du auch nach dem Ausdruck

$$du = 0^s{,}0215 \frac{\sin z + \sin z'}{\sin p} \text{ respektive } 0^s{,}0215 \frac{\sin z}{\sin p}$$

berechnet werden.

Zusammenstellung der Reduktionsformeln

Bezeichnet

U' die Uhrzeit, zu welcher sich der Polarstern im Abstand $90^0 + \bar{f}$ vom westlichen Pol des Achsenäquators befindet,

U_0 die Zeit des Durchganges des Südsternes durch den Achsenäquator,

i die auf das Westende bezogene Neigung der Achse,

$\left.\begin{matrix}\alpha', \delta' \\ \alpha, \delta\end{matrix}\right\}$ den Ephemeridenort des $\left\{\begin{matrix}\text{Polarsternes,} \\ \text{Südsternes,}\end{matrix}\right.$

z, z' die Zenitdistanzen (z nach Süden, z' nach Norden positiv),

$90^0 - k$ das Azimut des Westendes der Achse,

$k_0 = k - \bar{f} \cos z \operatorname{cosec}(z + z') = k - \cdots,$

so folgt u aus der Durchrechnung des folgenden Systemes:

$$\begin{aligned}
t' - t &= (U' - \alpha') - (U_0 - \alpha), \\
\operatorname{tg} x &= \operatorname{cotg} \delta' \operatorname{tg} \delta \sin(t' - t) \big/ \big(1 - \operatorname{cotg} \delta' \operatorname{tg} \delta \cos(t' - t)\big), \\
\sin m &= \operatorname{tg} \varphi \operatorname{cotg} \delta \operatorname{tg} x \cos x, \\
\varDelta t &= -\big(i + \bar{f} \sin z \operatorname{cosec}(z + z')\big) \sec k_0 \sec \varphi, \\
u &= (\alpha - U_0) + (x - m) + \varDelta t + 0^s{,}0215 \frac{\sin z + \sin z'}{\cos \delta}.
\end{aligned}$$

Wird das Instrument während des Sterndurchganges nicht umgelegt, so beobachtet man, um die Kollimation zu eliminieren, verschiedene Sterne abwechselnd in der einen oder anderen Lage; der Polarstern wird dann vorteilhaft auf den Mittelfaden eingestellt, auf welchen die Durchgangszeiten des Südsternes reduziert werden; in diesem Fall hat man, wenn die Kollimation mit c bezeichnet wird, als Wert von $\varDelta t$ einzuführen

$$\varDelta t = -\left(i \pm c \frac{\sin z + \sin z'}{\sin(z + z')}\right) \sec k_0 \operatorname{cosec} \varPhi \left\{\begin{matrix} + \text{ Lage I} \\ - \text{ Lage II} \end{matrix}\right. .$$

3. *Der mittlere Fehler der Uhrkorrektion und die günstigsten Umstände der Beobachtung*[5]). Die Änderung, welche die Uhrkorrektion erfährt als Folge von Verbesserungen, die an den Ausgangsgrößen angebracht werden, kann entweder durch Differentiation des Ausdruckes für u abgeleitet werden oder aus den beiden Differentialausdrücken, die man einzeln für den Polarstern und den Südstern aufstellen kann. Wir schlagen einen Mittelweg ein, der uns die geometrische Bedeutung der Beziehung, durch welche die wahren Fehler miteinander verbunden werden, leicht erkennen läßt.

Die Lage des Zenites Z wird gegeben als Schnittpunkt des Kleinkreises, der um den Pol P des Äquators mit dem Radius Φ geschlagen wird, mit dem Kleinkreis um den Pol Q des Achsenäquators mit dem Radius $90^0 - i$; und Q wird gegenüber dem Dreieck $PS'S$ bestimmt durch den Schnittpunkt des Kleinkreises, der um S' mit dem Radius $90^0 + \bar{f}$ geschlagen wird, mit der Polare des Punktes S. Werden Φ und i als fehlerfrei betrachtet, so übertragen sich die Fehler in der Lage der Punkte S' und S auf das Zenit nur durch den Fehler in der Lage des Punktes Q. Man kann das Dreieck $PS'S$ als fehlerfrei ansehen, wenn man die Fehler der Punkte S' und S den Abständen $S'Q$ und SQ zur Last legt. Als Fehler dieser Abstände kommen aber nur die Projektionen der Vektoren, durch welche die fehlerhaften Orte der Punkte S' und S mit den wahren Orten verbunden werden, auf die Richtungen von S' und S nach Q in Betracht. Diese Komponenten erhält man aus dem Differentialausdruck des Kotangentensatzes. Ist a das Azimut des Sternes, so besteht, wenn $d\Phi = 0$ angenommen wird, die Beziehung

$$\sin z\, da = \cos q\, dt \sin p - \sin q\, dp.$$

Die rechte Seite ist aber die Projektion des Vektors, der den Ort (t, p) mit dem Ort $(t + dt, p + dp)$ verbindet, auf die Richtung des Sternvertikales; setzt man

$$df = \cos q\, dt \sin p - \sin q\, dp,$$

so ist $(90^0 + df)$ der Abstand des Ortes $(t + dt,\ p + dp)$ vom Pol des Sternvertikales, der im Azimut $90^0 + a$ liegt. Wir scheiden aus df die von den Verbesserungen dU, $d\alpha$ und dp herrührenden Anteile aus und setzen

$$df_U = \cos q\, dU \sin p$$
$$df^* = \cos q\, d\alpha \sin p + \sin q\, dp;$$

es wird dann

$$\sin z\, da - \cos q\, du \sin p = df_U - df^* \equiv df.$$

Für den Polarstern hat man die analoge Gleichung

$$\sin z'\, da' - \cos q'\, du \sin p' = df_{U'} - df'^* \equiv df'.$$

Führt man da und da' auf die Verbesserung des gemeinsamen Instrumentenazimutes zurück und eliminiert dann diese Verbesserung aus den beiden Gleichungen, so erhält man die Verbesserung du als Funktion der beiden Verbesserungen df und df'.

Wirft man nun aber die Verbesserungen df und df' auf die Abstände SQ und $S'Q$, so hat man im Ausdruck

$$u = (\alpha - U) + (x - m) + \Delta t$$

nur Δt als fehlerhaft anzusehen; es wird also

$$du = \frac{\partial\,(\Delta t)}{\partial f}\, df + \frac{\partial\,(\Delta t)}{\partial \bar{f}}\, d\bar{f};$$

hierin ist $d\bar{f} = -df'$ zu setzen, da $90^0 + \bar{f}$ den Abstand des Punktes S' vom Pol des Vertikales oder Achsenäquators im Azimut $a' - 90^0$ bezeichnet.

Um die Ableitungen von Δt nach f und $\bar{f}$ bilden zu können, ist Δt als Funktion von f und $\bar{f}$ anzugeben. Aus der Superposition der Werte, die Δt annimmt, wenn entweder S' im Abstand $\bar{f}$ oder S im Abstand f vom Achsenäquator angenommen wird, folgt

$$\Delta t = -\left(i + \frac{\bar{f}\sin z + f \sin z'}{\sin(z+z')}\right) \sec k_0 \operatorname{cosec} \Phi,$$

so daß

$$du = \frac{d\bar{f}\sin z + df \sin z'}{\sin(z+z')} \sec k_0 \operatorname{cosec} \Phi$$

wird.

Sind nun m' und m die mittleren Fehler, die den wahren Fehlern $d\bar{f}$ und df entsprechen, so wird der mittlere Fehler m_u, wenn $\sec k_0 = 1 + \cdots$ gesetzt wird, gegeben durch den Ausdruck:

$$m_u^2 = \frac{m'^2 \sin^2 z + m^2 \sin^2 z'}{\sin^2(z+z')} \operatorname{cosec}^2 \Phi.$$

Die mittleren Fehler m' und m sind auf ihre Komponenten zurückzuführen:

$$m'^2 = (m_{U'}^2 + m_{\alpha'}^2) \cos^2 q' \sin^2 p' + \sin^2 q' \, m_{p'}^2 ,$$
$$m^2 = (m_U^2 + m_\alpha^2) \cos^2 q \sin^2 p + \sin^2 q \, m_p^2 .$$

Beruht die Polarisbeobachtung auf n' Einstellungen, die wir als Durchgangsbeobachtungen ansehen, so ist zu setzen:

$$m_{U'}^2 \cos^2 q' \sin^2 p' = \frac{1}{n'} \cos^2 q' \left(a_0'^2 \sin^2 p' + \frac{b_0'^2}{V^2}\right),$$

$$m_{\alpha'}^2 \cos^2 q' \sin^2 p' + m_{p'}^2 \sin^2 q' = m^{*\prime 2}.$$

In der letzten Beziehung ist angenommen, daß dem absoluten Betrage nach $m_{\alpha'} \sin p'$ und $m_{p'}$ gleich groß seien. In der ersten Beziehung darf das erste Glied der Klammer wegen des kleinen Wertes von p' neben dem zweiten Glied vernachlässigt werden, und für $\cos^2 q'$ führen wir den Mittelwert $\frac{1}{2}$ aller möglichen gleichmäßig verteilten Fälle ein; es wird dann

$$m_{U'}^2 \cos^2 q' \sin^2 p' = \frac{1}{n'} \frac{b_0'^2}{2V^2} = \frac{1}{n'} m_0'^2$$

mit

$$m_0'^2 = \frac{b_0'^2}{2V^2},$$

so daß

$$m'^2 = \frac{1}{n'} m_0'^2 + m^{*\prime 2}$$

wird.

Ist der Südstern an n Fäden oder Kontakten beobachtet, so wird

$$m_U^2 \cos^2 q \sin^2 p = \frac{1}{n} \cos^2 q \left(a_0^2 \sin^2 p + \frac{b_0^2}{V^2} \right),$$

oder, da wegen der Meridiannähe $\cos^2 q = 1$ gesetzt werden darf:

$$m_U^2 \cos^2 q \sin^2 p = \frac{1}{n} \left(a_0^2 \sin^2 p + \frac{b_0^2}{V^2} \right) = \frac{m_0^2}{n},$$

mit

$$m_0^2 = \left(a_0^2 \sin^2 p + \frac{b_0^2}{V^2} \right).$$

Ferner wird

$$m_\alpha^2 \cos^2 q \sin^2 p + m_p^2 \sin^2 q = m^{*2},$$

und somit

$$m^2 = \frac{m_0^2}{n} + m^{*2}.$$

Somit nimmt der Ausdruck für m_u^2 die Form an:

$$m_u^2 = m'^2 \frac{\sin^2 z + \nu \sin^2 z'}{\sin^2(z + z')} \operatorname{cosec}^2 \Phi,$$

worin zur Abkürzung

$$\nu = \frac{m^2}{m'^2} = \frac{m_0^2/n + m^{*2}}{m_0'^2/n' + m^{*\prime 2}}$$

gesetzt ist. Kennt der Beobachter die Zahlenwerte der in den mittleren Fehlern m und m' auftretenden Komponenten, so kann er die Zahlen n und n' so wählen, daß

$$\nu = 1,$$

also $m' = m$ ist; es wird dann

$$m_u^2 = m^2 \frac{\sin^2 z + \sin^2 z'}{\sin^2(z + z')} \operatorname{cosec}^2 \Phi$$

oder auch, wenn man den Unterschied zwischen z' und Φ vernachlässigt:

$$m_u^2 = m^2 \frac{\sin^2 z + \sin^2 \Phi}{\sin^2(z + \Phi)} \operatorname{cosec}^2 \Phi. \qquad (48)$$

Die Funktion

$$F(z, \Phi) = \frac{\sin^2 z + \sin^2 \Phi}{\sin^2(z + \Phi)}$$

hat einen Minimalwert für den Wert $z = z_0$, der durch die Bedingung

$$\operatorname{tg}(z_0 + \Phi) = 2 \operatorname{tg} \Phi$$

gegeben wird, und $F(z_0, \Phi)$ nimmt dann den Wert

$$F(z_0, \Phi) = \frac{1 + \sin^2 \Phi}{2}$$

an. Nachstehend sind zusammengehörige Werte von z_0 und $F(z_0, \Phi)$ für verschiedene Werte von Φ angegeben.

Φ	z_0	$F(z_0, \Phi)$
0^0	$0{,}^00$	0,50
10	4,0	0,52
20	9,9	0,56
30	13,9	0,62
40	17,2	0,71
50	19,2	0,79
60	19,1	0,88
70	16,1	0,94
80	9,4	0,98
90	0,0	1,00

In mittleren Breiten von $\varphi = 30^0$ bis $\varphi = 70^0$ liegt die günstigste Stelle in der Nähe von 15^0 Zenitdistanz. Geht man, um die Sterne aus einem breiteren Deklinationsbereich auswählen zu können, im Norden von z_0 bis ins Zenit und legt die südliche Grenze des Bereiches in die Zenitdistanz z_u, für welchen Wert $F(z_u, \Phi) = F(0, \Phi)$ wird, so ist z_u bestimmt durch die Bedingung

$$\operatorname{tg} z_u = \frac{\sin 2\,\Phi}{1 - 2\cos 2\,\Phi} \equiv \operatorname{cotg} \Phi,$$

das heißt $z_u = \varphi$; der Bereich darf dann im Süden des Zenites bis zum Äquator ausgedehnt werden.

An Stationen, deren Breite unterhalb $\varphi = 30^0$ liegt, wird man die Döllenmethode wegen der großen Zenitdistanz des Polarsternes nicht verwenden; sie hat vor der Zeitbestimmung im Meridian den Vorteil, daß das Azimut des Instrumentes nur während der kurzen Dauer der Beobachtung des Polarsternes und des Südsternes als konstant vorausgesetzt werden muß. Der Zeit proportionale Azimutänderungen werden übrigens in weitgehendem Maß unschädlich gemacht, wenn der Polarstern vor und nach dem Umlegen eingestellt wird.

ZAHLENBEISPIEL

Die Schweizerische geodätische Kommission hat im Jahre 1927 den Längenunterschied der Sternwarten in Zürich und Genf bestimmen lassen; zur Ermittlung der Uhrkorrektionen wurde die Döllensche Methode der Zeitbestimmung verwendet (vergleiche Band XXI der Astronomisch-geodätischen Arbeiten in der Schweiz). Diesen Beobachtungen entnehmen wir die folgenden Daten:

Ort: Zürich, $\varphi = 47^0 22' 38{,}''5$.
Datum: 30. August 1927.
Beobachter: Dr. P. Engi.
Instrument: Bambergsches Passageninstrument, Vergrößerung 86fach, unpersönliches Mikrometer.

Der bewegliche Faden ist auf den Polarstern je zweimal in beiden Lagen eingestellt worden; es ist

$$\text{zur Uhrzeit } U' = 21^h21^m00^s, \quad \bar{f} = -0^s\!,826, \; z' = 42^0 08',1.$$

Ferner ist

$$U_0 = 21^h21^m34^s\!,732, \; i = +0^s\!,009, \; z = 27^0 54',9$$

Das genäherte Azimut des Instrumentes ist

$$k_0 = -1^0 27'.$$

Hiernach ist

$$\Delta t = -\left(+0^s\!,009 - 0^s\!,826\,\frac{0{,}468}{0{,}940}\right) \cdot 1{,}0003 \cdot 1{,}477 = +0^s\!,594.$$

Die Berechnung der Uhrkorrektion ist in der folgenden Tabelle dargestellt. Die Koordinaten des Polarsternes enthalten die Korrektion wegen der täglichen Aberration nicht.

$U' =$	$21^h21^m00^s$	$\cot\delta' \operatorname{tg}\delta \cos(t'-t) = a$	7,46218
$\alpha' =$	1 36 $05^s\!,92$	$1:(1-a)$	+1261
		$\cot\delta' \operatorname{tg}\delta \sin(t'-t)$	$7{,}783345_n$
$U_0 =$	21 21 $34^s\!,732$	$\operatorname{tg} x$	$7{,}784606_n$
$\alpha =$	21 18 44,802	$\cos x$	−8
		$\cot\delta \operatorname{tg}\varphi$	0,487056
$U' - \alpha' =$	19 44 $54^s\!,08$	$\sin m$	$8{,}271654_n$
$U_0 - \alpha =$	+ 02 49,930		
$t' - t =$	19 42 04,150	$x = -0^0 20' 56'',10$	
		$m = -1\ 04\ 15{,}71$	
$\delta' =$	$88^0 54' 40'',18$	$x - m = +0\ 43\ 19{,}61$	
$\delta =$	19 29 41,70		
$\cot\delta'$ . .	8,278893	$x - m = +$	$2^m 53^s\!,307$
$\operatorname{tg}\delta$	9,549026	$\Delta t = +$	0 00,594
		$\alpha - U_0 = -$	2 49,930
$\sin(t'-t)$.	$9{,}955426_n$	Korrektion wegen täglicher Aberration	
$\cot\delta' \operatorname{tg}\delta$.	7,827919	$= +$	0 00,011
$\cos(t'-t)$.	9,63426		
		$u = +$	$0^m 03^s\!,982$

c) Die Bestimmung der Polhöhe mit Hilfe der Durchgänge zweier Sterne durch den ersten Vertikal[6])

1. *Ableitung der Reduktionsformeln.* Es seien U_w und U_e die Uhrzeiten des Durchganges zweier Sterne durch den mittleren Achsenäquator, von denen der eine im Westen, der andere im Osten beobachtet worden ist. Wir nehmen die Absolutwerte der Stundenwinkel und setzen

$$t_w = (U_w + u) - \alpha_w,$$
$$t_e = \alpha_e - (U_e + u).$$

Der nördliche Pol Q des mittleren Achsenäquators habe den Stundenwinkel $180^0 + \mu_N$ und die Poldistanz ν. Der größte Kreis, der Q mit dem Pol des Äquators verbindet, schneide den mittleren Achsenäquator im Punkte Z'; es