takten beobachtet ist als die Südsterne, das heißt an mehr Kontakten als zur Erfüllung der Bedingung

$$m_{U'} \sin p' = m_U \sin p$$

nötig ist, so erhöhen wir dadurch die beiden Fehlerbeträge. Es wird

$$m_u = \pm 0^s\!,023 \operatorname{cosec} \Phi,$$
$$m_k = \pm 0,034 \operatorname{cosec} \Phi;$$

und das Schlußresultat lautet:

$$u = -1^m 27^s\!,518 \pm 0^s\!,034,$$
$$k = + \quad 0,863 \pm 0,050.$$

b) Die Bestimmung der Zeit mit Hilfe von Durchgängen durch den Vertikal des Polarsternes (Döllenmethode) [4])

1. *Ableitung der Reduktionsformeln.* Wir nehmen an, der Beobachter habe das Instrument bei der Beobachtung des Südsternes umgelegt und in beiden Lagen den beweglichen Faden auf den Polarstern eingestellt; vor und nach dem Umlegen sei ferner der Stand der Niveaublase abgelesen worden. Es stehen dann folgende Daten zur Ableitung der Uhrkorrektion zur Verfügung:

aus der Polarisbeobachtung die Uhrzeiten U'_v und U'_n und die zugehörigen Trommelablesungen M_v und M_n;

aus der Beobachtung des Südsternes die Uhrzeiten U_{iv} und U_{in} $(i = 1, 2, \ldots, n)$;

ferner die Blasenmitten n_v und n_n, wobei der Index v die vor dem Umlegen und der Index n die nach dem Umlegen beobachteten Werte bezeichnet.

Die aus den Blasenmitten ermittelte Neigung des mittleren Achsenäquators sei i; sie werde auf das Westende der Achse bezogen. Ferner sehen wir als bekannt an die Zenitdistanzen z und z'; die Zenitdistanz z des Südsternes nehmen wir nach Süden positiv, nach Norden negativ, die Zenitdistanz z' des Polarsternes nach Norden positiv. Der Revolutionswert der Mikrometerschraube sei R.

Der Abstand des Polarsternes vom *westlichen* Pol Q des mittleren Achsenäquators zur Zeit

$$U' = \frac{1}{2}\,(U'_v + U'_n)$$

sei $90^0 + \bar{f}$. Setzt man

$$m'' = 2 \sin^2 \frac{U'_n - U'_v}{2} \,/\, \sin 1''$$

und nimmt das Azimut k^* des Polarsternes von Norden nach Westen positiv, so ist nach der Beziehung (8b), Seite 38, in Zeitsekunden:

$$\bar{f} = \pm \frac{1}{2}\,(M_v - M_n)\,R - \frac{m''}{15} \cos p' \sin k^* \sin \Phi.$$

Nehmen die Mikrometerablesungen zu, wenn vor dem Umlegen der Faden in größere Distanz vom Pol Q gebracht wird, so ist das positive Zeichen, und wenn die Ablesungen abnehmen, das negative Zeichen zu nehmen. Steht keine Tabelle zur Verfügung, welcher die Werte von m'' entnommen werden können, so ergibt sich der Wert von $m''/15$ auch bequem aus der Beziehung

$$\frac{m''}{15} = \left(\frac{U'_n - U'_v}{5{,}53}\right)^2,$$

worin die Differenz $(U'_n - U'_v)$ in Zeitminuten auszudrücken ist. Den Cosinus der Poldistanz p' des Polarsternes wird man meist gleich 1 setzen dürfen.

Setzt man

$$\overline{U} = \frac{1}{n}\left[\frac{U_{iv} + U_{in}}{2}\right] = \frac{1}{n}\,[\overline{U}_i], \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

und $$\overline{m}'' = \frac{1}{n}\,[m''_i]$$

mit $$m''_i = 2\sin^2\frac{U_{in} - U_{iv}}{2} \Big/ \sin 1''$$

und $$\overline{b} = \frac{1}{n}\,[b_i],$$

wo b_i die halbe Summe von Kontaktbreite und totem Gang ist, so wird die Uhrzeit U_0 des Durchganges durch den Achsenäquator gleich (vergleiche Seite 37):

$$U_0 = \overline{U} - \frac{\overline{m}''}{15}\operatorname{cotg}(\mu - \overline{t}) + \overline{b}\operatorname{cosec} p \sec q.$$

Das zweite Glied rechter Hand darf vernachlässigt werden, da das Argument $(\mu - \overline{t})$ der Kotangente in mittlerer Breite im Maximum um rund 1^0 von 90^0 abweicht. Im letzten Glied darf, da $\overline{b}$ klein ist, $\sec q = 1 + \cdots$ gesetzt werden.

Die Uhrzeit U_0 des Durchganges durch den Achsenäquator wird dann gleich

$$U_0 = \overline{U} + \overline{b}\operatorname{cosec} p.$$

Zur Ableitung der Uhrkorrektion stehen nun folgende Daten zur Verfügung:

$$U', \overline{t}';\ \alpha', p'$$

und

$$U_0;\ \alpha, p;\ i,$$

so daß die Differenz der Stundenwinkel gleich

$$t' - t = (U' - \alpha') - (U_0 - \alpha)$$

wird.

Ein vollständig strenges System von Gleichungen zur Berechnung der Uhrkorrektion u läßt sich auf folgendem Weg aufstellen (Fig. 17). Der erste Vertikal schneide den größten Kreis, der den Ort S' des Polarsternes zur Zeit

U' mit dem Ort S des Südsternes zur Zeit U_0 im Achsenäquator verbindet, im Punkt Z_1 und es sei die Entfernung dieses Punktes vom Zenit Z gleich i_1 und seine Entfernung vom Pol P des Äquators gleich Φ_1. Es sei Δt der Stundenwinkel des Punktes Z_1; es ist dann

$$U_0 + u = \alpha + t = \alpha + \Delta t + (t - \Delta t).$$

Die beiden Teile Δt und $(t - \Delta t)$, in die der Stundenwinkel t zerlegt wird, lassen sich wie folgt berechnen.

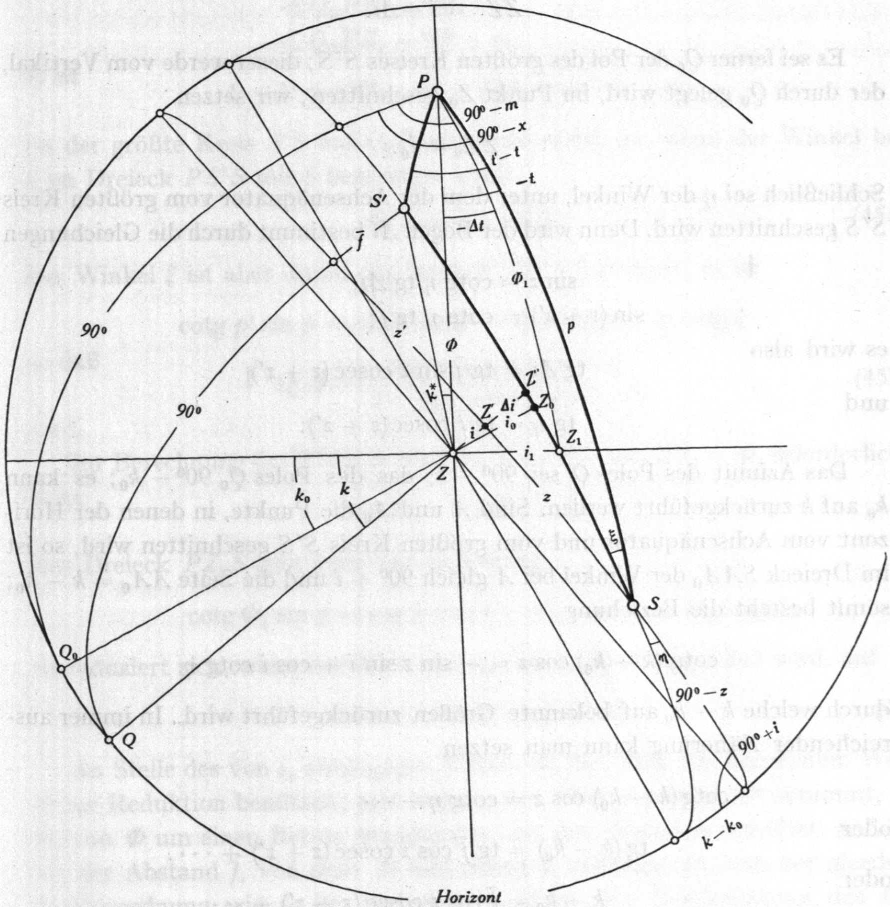

Fig. 17

a) Berechnung von Δt.

Es ist

$$\operatorname{tg} \Delta t = -\operatorname{tg} i_1 \operatorname{cosec} \Phi.$$

Der Bogen i_1 läßt sich mit Hilfe der Zenitdistanzen z und z' auf die Neigung i und den Abstand $\bar{f}$ des Polarsternes vom Achsenäquator zurückführen. Es schneide der durch den Pol Q des mittleren Achsenäquators gelegte Vertikal den Achsenäquator im Punkt Z' und den größten Kreis $S'S$ im Punkt Z''. Dann ist

$$ZZ' = i$$

die mittlere Neigung der Instrumentenachse; wird

$$Z'Z'' = \Delta i,$$

gesetzt, so ist

$$ZZ'' = i + \Delta i.$$

Es sei ferner Q_0 der Pol des größten Kreises $S'S$; dieser werde vom Vertikal, der durch Q_0 gelegt wird, im Punkt Z_0 geschnitten; wir setzen

$$ZZ_0 = i_0.$$

Schließlich sei η der Winkel, unter dem der Achsenäquator vom größten Kreis $S'S$ geschnitten wird. Dann wird der Bogen Δi bestimmt durch die Gleichungen

$$\sin z = \operatorname{cotg} \eta \operatorname{tg} \Delta i,$$
$$\sin (z + z') = \operatorname{cotg} \eta \operatorname{tg} \bar{f};$$

es wird also

$$\operatorname{tg} \Delta i = \operatorname{tg} \bar{f} \sin z \operatorname{cosec} (z + z')$$

und

$$\operatorname{tg} \eta = \operatorname{tg} \bar{f} \operatorname{cosec} (z + z').$$

Das Azimut des Poles Q sei $90^0 - k$, das des Poles Q_0 $90^0 - k_0$; es kann k_0 auf k zurückgeführt werden. Sind A und A_0 die Punkte, in denen der Horizont vom Achsenäquator und vom größten Kreis $S'S$ geschnitten wird, so ist im Dreieck SAA_0 der Winkel bei A gleich $90^0 + i$ und die Seite $AA_0 = k - k_0$; somit besteht die Beziehung

$$\operatorname{cotg} (k - k_0) \cos z = - \sin z \sin i + \cos i \operatorname{cotg} \eta,$$

durch welche $k - k_0$ auf bekannte Größen zurückgeführt wird. In immer ausreichender Näherung kann man setzen

$$\operatorname{cotg} (k - k_0) \cos z = \operatorname{cotg} \eta - \cdots$$

oder

$$\operatorname{tg} (k - k_0) = \operatorname{tg} \bar{f} \cos z \operatorname{cosec} (z + z') + \cdots .$$

oder

$$k - k_0 = \bar{f} \cos z \operatorname{cosec} (z + z') + \cdots .$$

Das rechtwinklige Dreieck ZZ_0Z'' gibt jetzt den Wert von i_0:

$$\operatorname{tg} i_0 = \operatorname{tg} (i + \Delta i) \cos (k - k_0)$$

und schließlich das rechtwinklige Dreieck ZZ_0Z_1 den Wert von i_1:

$$\operatorname{tg} i_1 = \operatorname{tg} i_0 \sec k_0.$$

Für Δt erhält man also

$$\operatorname{tg} \Delta t = -\operatorname{tg} i_1 \operatorname{cosec} \Phi,$$
$$= -\operatorname{tg} i_0 \sec k_0 \operatorname{cosec} \Phi,$$

oder

$$\operatorname{tg} \Delta t = -\operatorname{tg}(i + \Delta i) \cos(k - k_0) \sec k_0 \operatorname{cosec} \Phi. \tag{44}$$

b) Berechnung von $(t - \Delta t)$.

Setzt man

$$\sphericalangle Q_0PS = 90^0 - x,$$
$$\sphericalangle Q_0PZ_1 = 90^0 - m,$$

so ist

$$t - \Delta t = (90^0 - m) - (90^0 - x) = x - m.$$

Da der größte Kreis $S'S$ auf Q_0P senkrecht steht, ist, wenn der Winkel bei S im Dreieck $PS'S$ mit ξ bezeichnet wird:

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \xi \cos p. \tag{45a}$$

Der Winkel ξ ist aber durch das Dreieck $PS'S$ bestimmt; es ist

$$\operatorname{cotg} p' \sin p = \cos p \cos(t' - t) + \sin(t' - t) \operatorname{cotg} \xi$$

so daß

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{tg} p' \operatorname{cotg} p \sin(t' - t)}{1 - \operatorname{tg} p' \operatorname{cotg} p \cos(t' - t)} \tag{45b}$$

wird.

Zur Berechnung des Winkels m ist die Kenntnis von $PZ_1 = \Phi_1$ erforderlich; es ist

$$\cos \Phi_1 = \cos \Phi \cos i_1.$$

Das Dreieck PZ_1S gibt jetzt die Beziehung

$$\operatorname{cotg} \Phi_1 \sin p = \cos p \cos(x - m) - \sin(x - m) \operatorname{cotg} \xi;$$

sie reduziert sich, wenn der Wert von $\operatorname{tg} \xi$ nach (45a) eingeführt wird, auf

$$\sin m = \operatorname{cotg} \Phi_1 \operatorname{tg} p \sin x. \tag{46}$$

An Stelle des von i_1 abhängigen Wertes Φ_1 darf man den konstanten Wert Φ zur Reduktion benützen; erst wenn i_1 den Wert von rund 30^s annimmt, ist Φ_1 von Φ um einen Betrag verschieden, der den Winkel m um $0\overset{s}{,}001$ ändert. Da der Abstand $\bar{f}$, von dem Δi und damit i_1 abhängig ist, von der gleichen Größenordnung wie i_1 ist, bedeutet es kaum eine Beschränkung des Beobachters, wenn man ihm die Verpflichtung auferlegt, den Polarstern nicht in größeren Abständen vom Achsenäquator als 30^s zu beobachten. Man darf dann zur Berechnung des Winkels Δt die Beziehung

$$\Delta t = -\left(i + \bar{f} \frac{\sin z}{\sin(z + z')}\right) \sec k_0 \operatorname{cosec} \Phi \tag{47}$$

verwenden.

Das Azimut k des Instrumentenvertikales folgt aus dem Azimut k^* des Polarsternes mit Hilfe der Beziehung

$$k = k^* + (i \cos z' + \bar{f}) \operatorname{cosec} z';$$

den Wert von k^* wird man einer Einstellungstafel des Polarsternes entnehmen oder, wenn eine solche nicht zur Verfügung steht, mit Hilfe eines Näherungswertes der Uhrkorrektion aus den Beobachtungen selber berechnen.

2. *Der Einfluß der täglichen Aberration.* Die tägliche Aberration kann leicht nachträglich berücksichtigt werden. Setzt man im Differentialausdruck

$$\cos q\, du \sin p - \sin z\, da = \cos q\, d\alpha \sin p + \sin q\, dp$$

für die Verbesserungen $d\alpha \sin p$ und dp die Korrektionen wegen der täglichen Aberration

$$\begin{aligned} d\alpha \sin p &= \quad 0{,}''322 \sin \Phi \cos t, \\ dp &= -\, 0{,}''322 \sin \Phi \sin t \cos p \end{aligned}$$

ein und berücksichtigt die Beziehung

$$\cos a = -\cos q \cos t - \sin q \sin t \cos p,$$

so erhält man

$$\cos q\, du \sin p - \sin z\, da = +\, 0{,}''322 \sin \Phi \cos a.$$

Läßt man diese Beziehung für den Südstern gelten und setzt für den Polarstern, dessen Azimut gleich $180^0 + a$ wird,

$$\cos q'\, du \sin p' - \sin z'\, da = -\, 0{,}''322 \sin \Phi \cos a,$$

so folgt durch Elimination von da unter Berücksichtigung der Beziehungen

$$\begin{aligned} \sin p \;\cos q &= \cos \Phi \sin z + \sin \Phi \cos z \;\cos a, \\ \sin p' \cos q' &= \cos \Phi \sin z' - \sin \Phi \cos z' \cos a \end{aligned}$$

der Ausdruck

$$\sin \Phi \cos a \sin(z + z')\, du = 0{,}''322 \sin \Phi \cos a\, (\sin z + \sin z'),$$

so daß die Verbesserung wegen der täglichen Aberration gleich

$$du = 0{,}^s0215\, \frac{\sin z + \sin z'}{\sin(z + z')}$$

wird. Im Fall, daß an der Rektaszension des Südsternes die Korrektion wegen der täglichen Aberration angebracht worden ist, geht dieser Ausdruck über in

$$du = 0{,}^s0215\, \frac{\sin z}{\sin(z + z')}\,.$$

Da $(z + z')$ nur unerheblich von der Poldistanz p des Südsternes abweicht, darf