1,$$
$$x \mp y \operatorname{cotg} z_2 = l_2;$$

in der zweiten Gleichung ist das obere oder untere Zeichen zu nehmen, je nachdem der zweite Stern auf derselben Seite des Zenites beobachtet worden ist wie der erste oder auf der entgegengesetzten Seite. Diese Beziehungen sagen aber aus, daß sich die Unbekannte x bestimmen läßt schon aus der Beobachtung eines *einzelnen* Sternes, wenn sein Durchgang durch den Instrumentenvertikal in der Zenitdistanz $z = 90^0$, das heißt im Horizont, entweder im Azimut a oder im Azimut $a + 180^0$ beobachtet wird.

Praktisch kommt die Wahl $z = 90^0$, wenn man Azimut und Uhrkorrektion nicht getrennt, sondern nur in der Verbindung, in der diese Größen in der Laplaceschen Gleichung vorkommen, ermitteln will, nicht in Frage wegen der großen Luftunruhe, unter der Beobachtungen im Horizont leiden. Beobachtet man in kleineren Zenitdistanzen, so wird zwar die Genauigkeit, mit der x bestimmt wird, kleiner, doch wird der Verlust an Genauigkeit zum Teil kompensiert durch die größere Sicherheit, mit der sich die Durchgänge in kleineren Zenitdistanzen beobachten lassen. Der mittlere Fehler, der in diesem Fall x zuzuschreiben ist, ergibt sich auf folgendem Weg.

Eliminiert man aus den Beziehungen

$$x \sin z_1 - y \cos z_2 = (l_1 + \varepsilon_1) \sin z_1,$$
$$x \sin z_2 + y \cos z_2 = (l_2 + \varepsilon_2) \sin z_2$$

die Unbekannte y, so erhält man den wahren Wert von x aus der Gleichung

$$x \sin (z_1 + z_2) = (l_1 + \varepsilon_1) \sin z_1 \cos z_2 + (l_2 + \varepsilon_2) \sin z_2 \cos z_1,$$

so daß der wahre Fehler ε_x von x gegeben wird durch

$$\varepsilon_x = (\varepsilon_1 \sin z_1 \cdot \cos z_2 + \varepsilon_2 \sin z_2 \cdot \cos z_1) \operatorname{cosec} (z_1 + z_2).$$

Sind m_1 und m_2 die mittleren Fehler, die den wahren Fehlern $\varepsilon_1 \sin z_1$ und $\varepsilon_2 \sin z_2$ entsprechen, so wird der mittlere Fehler m_x gleich:

$$m_x^2 = \frac{m_1{}^2 \cos^2 z_2 + m_2{}^2 \cos^2 z_1}{\sin^2 (z_1 + z_2)}. \tag{73}$$

Wir nehmen wieder an, es sei die Zahl der Faden- oder Kontaktbeobachtungen so bemessen worden, daß $m_1^2 = m_2^2 \equiv m^2$ ist; es wird dann

$$m_x^2 = m^2 \frac{\cos^2 z_1 + \cos^2 z_2}{\sin^2 (z_1 + z_2)} \tag{74a}$$

oder, wenn man statt der Zenitdistanzen die Höhen $h = 90^0 - z$ einführt:

$$m_x^2 = m^2 \frac{\sin^2 h_1 + \sin^2 h_2}{\sin^2 (h_1 + h_2)}. \tag{74b}$$

Aus der letzten Form ist ersichtlich, daß m_x^2 von den Höhen der beiden Sterne in derselben Weise abhängig ist wie m_u^2 in der Meridianzeitbestimmung von den Zenitdistanzen oder m_k^2 von den Poldistanzen oder wie m_Φ^2 bei der Bestimmung der Polhöhe aus Durchgängen durch den ersten Vertikal von den Zenitdistanzen. Im besonderen ergibt sich nun:

Den kleinsten Wert nimmt m_x an, wenn man $h_1 = h_2$ gegen Null gehen läßt; es wird dann

$$m_x^2 = \frac{1}{2} m^2;$$

man kann auch h_1 gegen Null und h_2 gegen 180° gehen lassen. Die eine oder andere Wahl kommt wegen der ungünstigen atmosphärischen Verhältnisse nicht in Betracht.

Wählt man die beiden Sterne so, daß sie im Vertikal 90° Abstand haben, so wird

$$m_x^2 = m^2.$$

Hält man h_2 fest, so nimmt

$$F(h_1, h_2) = \frac{\sin^2 h_1 + \sin^2 h_2}{\sin^2 (h_1 + h_2)}$$

einen Minimalwert an für einen Wert $h_1 = h_0$, der durch die Beziehung

$$\operatorname{tg}(h_0 + h_2) = 2 \operatorname{tg} h_2$$

gegeben wird; es ist dann

$$F(h_0, h_2) = \frac{1}{2}(1 + \sin^2 h_2).$$

Zusammengehörige Werte von h_0, h_2 und $F(h_0, h_2)$ sind:

h_2	90°	80°	70°	60°	50°	40°	35°,3	30°	20°	10°	0°
h_0	0°	5°,0	9°,7	13°,9	17°,2	19°,2	19°,5	19°,1	16°,1	9°,4	0°
$F(h_0, h_2)$	1,00	0,98	0,94	0,88	0,79	0,71	0,67	0,62	0,56	0,52	0,50

Wenn man nicht unter ungünstigen atmosphärischen Verhältnissen beobachten will, so wird man sich auf Sterne beschränken, deren Zenitdistanzen kleiner als 50° bis 60° bleiben. Der Bereich, aus dem die Sterne zu beiden Seiten des Zenites ausgewählt werden können, ist immer noch so groß, daß leicht ein gedrängtes Beobachtungsprogramm aufgestellt werden kann, ohne daß man auf Sterne greifen müßte, deren Abstand beim Durchgang durch den Vertikal erheblich unter 90° sinkt.

ERSTES ZAHLENBEISPIEL

(Direkte Azimutbestimmung nach der Methode A)

Ort: Astronomische Anstalt der Universität Basel in Binningen, Pfeiler der Passagenhütte.

Instrument: Bambergsches Passageninstrument mit unpersönlichem Mikrometer; Vergrößerung 86fach.

Beobachter: Dr. J. O. Fleckenstein.

Zeit: 30. Juni 1941.

Der Stern 9H Drac wurde in der Nähe seiner westlichen größten Digression in beiden Lagen an den Instrumentenvertikal mikrometrisch angeschlossen; unmittelbar darauf wurde der Durchgang des Sternes γ Herc mit dem unpersönlichen Mikrometer beobachtet.

Die Beobachtungsdaten sind nachstehend zusammengestellt.

9H Drac	Okular E		Okular W	
	Uhrzeit U'	Trommelablesung	Uhrzeit U''	Trommelablesung
	$15^h25^m14^s$	$2^R\!,990$	$15^h27^m42^s$	$3^R\!,970$
	25 56	,980	28 04	,978
	26 08	,968	28 18	,978
	26 20	,964	28 46	,986
Mittel	15 25 56	2,9755	15 28 12,5	6,978
Neigung der Achse: $i = -0\overset{''}{,}60$				

γ Drac	Okular W U'	Okular E U''	$\dfrac{U'+U''}{2}$	$\dfrac{U''-U'}{2}$	m''
$1^R\!,0$	$15^h37^m32\overset{s}{,}30$	$39^m04\overset{s}{,}30$	$38^m18\overset{s}{,}30$	$46\overset{s}{,}00$	$1\overset{''}{,}15$
1,1	33,30	03,18	,24	44,94	1,10
1,2	34,42	01,80	,11	43,69	1,04
1,3	35,52	39 00,62	,07	42,55	0,99
1,4	36,82	38 59,70	,26	41,44	0,93
1,5	37,82	58,42	,12	40,30	0,88
1,6	39,10	57,10	,10	39,00	0,83
1,7	40,30	56,00	,15	37,85	0,78
1,8	41,52	54,70	,11	36,59	0,73
1,9	42,60	53,60	,10	35,50	0,69
Mittel:	$\overline{U} = 15^h38^m18\overset{s}{,}156$				$\overline{m}'' = 0\overset{''}{,}912$
Neigung der Achse: $i = +0\overset{''}{,}68$					

Das genäherte Azimut des Instrumentenvertikales beträgt

$$a_0 = -20^0 50\overset{'}{,}5.$$

In Verbindung mit $\Phi = 42^0 27' 33\overset{''}{,}0$ folgen die nachstehenden Werte von μ und ν:

Stern	Achsenende im Azimut	μ	ν
9H Drac	$159^0 + 90^0$	$16^h47^m15^s$	$76^0 06\overset{'}{,}1$
γ Herc	$-21^0 + 90^0$	4 47 15	103 53,9

Der Uhrfehler beträgt angenähert

$$u = -1^m 47\overset{s}{,}7,$$

der Revolutionswert der Schraube

$$1^R = 10\overset{s}{,}540.$$

Die scheinbaren Örter ohne Korrektion wegen täglicher Aberration sind:

Stern	Rektaszension	Poldistanz	sin z	cos z
9H Drac	$10^h30^m09\overset{s}{,}99$	$13^0 59' 07\overset{''}{,}31$	0,648	0,762
γ Herc	16 19 23,287	70 42 28,68	0,494	0,869

Berechnung des Abstandes F und der Poldistanz p′ von 9H Drac

Es ist (vergleiche Formel 8a, Seite 38) in

$$\bar{f} = \tfrac{1}{2}(f' + f'') - \sin p \sin \nu \cos(\mu - \bar{t}) \cdot m''$$

zu setzen

$$p = 13^0 59{,}'1; \quad \bar{t} = \bar{U} + u - \alpha = 4^h 55^m 07^s; \quad \tfrac{1}{2}\vartheta = 68{,}^s25$$

$$\nu = 76\ 06{,}1; \quad \mu = 16\ 57\ 15\ ; \quad m'' = 2\sin^2\frac{\vartheta}{2} \,/\, \sin 1'',$$

$$\mu - \bar{t} = 12\ 02\ 08\ ; \quad = 2{,}''54.$$

In Bogensekunden ist

$$\tfrac{1}{2}(f' + f'') = 15 \cdot (6{,}9780 - 2{,}9755) \cdot 5{,}270 = 316{,}''40$$
$$= 5'16{,}''40$$

$$\sin p \sin \nu \cos(\mu - \bar{t}) = -0{,}235$$
$$\bar{f} - \tfrac{1}{2}(f' + f'') = +0{,}''60$$
$$\bar{f} = 5'17{,}''00$$
$$i \cos z = -0{,}46$$
$$F = 5'16{,}''54.$$

Da

$$\sin q = \sin \Phi \sin \bar{t} \operatorname{cosec} z = 0{,}99998$$

ist, wird genähert

$$p' - p = -F \operatorname{cosec} q = -5'16{,}''54$$

und

$$p' = 13^0 53' 50{,}''77$$
$$\bar{p} = \tfrac{1}{2}(p + p') = 13\ 56\ 29.$$

Die Berechnung nach der Beziehung (66), Seite 131, führt nun zu

$$p' - p = -5'16{,}''41,$$

so daß

$$p' = 13^0 53' 50{,}''90$$

wird.

Berechnung der Durchgangszeit von γ Herc durch den Instrumentenvertikal

In der Beziehung (9c), Seite 40:

$$t_0 - \bar{t} = -\frac{m''}{15}\operatorname{cotg}(\mu - \bar{t}) + (e b + i \cos z) \operatorname{cosec} p \sec q$$

$$\text{mit } \sec q = \operatorname{cosec} \nu \operatorname{cosec}(\mu - \bar{t})$$

ist zu setzen:

$$e = +1$$

und für b, die Summe von halber Kontaktbreite und totem Gang:

$$b = 0{,}^s047.$$

Ferner ist

$$\bar{t} = \bar{U} + u - \alpha; \qquad i = +0{,}''68 = +0{,}^s045;$$
$$= -0^h 42^m 53^s;$$

$$\mu = +4\ 57\ 15\ ; \quad \frac{1}{15}\,m'' = \frac{1}{15}\,0{,}''912 = 0{,}^s061;$$

$$\mu - \bar{t} = +5\ 40\ 08\ ;$$

$$\operatorname{cotg}(\mu - \bar{t}) = 0{,}087; \qquad \sin(\mu - \bar{t}) = 0{,}996;$$
$$\sin p = 0{,}944; \qquad \sin \nu = 0{,}971; \quad \cos z = 0{,}869.$$

Somit wird

$$\begin{aligned} -\frac{\overline{m}''}{15}\operatorname{cotg}(\mu-\overline{t}) &= \quad -\,0^s{,}005 \\ +\,(b+i\cos z)\operatorname{cosec} p \sec q &= \quad +\,0{,}094 \\ t_0-\overline{t} &= \quad +\,0{,}089 \\ \overline{U} &= 15^h38^m18{,}156 \\ U_0 &= 15\ 38\ 18{,}245 \end{aligned}$$

Berechnung des Instrumentenazimutes

In den Reduktionsformeln der Methode A:

$$\operatorname{cotg} t_{10} = \frac{\operatorname{cotg} p_1 \operatorname{tg} p_2 \sin t_{12}}{1-\operatorname{cotg} p_1 \operatorname{tg} p_2 \cos t_{12}}\,,$$

$$\begin{aligned} t_{20} &= t_{10} - t_{12}, \\ \operatorname{tg} p_0 &= \cos t_{10} \operatorname{tg} p_1 = \cos t_{20} \operatorname{tg} p_2, \\ \sin a &= \sin p_0 \operatorname{cosec} \Phi \end{aligned}$$

identifizieren wir den Stern 1 mit 9H Drac, den Stern 2 mit γ Herc und setzen

$$\begin{aligned} U_1 &= \quad 15^h27^m04^s{,}25; & U_2 &= \quad 15^h38^m18^s{,}245; & p_1 &= \quad 13^0 53' 50{,}''90 = p'; \\ \alpha_1 &= \quad 10\ 30\ 09{,}99; & \alpha_2 &= \quad 16\ 19\ 23{,}287; & p_2 &= \quad 70\ 42\ 28{,}68; \\ U_1-\alpha_1 &= +\,4\ 56\ 54{,}26; & U_2-\alpha_2 &= -\,0\ 41\ 05{,}042; & t_{12} &= +\,5^h37^m59^s{,}30. \end{aligned}$$

$\operatorname{cotg} p_1$	0,606551	$\cos t_{10}$	9,999981
$\operatorname{tg} p_2$	0,455884	$\operatorname{tg} p_1$	9,393448
		$\operatorname{tg} p_0$	9,393429
$\sin t_{12}$	9,997994		
$\operatorname{cotg} p_1 \operatorname{tg} p_2$	1,062435	$\cos t_{20}$	8,937544
$\cos t_{12}$	8,981803	$\operatorname{tg} p_2$	0,455884
		$\operatorname{tg} p_0$	9,393428
$\operatorname{cotg} p_1 \operatorname{tg} p_2 \cos t_{12} = N$.	0,044238		
$1-N$	$9{,}030327_n$	$\sin p_0$	9,380528
$\operatorname{cotg} p_1 \operatorname{tg} p_2 \sin t_{12}$	1,060429	$\sin \Phi$	9,829345
$\operatorname{cotg} t_{10}$	$2{,}030102_n$	$\sin a$	9,551183
Reduktion auf den Bogen	4,685587		
$t_{10} =$	$3{,}284311_n$	$a = 180^0 - 20^0 50' 28{,}''7$	

$$\begin{aligned} t_{10} &= -\,0^0 32' 04{,}''47 = -\,0^h02^m08^s{,}30 \\ t_{20} &= t_{10} - t_{12} \qquad\quad = -\,5\ 40\ 07{,}60. \end{aligned}$$

Die Korrektion dieses Wertes von a wegen der täglichen Aberration beträgt

$$a = 0{,}''322 \cos \Phi \; \frac{\sin z_1 + \sin z_2}{\sin(z_1+z_2)}$$

$$= 0{,}''322 \cdot 0{,}738 \; \frac{0{,}648 + 0{,}494}{0{,}940} = +\,0{,}''29.$$

Der definitive Wert des Instrumentenazimutes beträgt somit

$$159^0 09' 31{,}''6 \ \text{ respektive } \ -\,20^0 50' 28{,}''4.$$

Der Uhrfehler u kann mit Hilfe der Formeln der Döllenmethode ermittelt werden; es wird

$$\operatorname{tg} x_0 = \frac{\operatorname{tg} p_1 \operatorname{cotg} p_2 \sin t_{12}}{1-\operatorname{tg} p_1 \operatorname{cotg} p_2 \cos t_{12}}$$

und

$$\sin m_0 = \sin x_0 \operatorname{tg} p_2 \operatorname{cotg} \Phi$$

$$u = \alpha_1 - U_1 + x_0 - m_0.$$

Die Zahlenwerte geben:

$$\begin{aligned} x_0 &= \quad 4^0 58' 06'',04 \\ m_0 &= \quad 15\ 41\ 15,87 \\ x_0 - m_0 &= -10^0 43' 09'',83 \\ &= -\ 0^h 42^m 52^s 655 \\ \alpha_1 - U_1 &= +\ 0\ 41\ 05,042 \\ u &= -\quad 1\ 47^s 61 \end{aligned}$$

ZWEITES ZAHLENBEISPIEL

(Direkte Azimutbestimmung nach der Methode B)

Ort: Astronomische Anstalt der Universität Basel in Binningen, Pfeiler auf der Dachterrasse.

Objekt: Trigonometrisches Signal des Triangulationspunktes Rämel.

Instrument: Repsoldsches Universalinstrument; 70fache Vergrößerung.

Beobachter: TH. NIETHAMMER.

Datum: 7. Juni 1940.

Während der Dämmerung wurde der Objektvertikal an den Instrumentenvertikal mikrometrisch angeschlossen; es ergab sich:

$$f = -\ 3^s 276 = -49'',1.$$

Da die Zenitdistanz des Objektes sehr nahe gleich 90^0 ist, wird

$$\Delta A = (f - i \cos z_0) = -49'',1.$$

Im Norden wurde der Durchgang des Sternes $\varkappa$ Cyg, im Süden der Durchgang des Sternes β Leo durch je drei Fäden des festen Netzes vor und nach dem Umlegen nach der Aug- und Ohrmethode beobachtet; es haben sich die nachstehenden Mittelwerte von $\overline{U}$ und $\overline{\vartheta}$:

$$\overline{U} = \frac{1}{3}\left[\sum \frac{U_i' + U_i''}{2}\right], \quad \overline{\vartheta} = \frac{1}{3}\left[\sum \frac{U_i'' - U_i'}{2}\right]$$

$$i = 1, 2, 3.$$

ergeben; ferner sind angegeben die Neigungen, sowie die Rektaszensionen und Poldistanzen der beiden Sterne.

	$\varkappa$ Cyg	β Leo
$\overline{U}$	$13^h 27^m 34^s 58$	$13^h 51^m 58^s 78$
$\overline{\vartheta}$	124,2	55,5
Neigung i	$-\ 0^s 739$	$+\ 0^s 703$
α	$19^h 15^m 45^s 89$	$11^h 46^m 01^s 69$
p	$36^0 44' 31'',69$	$75^0 05' 40'',70$

Der Uhrfehler ist auf Grund der Zeitsignale der Neuenburger Sternwarte zu

$$u = -\ 1^m 06^s,54$$

angenommen worden.

Die Beziehungen 7, Seite 37, führen mit

$$a_0 = 48^0 57', \quad \Phi = 42^0 27{,}'5$$

zu folgenden Werten der Koordinaten μ und ν:

Stern	Achsenrichtung im Azimut	μ	ν
β Leo	$a_0 + 90^0$	$8^h 41^m 05^s$	$59^0 23' 50''$
$\varkappa$ Cyg	$a_0 + 270^0$	20 41 05	120 36 10

Die Reduktion der Uhrzeiten $\overline{U}$ auf den Instrumentenvertikal nach der Beziehung (9c), Seite 40 ist nachstehend dargestellt:

	$\varkappa$ Cyg	β Leo
$\overline{U} - \alpha$	$-\ 5^h 48^m 11{,}^s 31$	$+\ 2^h 05^m 57{,}^s 09$
$\overline{t} = \overline{U} - \alpha + u$	$-\ 5\ 49\ 17{,}85$	$+\ 2\ 04\ \ 50{,}55$
μ	20 41 05	8 41 05
$\mu - \overline{t}$	$+\ 2\ 30\ 23$	$+\ 6\ 36\ 14$
cotg $(\mu - \overline{t})$	$+\ 1{,}299$	$-\ 0{,}159$
$\frac{1}{15}\, m'' = \frac{1}{15}\, 2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2} / \sin 1''$.	$0{,}^s598$	$0{,}^s112$
$t - \overline{t}$	$-\ 0{,}725$	$+\ 0{,}018$
$\sin \nu$	0,861	0,861
$\sin p$	0,598	0,966
$\sin (\mu - \overline{t})$	0,610	0,988
$\sin \nu \sin p \sin (\mu - \overline{t})$	0,314	0,821
$\cos z$	0,610	0,748
$i \cos z$	$-\ 0{,}^s450$	$+\ 0{,}^s525$
$t_0 - t$	$-\ 1{,}435$	$+\ 0{,}640$
$t_0 - \overline{t}$	$-\ 2{,}16$	$+\ 0{,}66$
t_0	$-\ 5^h 49^m 20{,}^s 01$	$+\ 2^h 04^m 51{,}^s 21$

Wir setzen zur Berechnung der Polhöhe und des Azimutes nach den Formeln (58), (59), (61), (62), Seiten 129/130:

$$t_1 = +\ 2^h 04^m 51{,}^s 21,$$
$$t_2 = -\ 5\ 49\ 20{,}01,$$
$$t_{12} = +\ 7\ 54\ 11{,}22;$$

es wird dann:

$\sin t_{12}$ . . . . 9,943 706 cotg p_1 . . . . 9,425 175

$\cos t_{12}$ . . . . $9{,}679\,315_n$ tg p_2 . . . . 9,873 042

cotg p_1 tg p_2 . . . . 9,298 217

cotg p_1 tg p_2 $\cos t_{12} = N$ . . . . . . $8{,}977\,532_n$

$1 : (1 - N)$ . . . . $-\ 39\,398$

cotg p_1 tg p_2 $\sin t_{12}$ 9,241 923

cotg t_{10} 9,202 525

$$t_{10} = \quad 5^h 23^m 46{,}^s20$$
$$t_{20} = -\ 2\ \ 30\ \ 25{,}02$$
$$t_0 = -\ 3\ \ 18\ \ 54{,}99$$

$\cos t_{10}$	9,197076	$\cos t_{20}$	9,898859
$\mathrm{tg}\, p_1$	0,574825	$\mathrm{tg}\, p_2$	9,873042
$\mathrm{tg}\, p_0$	9,771901	$\mathrm{tg}\, p_0$	9,771901
$\sec t_0$	0,189497		
$\mathrm{tg}\, \Phi$	9,961398	$\Phi = 42^0 27' 25{,}''2$	
$\sec \Phi$	0,132071		
$\mathrm{cotg}\, t_0$	$9{,}927980_n$		
$\mathrm{tg}\, a$	0,060051	$a = 48^0 56' 55{,}''1$	
		$\Delta A = \quad -\ 49{,}1$	
		$A = 48^0 56' 06{,}''0$	

DRITTES ZAHLENBEISPIEL

(Berechnung der Unbekannten durch eine Ausgleichung)

Die Beobachtungsdaten zu diesem Beispiel entnehmen wir der Azimutbestimmung, welche das militärgeographische Institut Rumäniens im Jahre 1938 auf dem Triangulationspunkt erster Ordnung Trifesti hat ausführen lassen*). Die Richtung des Objektes, des Triangulationspunktes Sabaoani, weicht nur um 8^0 von N gegen E von der Meridianrichtung ab. Die Beobachtungen wurden auf sechs Nächte erstreckt; in der einzelnen Nacht wurden bis zu 16 Sterndurchgänge beobachtet.

Befürchtet man den Einfluß von systematischen Fehlern, die der Zeit proportional zu- oder abnehmen, so empfiehlt es sich, vier aufeinanderfolgende Sterne in der Anordnung NSSN oder SNNS zu beobachten; die Nord- und Südsterne sind in solchen Zenitdistanzen zu wählen, daß ihr durchschnittlicher Abstand nicht erheblich von 90^0 abweicht. In mittleren Breiten hat diese Vorschrift zur Folge, daß auf der Nordseite auch Sterne in das Programm aufgenommen werden müssen, die in der Nähe der größten Digression zu beobachten sind. Wenn man die Beobachtung der Durchgangszeiten durch Einstellungen des beweglichen Fadens ersetzen kann, so entstehen daraus keine Schwierigkeiten. Will man aber in der Nähe der größten Digression die Durchgänge mit dem unpersönlichen Mikrometer registrieren, so muß das Instrument wegen der schiefen Bewegungsrichtung des Sternes mit einer Vorrichtung versehen sein, die das Fernrohr dem Stern in Zenitdistanz automatisch nachführt. Das zur Azimutbestimmung benützte Bambergsche Passageninstrument war nicht mit einer solchen Vorrichtung ausgerüstet; der Beobachter hat deshalb darauf verzichtet, Sterne in der Nähe der größten Digression heranzuziehen, und beschränkte auf der Nordseite seine Auswahl auf Sterne, deren Zenitdistanz kleiner als 34^0 ist. In der Regel wurden gleichviel Nord- und Südsterne beobachtet, dagegen wurde auf eine symmetrische Anordnung der Sterne kein Bedacht genommen.

Die Messungen sind nicht nach den hier entwickelten Formeln reduziert worden insofern, als der Uhrfehler nicht als zweite Unbekannte neben dem Instru-

*) Azimut astronomique direct (avec une application) par le Capitaine Joan Stamatin. Imprimerie de l'Institut géographique militaire (Roumanie), 1941.

mentenazimut aus den Beobachtungen abgeleitet wurde; der Uhrfehler wurde vielmehr aus Aufnahmen der drahtlosen Zeitzeichen in Verbindung mit der bekannten Länge der Beobachtungsstation ermittelt, und mit dem so bestimmten Wert wurde das Azimut der Sterne berechnet. Es soll am Schluß unserer Durchrechnung die Frage beantwortet werden, wie die doppelte Bestimmung des Uhrfehlers, nämlich der aus den Beobachtungen selber abgeleitete Wert und der aus den drahtlosen Zeichen ermittelte, in korrekter Weise zur Azimutbestimmung verwertet werden kann.

Der zitierten Veröffentlichung entnehmen wir die in der Tabelle 1 vereinigten Daten von vier Sternen, die am 26. August 1938 innerhalb einer Stunde in der Reihenfolge NSSN beobachtet worden sind. Die aufeinanderfolgenden Zeilen enthalten:

1. die arithmetischen Mittel $\overline{U}$ der an je 10 Kontakten vor und nach dem Umlegen beobachteten Uhrzeiten;

2. die beobachteten Neigungen i, bezogen auf das dem Stern im Azimut um 90° vorangehende Achsenende;

3. die mikrometrisch gemessenen Azimutunterschiede ΔA des Instrumenten- und Objektvertikales.

Es folgen weiter die zur Reduktion erforderlichen Werte von

$$e b + i \cos z$$

mit $e = +1$ (* S), $e = -1$ (* N), $b = 0\overset{s}{,}050$ und die scheinbaren Örter der Sterne (ohne Berücksichtigung der täglichen Aberration).

Tabelle 1

	ε Drac N	ε Aqu S	ζ Aqu S	98 H Ceph N
$\overline{U}$	$19^h09^m32\overset{s}{,}81$	$19^h15^m02\overset{s}{,}910$	$19^h21^m18\overset{s}{,}594$	$19^h42^m02\overset{s}{,}66$
i	$-0\overset{''}{,}18$	$+0\overset{''}{,}30$	$+0\overset{''}{,}33$	$+0\overset{''}{,}42$
ΔA	$-4,13$	$-4,13$	$-4,13$	$-4,16$
$eb + i \cos z$.	$-0\overset{s}{,}061$	$+0\overset{s}{,}067$	$+0\overset{s}{,}068$	$-0\overset{s}{,}026$
$\cos z$	0,916	0,847	0,835	0,848
$\sin z$	0,402	0,532	0,550	0,530
α	$19^h48^m26\overset{s}{,}85$	$18^h56^m51\overset{s}{,}917$	$19^h02^m37\overset{s}{,}100$	$21^h06^m52\overset{s}{,}33$
p	$19^0 52' 57\overset{''}{,}73$	$75^0 00' 41\overset{''}{,}51$	$76^0 13' 27\overset{''}{,}49$	$12^0 07' 05,01$

Die Ableitung der auf den Instrumentenvertikal reduzierten Durchgangszeiten ist in der Tabelle 2 dargestellt. Die Kenntnis eines Näherungswertes der Uhrkorrektion verschaffen wir uns auf folgendem Weg. Sieht man die Uhrzeiten $\overline{U}$ als Näherungswerte der Zeiten des Durchganges durch den Instrumentenvertikal an, so kann die Uhrkorrektion mit Hilfe der Reduktionsformeln der Döllenmethode ermittelt werden; sie lauten, wenn sich der Index 1 auf den Nordstern, der Index 2 auf den Südstern bezieht:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{tg} p_1 \operatorname{cotg} p_2 \sin (t_1 - t_2)}{1 - \operatorname{tg} p_1 \operatorname{cotg} p_2 \cos (t_1 - t_2)},$$

$$\sin m = \operatorname{cotg} \Phi \operatorname{tg} p_2 \sin x,$$

$$u = (\alpha_2 - U_2) + (x - m).$$

Wir benützen die Sterne ε Drac und ε Aqu zu dieser Rechnung und erhalten:

$$U_1 - \alpha_1 = 23^h 21^m 05^s{,}96 \qquad \Phi = 43^0 05{,}'0$$
$$U_2 - \alpha_2 = 0\ 18\ 10{,}99 \qquad \mathrm{tg}\, p_1 \ldots\ 9{,}55829$$
$$t_1 - t_2 = 23\ 02\ 55{,}0 \qquad \mathrm{cotg}\, p_2 \ldots\ 9{,}42770$$
$$\mathrm{cotg}\, \Phi \ldots\ 0{,}02908$$

Unter Verwendung von Subtraktionslogarithmen ergibt sich die folgende Berechnung:

$\sin(t_1 - t_2)$	$9{,}39183_n$
$\mathrm{tg}\, p_1 \,\mathrm{cotg}\, p_2$	$8{,}98599$
$\cos(t_1 - t_2)$	$9{,}98639$
$\mathrm{tg}\, p_1 \,\mathrm{cotg}\, p_2 \cos(t_1 - t_2)$	$8{,}97238$
$\lg(a) - \lg(b) = B$	$1{,}02762$
A	$0{,}98482$
$\lg(a-b) = \lg(b) + A$	$9{,}95720$
$\mathrm{tg}\, p_1 \,\mathrm{cotg}\, p_2 \sin(t_1 - t_2)$	$8{,}37782_n$
$\mathrm{tg}\, x$	$8{,}42062_n$
$\sin x$	$8{,}42046_n$
$\mathrm{cotg}\, \Phi \,\mathrm{tg}\, p_2$	$0{,}60138$
$\sin m$	$9{,}02184_n$

$$x = -\,06^m 02^s{,}12, \qquad x - m = +\,18^m 06^s{,}5,$$
$$m = -\,24\ 08{,}66, \qquad \alpha_2 - U_2 = 18\ 11{,}0,$$
$$u = -\quad 4{,}5.$$

Das genäherte Azimut des Instrumentenvertikals beträgt

$$8^0 14{,}'3 \text{ respektive } 188^0 14{,}'3.$$

Damit erhält man für die Koordinaten μ und ν der Achsenenden die folgenden Werte:

Achsenende im Azimut	μ	ν
98⁰14′	$6^h 24^m 08^s$	$84^0 23{,}'2$
188 14	18 24 08	95 36,8

In der Tabelle 2 ist die von $m'' = 2 \sin^2 \dfrac{\vartheta}{2} / \sin 1''$ abhängige Korrektion nach den Angaben Stamatins angesetzt worden, da in der Publikation die Werte von $\vartheta = \frac{1}{2}(U'' - U')$ nicht angegeben werden. Der Koeffizient von $(e b + i \cos z)$ ist mit C bezeichnet; es ist

$$C = \mathrm{cosec}\, p \,\mathrm{cosec}\, \nu \,\mathrm{cosec}\, (\mu - \overline{t}).$$

In der letzten Zeile der Tabelle 2 sind die mit den Werten

$$u_0 = -\,4^s{,}500$$

berechneten Stundenwinkel t_{0i} der Sterne angegeben.

In der Tabelle 3 ist ausführlich die Berechnung der Azimutwerte a_i dargestellt, die der Ausgleichung zugrunde gelegt werden; sie sind logarithmisch siebenstellig unter Verwendung von Subtraktionslogarithmen nach der Formel

$$\mathrm{tg}\, a_i = -\frac{\mathrm{tg}\, p_i \,\mathrm{cosec}\, \Phi \sin t_{0i}}{1 - \mathrm{tg}\, p_i \,\mathrm{cotg}\, \Phi \cos t_{0i}}$$

berechnet worden; zur Kontrolle sind sie auch in sechsstelliger Rechnung mit Hilfe des folgenden Systemes ermittelt worden:

$$\operatorname{tg} \Psi_i = \cos t_{0i} \operatorname{tg} p_i,$$
$$\operatorname{tg} a_i = \sin \Psi_i \operatorname{cosec}(\Psi_i - \Phi) \operatorname{tg} t_{0i}.$$

Der genaue Wert von Φ ist $\Phi = 43^0 05' 0'',11.$

Tabelle 2

	ε Drac	ε Aqu	ζ Aqu	98 *H* Ceph
$\bar{t} = \bar{U} + u_0 - \alpha$	$-\ 0^h 38^m 58^s,5$	$+\ 0^h 18^m 06^s,5$	$+\ 0^h 18^m 37^s,0$	$-\ 1^h 24^m 54^s,2$
$\mu - \bar{t}$	19 03 06	6 06 02	6 05 31	19 49 02
$\operatorname{cosec}(\mu - \bar{t}) / \sin\nu \sin p$	$-\ 3{,}07$	$+\ 1{,}04$	$+\ 1{,}04$	$-\ 5{,}38$
$\operatorname{cotg}(\mu - \bar{t}) \cdot \frac{m''}{15}$ . .	$+\ 0^s{,}02$	$+\ 0^s{,}001$	$+\ 0^s{,}001$	$+\ 0^s{,}10$
$(e\,b + i \cos z) \cdot C$ . . .	$+\ 0{,}19$	$+\ 0{,}070$	$+\ 0{,}071$	$+\ 0{,}14$
$t_0 - \bar{t}$	$+\ 0{,}21$	$+\ 0{,}071$	$+\ 0{,}072$	$+\ 0{,}24$
U_0	$19^h 09^m 33^s,02$	$19^h 15^m 02^s,981$	$19^h 21^m 18^s,666$	$19^h 42^m 02^s,90$
$\alpha - u_0$	19 48 31,35	18 56 56,417	19 02 41,600	21 06 56,83
t_{0i}	$-\ 0$ 38 58,33	$+0$ 18 06,56	$+0$ 18 37,07	-1 24 53,93

Die Korrektion, die an den Werten a_i wegen der täglichen Aberration anzubringen ist, beträgt (vergleiche Seite 130):

$$* \text{ Nord } - 0'',322 \sin \Phi \cos a_N = +\ 0'',218,$$
$$* \text{ Süd } - 0\ 322 \sin \Phi \cos a_S = -\ 0{,}218.$$

Als Näherungswert a_0 des unbekannten Azimutes a des Instrumentenvertikales ist eingeführt

$$a_0 = 8^0 \text{ respektive } 188^0 14' 16'',00.$$

Tabelle 3

	ε Drac	ε Aqu	ζ Aqu	98 *H* Ceph
$\operatorname{tg} p_i$	9,558 2928	0,572 2972	0,610 5259	9,331 8545
$\sin t_{0i}$	$9{,}228\,4768_n$	8,897 2678	8,909 2688	$9{,}558\,7405_n$
$\operatorname{tg} p_i \operatorname{cosec} \Phi$	9,723 8329	0,737 8373	0,776 0660	9,497 3946
$\operatorname{tg} p_i \operatorname{cotg} \Phi$	9,587 3702	0,601 3746	0,639 6033	9,360 9319
$\cos t_{0i}$	9,993 6904	9,998 6428	9,998 5654	9,969 4941
$\operatorname{tg} p_i \operatorname{cotg} \Phi \cos t_{0i}$	9,581 0606	0,600 0174	0,638 1687	9,330 4260
$\lg(a) - \lg(b)$	0,418 9393	0,600 0174	0,638 1687	0,669 5740
(A) resp. (C)	0,208 3929	0,125 6217	0,113 5402	0,104 5808
$\lg(a-b)$	9,791 6071	$0{,}474\,3957_n$	$0{,}524\,6285_n$	9,895 4192
$\operatorname{tg} p_i \operatorname{cosec} \Phi \sin t_{0i}$.	$8{,}952\,3097_n$	9,635 1051	9,685 3348	$9{,}056\,1351_n$
$\operatorname{tg} a_i =$	9,160 7026	9,160 7094	9,160 7063	9,160 7159
$a_i =$	$188^0 14' 16'',54$	$8^0 14' 17'',00$	$8^0 14' 16'',79$	$188^0 14' 17'',44$
$a_i - a_0 =$	$+\ 0'',54$	$+\ 1'',00$	$+\ 0'',79$	$+\ 1'',44$
$\sin z_i =$	0,402	0,532	0,550	0,530
$(a_i - a_0) \sin z_i =$ . .	$+\ 0{,}217$	$+\ 0{,}532$	$+\ 0{,}434$	$+\ 0{,}763$
$-\ 0'',322 \sin \Phi \cos a_i =$	$+\ 0{,}218$	$-\ 0{,}218$	$-\ 0{,}218$	$+\ 0{,}218$
$l_i =$	$+\ 0{,}435$	$+\ 0{,}314$	$+\ 0{,}216$	$+\ 0{,}981$

Die Fehlergleichungen, die der Ausgleichung zugrunde zu legen sind, können entweder in der Form

$$x \sin z_i \mp y \cos z_i = l_i \sin z_i + \lambda_i$$

mit

$$du = y \operatorname{cosec} \Phi \sec a,$$
$$da = x + du \cos \Phi$$

oder in der Form (vergleiche Beziehung (67), Seite 132):

$$da \sin z_i - du \sin p_i \cos q_i = l_i \sin z_i + \lambda_i$$

angesetzt werden. Wir wählen die zweite Form, trotzdem sie wegen der Berechnung des Koeffizienten $\sin p \cos q$ eine Mehrarbeit erfordert, weil die dieser Form zugehörigen Normalgleichungen in einfacher Weise erlauben, den Einfluß des Uhrfehlers, der aus den Aufnahmen der Zeitzeichen abgeleitet worden ist, zu berücksichtigen.

Die Koeffizienten $\sin p_i \cos q_i$ berechnen wir mit Hilfe der Beziehung

$$\sin p_i \cos q_i = \cos \Phi \sin z_i + \sin \Phi \cos z_i \cos a_i,$$

worin für a_i der in der Richtung des Sternes liegende Wert des Instrumentenazimutes einzuführen ist. Die Fehlergleichungen lauten dann, wenn die Gewichte von l_i proportional $\sin^2 z_i$ angenommen werden:

$$\begin{aligned} 0{,}402\,da + 0{,}326\,du &= +\,0''{,}435 + \lambda_1, \\ 0{,}532\,da - 0{,}961\,du &= +\,0{,}314 + \lambda_2, \\ 0{,}550\,da - 0{,}967\,du &= +\,0{,}216 + \lambda_3, \\ 0{,}530\,da + 0{,}186\,du &= +\,0{,}981 + \lambda_4. \end{aligned}$$

Die Normalgleichungen in der reduzierten Form sind:

$$\begin{aligned} 1{,}028\,da - 0{,}813\,du &= +\,0''{,}981, \\ 1{,}358\,du &= +\,0{,}589, \\ [\lambda\lambda] &= +\,0{,}1041; \end{aligned}$$

sie führen zu den folgenden Werten der unbekannten Verbesserungen und ihrer mittleren Fehler:

$$\begin{aligned} du &= +\,0''{,}434 \pm 0''{,}195, \\ da &= +\,1{,}297 \pm 0{,}274. \end{aligned}$$

Schreibt man die reduzierten Normalgleichungen in der Form:

$$\begin{aligned} da + \alpha_2'\,du &= \chi_1, \text{ Gew. } [aa], \\ du &= \chi_2, \text{ Gew. } [bb_1], \end{aligned}$$

so sind χ_1 und χ_2 fingierte, voneinander unabhängige Beobachtungswerte, welche den ursprünglichen Beobachtungsgrößen l_i in bezug auf die Unbekannten da und du vollständig äquivalent sind, wenn ihnen die Gewichte

$$[aa] = 1{,}028$$

und

$$[bb_1] = 1{,}358$$

beigelegt werden.

Liegt nun für du ein zweiter, auf anderem Weg gewonnener Wert vor:

$$du = \chi_2',$$

so kann χ_2' mit dem Wert $du = \chi_2$ nach Maßgabe der Gewichte zu einem Mittel vereinigt werden. Ist m_2' der mittlere Fehler von χ_2' und m der mittlere Fehler des Gewichtes 1 in der Ausgleichung, so wird das Gewicht g' von χ_2' gleich

$$g' = m^2/m_2'^2.$$

Der definitive Wert von du wird also gleich

$$du = \frac{[bb_1]\,\chi_2 + g'\,\chi_2'}{[bb_1] + g'},$$

und das Quadrat des mittleren Fehlers m_u von du wird gleich

$$m_u^2 = \frac{m^2}{[bb_1] + g'}.$$

Infolge der Änderung des Wertes von du ändert sich auch der Wert von da; es wird

$$da = \chi_1 - \alpha_2' \frac{[bb_1]\,\chi_2 + g'\,\chi_2'}{[bb_1] + g'},$$

und der mittlere Fehler m_a von da wird gegeben durch den Ausdruck:

$$m_a^2 = m^2 \left(\frac{1}{[aa]} + \frac{\alpha_2'\,\alpha_2'}{[bb_1] + g'} \right).$$

Der Publikation Stamatins entnehmen wir nun den aus den Zeitsignalaufnahmen abgeleiteten Wert des Uhrfehlers für die mittlere Epoche $u_0 = 19^{\mathrm{h}},37$:

$$u = -\,4^{\mathrm{s}},488 = -\,4^{\mathrm{s}},500 + 0^{\mathrm{s}},012.$$

Es ist somit zu setzen

$$\chi_2' = +\,0^{\mathrm{s}},012 = 0'',180.$$

Über den mittleren Fehler dieses Wertes von χ_2' werden keine Angaben gemacht. Wir nehmen willkürlich das Gewicht von χ_2' gleich groß an wie das Gewicht von χ_2, setzen also

$$du = \frac{1}{2}\,(0'',434 + 0'',180) = 0'',307.$$

Es wird dann mit $\alpha_2' = -\,0{,}790$:

$$da = 0'',954 + 0{,}790 \cdot 0'',307 = 1'',20.$$

Das reziproke Gewicht dieses Wertes wird gleich 1,20; somit ist

$$m_a = \pm \sqrt{\frac{0{,}1041}{4-2}\,1{,}20} = \pm\,0'',25.$$

Das Schlußresultat lautet also:

$$a = 188^0 14' 16'',00 + 1'',20 = 188^0 14' 17'',20 \pm 0'',25,$$
$$A = a + \Delta A = 188\ 14\ 17{,}20 - 4{,}14 = 188\ 14\ 13{,}05 \pm 0{,}25$$
$$\pm\,0{,}25 \pm 0{,}01.$$