Der bewegliche Faden ist auf den Polarstern je zweimal in beiden Lagen eingestellt worden; es ist

$$\text{zur Uhrzeit } U' = 21^{h}21^{m}00^{s}, \qquad \bar{f} = -0{,}^{s}826, \; z' = 42^{0}08{,}'1.$$

Ferner ist

$$U_0 = 21^{h}21^{m}34{,}^{s}732, \; i = +0{,}^{s}009, \; z = 27^{0}54{,}'9$$

Das genäherte Azimut des Instrumentes ist

$$k_0 = -1^{0}27'.$$

Hiernach ist

$$\Delta t = -\left(+0{,}^{s}009 - 0{,}^{s}826 \frac{0{,}468}{0{,}940}\right) \cdot 1{,}0003 \cdot 1{,}477 = +0{,}^{s}594.$$

Die Berechnung der Uhrkorrektion ist in der folgenden Tabelle dargestellt. Die Koordinaten des Polarsternes enthalten die Korrektion wegen der täglichen Aberration nicht.

$U' =$	$21^{h}21^{m}00^{s}$	$\operatorname{cotg}\delta' \operatorname{tg}\delta \cos(t'-t) = a$ ·	7,46218
$\alpha' =$	$1\;36\;05{,}^{s}92$	$1:(1-a)$	+1261
		$\operatorname{cotg}\delta' \operatorname{tg}\delta \sin(t'-t)$	$7{,}783345_n$
$U_0 =$	$21\;21\;34{,}^{s}732$	$\operatorname{tg} x$	$7{,}784606_n$
$\alpha =$	$21\;18\;44{,}802$	$\cos x$	−8
$U' - \alpha' =$	$19\;44\;54{,}^{s}08$	$\operatorname{cotg}\delta \operatorname{tg}\varphi$	0,487056
$U_0 - \alpha =$	$+\;02\;49{,}930$	$\sin m$	$8{,}271654_n$
$t' - t =$	$19\;42\;04{,}150$	$x =$	$-\;0^{0}20'56{,}''10$
		$m =$	$-\;1\;04\;15{,}71$
$\delta' =$	$88^{0}54'40{,}''18$	$x - m =$	$+\;0\;43\;19{,}61$
$\delta =$	$19\;29\;41{,}70$	$x - m =$	$+\;2^{m}53{,}^{s}307$
$\operatorname{cotg}\delta'$ . .	8,278893	$\Delta t =$	$+\;0\;\;00{,}594$
$\operatorname{tg}\delta$	9,549026	$\alpha - U_0 =$	$-\;2\;49{,}930$
$\sin(t'-t)$.	$9{,}955426_n$	Korrektion wegen täglicher Aberration	
$\operatorname{cotg}\delta' \operatorname{tg}\delta$.	7,827919	$=$	$+\;0\;\;00{,}011$
$\cos(t'-t)$.	9,63426	$u =$	$+\;0^{m}03{,}^{s}982$

c) Die Bestimmung der Polhöhe mit Hilfe der Durchgänge zweier Sterne durch den ersten Vertikal[6])

1. *Ableitung der Reduktionsformeln.* Es seien U_w und U_e die Uhrzeiten des Durchganges zweier Sterne durch den mittleren Achsenäquator, von denen der eine im Westen, der andere im Osten beobachtet worden ist. Wir nehmen die Absolutwerte der Stundenwinkel und setzen

$$t_w = (U_w + u) - \alpha_w,$$
$$t_e = \alpha_e - (U_e + u).$$

Der nördliche Pol Q des mittleren Achsenäquators habe den Stundenwinkel $180^{0} + \mu_N$ und die Poldistanz ν. Der größte Kreis, der Q mit dem Pol des Äquators verbindet, schneide den mittleren Achsenäquator im Punkte Z'; es sei $PZ' = \Phi'$; der Meridian schneide den mittleren Achsenäquator im Punkte Z_0; es sei $PZ_0 = \Phi_0$.

Befindet sich der Weststern zur Uhrzeit U_w im Punkte S_w, der Oststern zur Uhrzeit U_e im Punkte S_e, so sind $PS_w Z'$ und $PS_e Z'$ rechtwinklige Dreiecke, so daß die Beziehungen bestehen:

$$\begin{aligned} \cos(t_w - \mu_N) &= \operatorname{cotg} p_w \operatorname{tg} \Phi', \\ \cos(t_e + \mu_N) &= \operatorname{cotg} p_e \operatorname{tg} \Phi'. \end{aligned} \tag{49}$$

Setzt man hierin

$$\left.\begin{aligned} t_0 &= \frac{t_w + t_e}{2}; \quad t_w = t_0 + \Delta t, \\ \Delta t &= \frac{t_w - t_e}{2}; \quad t_e = t_0 - \Delta t, \end{aligned}\right\} \tag{49a}$$

so erhält man durch Elimination von tg Φ' die Gleichung

$$\operatorname{tg}(\Delta t - \mu_N) = \operatorname{cotg} t_0 \frac{\sin(p_w - p_e)}{\sin(p_w + p_e)}; \tag{49b}$$

sie liefert den Wert von $(\Delta t - \mu_N)$, so daß

$$\mu_N = \Delta t - (\Delta t - \mu_N)$$

wird. Da Φ' und Φ_0 durch die Beziehung

$$\cos \mu_N \operatorname{tg} \Phi_0 = \operatorname{tg} \Phi'$$

miteinander verbunden werden, erhält man, wenn hierin der Wert von tg Φ' nach den Beziehungen (49) eingeführt wird:

$$\cos \mu_N \operatorname{tg} \Phi_0 = \operatorname{tg} p_w \cos(t_w - \mu_N) \equiv \operatorname{tg} p_e \cos(t_e + \mu_N).$$

Schließlich erhält man $\Phi = PZ$ mit Hilfe der Beziehung

$$\operatorname{tg}(\Phi_0 - \Phi) = \operatorname{tg} i \sec a_N, \tag{50a}$$

in welcher i die Erhebung des Punktes Q über den Horizont, das ist die Neigung des mittleren Achsenäquators, und a_N das von N nach E positiv genommene Azimut des Punktes Q bedeutet. Da man die Neigung und das Azimut so klein als möglich hält, genügt es, zu setzen:

$$\Phi = \Phi_0 - i. \tag{50b}$$

Die Reduktion der Stundenwinkel auf den Durchgang durch den mittleren Achsenäquator

In der Beziehung (6a) setzen wir bei der Beobachtung des

$$\left.\begin{aligned} &\text{Weststernes: } t = t_{iw};\ \mu = 180^0 + \mu_N;\ \bar{t} = \bar{t}_{iw},\ t_{iw} - \bar{t}_{iw} = dt_{iw}, \\ &\text{Oststernes: } t = -t_{ie};\ \mu = \mu_N;\ \bar{t} = -\bar{t}_{ie},\ t_{ie} - \bar{t}_{ie} = dt_{ie}; \end{aligned}\right\} e = +1;$$

es wird dann

$$\left.\begin{aligned} 2\sin\frac{dt_{iw}}{2} &= \operatorname{cosec}\left(\frac{\bar{t}_{iw}+t_{iw}}{2}-\mu_N\right) \\ &\times\left\{\cos(\bar{t}_{iw}-\mu_N)\,2\sin^2\frac{\vartheta_0}{2}+\frac{\sin k}{\sin p\sin\nu}\right\},\ {}^*\mathrm{W}, \\ 2\sin\frac{dt_{ie}}{2} &= \operatorname{cosec}\left(\frac{\bar{t}_{ie}+t_{ie}}{2}+\mu_N\right) \\ &\times\left\{\cos(\bar{t}_{ie}+\mu_N)\,2\sin^2\frac{\vartheta_0}{2}-\frac{\sin k}{\sin p\sin\nu}\right\},\ {}^*\mathrm{E}, \end{aligned}\right\}\quad (51\,a)$$

worin k die halbe Summe der Kontaktbreite und des toten Ganges bezeichnet.

Am arithmetischen Mittel $\bar{t}_{w,e}=\frac{1}{n}\,[\bar{t}_i]_{w,e}$ der Stundenwinkel ist dann die Korrektion

$$dt_{w,e}=\frac{1}{n}\,[dt_i]_{w,e}\,,\qquad (i=1,2,\ldots,n)$$

anzubringen.

Werden die Sterne nicht in sehr kleinen Zenitdistanzen beobachtet, so genügt die Näherungsformel

$$\left.\begin{matrix}{}^*\mathrm{W}\\ {}^*\mathrm{E}\end{matrix}\right\}\ \underset{(\text{in sec})}{dt_i}=\operatorname{cosec}(\bar{t}\mp\mu_N)\left\{\cos(\bar{t}\mp\mu_N)\,\frac{m''}{15}\pm k\operatorname{cosec}p\operatorname{cosec}\nu\right\},\qquad (51\,b)$$

worin k in Zeitsekunden auszudrücken ist.

Die Benützung eines Niveaus zur Bestimmung der Achsenneigung wird überflüssig, wenn vor dem Umlegen das direkte Bild und nach dem Umlegen das von einem Quecksilberhorizont reflektierte Bild des Sternes beobachtet wird. Im Moment des Durchganges durch den mittleren Achsenäquator befindet sich dann der Stern im Abstand $\varkappa_0\cos z$ vom Instrumentenvertikal; bei der Benützung eines gebrochenen Fernrohres ist $\varkappa_0$ gleich der Differenz «Zapfenungleichheit $\varkappa$ minus Biegungskollimation c» (vergleiche Seite 92/93). In der Beziehung (50b) hat man an Stelle von i entweder $+\varkappa_0$ oder $-\varkappa_0$ einzuführen, je nachdem der West- *und* der Oststern bei der Okularfolge Nord–Süd oder Süd–Nord beobachtet wird. Der Einfluß der Neigung auf die Polhöhe kann somit dadurch eliminiert werden, daß man die beobachteten Sternpaare gleichmäßig auf die Okularfolgen N–S und S–N verteilt.

Beobachtet man die beiden Sterne eines Paares nicht in der gleichen Okularfolge, sondern den Weststern zum Beispiel in der Folge N–S und den Oststern in der Folge S–N (oder beide in der umgekehrten Folge), so wird, wenn die Zenitdistanzen der beiden Sterne gleich groß sind, der Einfluß von $\varkappa_0$ schon im Resultat des einzelnen Paares eliminiert; sind die Zenitdistanzen nur angenähert gleich, so kann der verbleibende Rest dieses Einflusses dadurch unschädlich gemacht werden, daß an einem zweiten Abend die umgekehrte Okularfolge eingehalten wird. Leitet man aus solchen Beobachtungen den Zahlenwert von $\varkappa_0$ ab, so können die Einzelwerte von Φ wegen des Einflusses von $\varkappa_0$ korrigiert werden; diese Korrektion beträgt

$$d\Phi = \Phi - \Phi_0 = \mp \varkappa_0 \frac{\sin(z_e - z_w)}{\sin(z_e + z_w)}, \quad \begin{cases} *\mathrm{W, N\text{–}S;\ *E, S\text{–}N}, \\ *\mathrm{W, S\text{–}N;\ *E, N\text{–}S}, \end{cases} \tag{51c}$$

wie sich aus dem Differentialausdruck des Kotangentensatzes ergibt. Setzt man darin

$$df = \sin p \cos q \, dt,$$

so bedeutet $90^0 - df$ den Abstand des in den Ort $(t + dt, dp)$ verschobenen Sternes von demjenigen Pol des Instrumentalvertikales, dessen Azimut um 90^0 größer ist als das Azimut des Sternes. Es lauten also, da df gleich $\pm \varkappa_0 \cos z$ zu setzen ist, die beiden Differentialausdrücke

$$*\mathrm{W}:\ \sin z_w \, da = \cos z_w \, d\Phi \sin a_w \pm \varkappa_0 \cos z_w, \quad \begin{cases} \text{Ok N–S}, \\ \text{Ok S–N}, \end{cases}$$

$$*\mathrm{E}:\ \sin z_e \, da = \cos z_e \, d\Phi \sin a_e \pm \varkappa_0 \cos z_e, \quad \begin{cases} \text{Ok S–N}, \\ \text{Ok N–S}. \end{cases}$$

Setzt man hierin $\sin a_w = -\sin a_e = +1$ und eliminiert aus je zweien dieser Beziehungen die Azimutverbesserung da, indem man die Okularfolge «*W, N–S» mit der Okularfolge «*E, S–N» oder «*W, S–N» mit «*E, N–S» kombiniert, so erhält man die Beziehung (51c).

2. *Der Einfluß der täglichen Aberration.* Setzt man im Differentialausdruck des Kotangentensatzes $dU = du = 0$ und

$$d\alpha \sin p = +0\overset{''}{.}322 \sin \Phi \cos t,$$
$$dp = -0,322 \sin \Phi \sin t \cos p,$$

so erhält man

$$\begin{aligned} \sin z \, da^* - \cos z \, d\Phi \sin a^* &= -(\cos q \, d\alpha \sin p + \sin q \, dp) \\ &= +0\overset{''}{.}322 \sin \Phi \cos a^*, \end{aligned}$$

da

$$\cos a^* = \cos t \cos q - \sin t \sin q \cos p$$

ist. Im ersten Vertikal ist aber $\cos a^* = 0$; es bedarf also weder $d\Phi$ noch da^* einer Verbesserung wegen der täglichen Aberration, wenn in die Rechnung die Ephemeridenörter eingeführt worden sind.

3. *Der mittlere Fehler der Polhöhe und die günstigsten Umstände der Beobachtung.* Wir setzen die Differentialbeziehung des Kotangentensatzes für den im Westen und im Osten beobachteten Stern an:

$$\sin z_w \, da^* - \cos z_w \, d\Phi \sin a^* = \cos q_w \, d(U + u - \alpha)_w \sin p_w + \sin q_w \, dp_w,$$
$$\sin z_e \, da^* + \cos z_e \, d\Phi \sin a^* = \cos q_e \, d(U + u - \alpha)_e \sin p_e + \sin q_e \, dp_e$$

und eliminieren die Verbesserung da^*, indem wir $\sin a^* = 1$ setzen; die an Φ